ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΚΡΟΤΑΤΑ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1.

Να αποδείξετε ότι για κάθε x∈IR ισχύει: $e^x \geq x+1$

Θεωρώ τη συνάρτηση $f(x)= e^x - x - 1$
$f'(x)= (e^x - x - 1)' = (e^x)' - (x)' - (1)' = e^x - 1 - 0 = e^x - 1$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow e^x - 1>0 \Leftrightarrow e^x >1 \Leftrightarrow e^x >e^0 \Leftrightarrow x>0$
$f'(x)= 0 \Leftrightarrow e^x - 1=0 \Leftrightarrow e^x =1 \Leftrightarrow e^x =e^0 \Leftrightarrow x=0$
$f'(x)<0 \Leftrightarrow x<0$

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
f ΄	– 0 +
f	↘ ↗

min

Επειδή:
- I) $f'(0)=0$
- II) $f'(x) < 0$ για κάθε x∈(0,1)
- III) $f'(x) > 0$ για κάθε x∈(1, +∞)

Η συνάρτηση f έχει ελάχιστο στη θέση $x_o = 0$ τον αριθμό :
$f(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$
Οπότε για κάθε x∈IR ισχύει :
$f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow e^x - x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq x+1$

2.

Να αποδείξετε ότι για κάθε x∈(0,+∞): $\ln x \leq x-1$

Θεωρώ τη συνάρτηση $f(x)= \ln x - x+1$, x∈(0,+∞)

$$f'(x)= (\ln x - x+1)' = (\ln x)' - (x)' + (1)' = \frac{1}{x} - 1 - 0 = \frac{1}{x} - \frac{x}{x} =$$

$$= \frac{1-x}{x}$$

$$\left.\begin{matrix} f'(x)>0 \\ x>0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \frac{1-x}{x}>0 \\ x>0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 1-x>0 \\ x>0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} -x>-1 \\ x>0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} \frac{-x}{-1} < \frac{-1}{-1} \\ x>0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x<1 \\ x>0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow 0<x<1$$

$$\left.\begin{matrix} f'(x)=0 \\ x>0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \frac{1-x}{x}=0 \\ x>0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 1-x=0 \\ x>0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} -x=-1 \\ x>0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} \frac{-x}{-1} = \frac{-1}{-1} \\ x>0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x=1 \\ x>0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow x=1$$

$$\left.\begin{matrix} f'(x)<0 \\ x>0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow x>1$$

x	0	1	+∞
f ΄	+	0	–
f	↗		↘

max

Επειδή: $\begin{cases} \text{I) } f'(1)=0 \\ \text{II) } f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x\epsilon(0,1) \\ \text{III) } f'(x) < 0 \text{ για κάθε } x\epsilon(1, +\infty) \end{cases}$

Η συνάρτηση f έχει μέγιστο στη θέση $x_o = 1$ τον αριθμό :
$f(1) = \ln 1 - 1 + 1 = 0$

Οπότε για κάθε x϶(0,+∞) ισχύει :
f(x)≤ f (0) $\Leftrightarrow$ lnx –x+1≤0 $\Leftrightarrow$ lnx ≤x–1
3.

Να αποδείξετε ότι : $2\sqrt{x} \geq 3-\frac{1}{x}, x \in (0,+\infty)$

Θεωρώ τη συνάρτηση $f(x) = 2\sqrt{x} \geq 3-\frac{1}{x}, x \in (0,+\infty)$

$$f'(x) = \left(2\sqrt{x}-3+\frac{1}{x}\right)' \overset{\substack{\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}},a\geq 0 \\ a^{-1}=\frac{1}{a},a\neq 0}}{=} \left(2x^{\frac{1}{2}}-3+x^{-1}\right)' \overset{(F(x)-G(x)+H(x))'=F'(x)-G'(x)+H'(x)}{=}$$

$$\left(2x^{\frac{1}{2}}\right)' - (3)' + \left(x^{-1}\right)' \overset{\substack{(\lambda F(x))'=\lambda F'(x) \\ (c)'=0, c:\Sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha} \\ (x^a)'=ax^{a-1}}}{=} 2\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' - x^{-2} \overset{a^{-\nu}=\frac{1}{\alpha^{\nu}},\alpha\neq 0}{=} 2\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{x^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} = \frac{1\bullet\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} = \frac{\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}\right)^2} - \frac{1}{x^2} \overset{\left(\sqrt{\theta}\right)^2=\theta\geq 0}{=} \frac{x\sqrt{x}}{xx} - \frac{1}{x^2} = \frac{x\sqrt{x}-1}{x^2}$$

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x\sqrt{x}-1}{x^2} > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\sqrt{x}-1 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\sqrt{x} > 1 \\ x > 0 \end{cases} \overset{\substack{\text{Αν } \alpha,\beta>0 \text{ τότε ισχύει} \\ \text{η ισοδυναμία:} \\ \alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha^2>\beta^2}}{\Leftrightarrow}$$

$$\begin{cases} \left(x\sqrt{x}\right)^2 > 1^2 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2\left(\sqrt{x}\right)^2 > 1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2\bullet x > 1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 > 1 \\ x > 0 \end{cases} \overset{\substack{\text{Αν } \alpha,\beta>0 \text{ τότε ισχύει} \\ \text{η ισοδυναμία:} \\ \alpha>\beta \Leftrightarrow \sqrt[3]{\alpha}>\sqrt[3]{\beta}}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x^3} > \sqrt[3]{1} \\ x > 0 \end{cases} \overset{\substack{\text{Αν } \alpha\geq 0 \text{ τότε ισχύει} \\ \sqrt[3]{a^3}=a}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x > 1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$$

$$\begin{cases} f(x) = 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x\sqrt{x}-1}{x^2} = 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\sqrt{x}-1 = 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\sqrt{x} = 1 \\ x > 0 \end{cases} \overset{\substack{\text{Αν } \alpha,\beta>0 \text{ τότε ισχύει} \\ \text{η ισοδυναμία:} \\ \alpha=\beta \Leftrightarrow \alpha^2=\beta^2}}{\Leftrightarrow}$$

$$\begin{Bmatrix} \left(x\sqrt{x}\right)^2 = 1^2 \\ x>0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x^2\left(\sqrt{x}\right)^2 = 1 \\ x>0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x^2 \bullet x = 1 \\ x>0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x^3 = 1 \\ x>0 \end{Bmatrix} \overset{\text{Αν } \alpha,\beta>0 \text{ τότε ισχύει η ισοδυναμία: } \alpha=\beta \Leftrightarrow \sqrt[3]{\alpha}=\sqrt[3]{\beta}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{1} \\ x>0 \end{Bmatrix} \overset{\text{Αν } \alpha\geq 0 \text{ τότε ισχύει } \sqrt[3]{a^3}=a}{\Leftrightarrow} \begin{Bmatrix} x=1 \\ x>0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow x=1$$

$$\begin{Bmatrix} f(x)<0 \\ x>0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow 0<x<1$$

x	0		1		+∞
f ΄		–	0	+	
f		↘		↗	

min

Επειδή:
- I) f΄(1)=0
- II) f΄(x) < 0 για κάθε xϵ(0,1)
- III)f΄(x) > 0 για κάθε xϵ(1, +∞)

Η συνάρτηση f έχει ελάχιστο στη θέση x_o = 1 τον αριθμό :

$$f(1) = 2\sqrt{1} - 3 + \frac{1}{1} = 2 - 3 + 1 = 0$$

Οπότε για κάθε xϵIR ισχύει :

$$f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow 2\sqrt{x} - 3 + \frac{1}{x} \geq 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} \geq 3 - \frac{1}{x}, x \in (0,+\infty)$$

4.

Να αποδείξετε ότι για κάθε xϵ(0, $\frac{\pi}{2}$) ισχύει εφx+σφx≥2

$$(\sigma\varphi x)' = \left(\varepsilon\varphi^{-1}x\right)' \overset{\left(f^a\right)'=af^{a-1}f'}{=} -1\varepsilon\varphi^{-2}x\left(\varepsilon\varphi x\right)' = -\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^2 x} \bullet \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$$

Θεωρώ τη συνάρτηση f(x)= εφx+σφx–2

$$f'(x)=(εφx+σφx-2)'=(εφx)'+(σφx)'-(2)'=\frac{1}{συν^2x}-\frac{1}{ημ^2x}-0=$$

$$=\frac{ημ^2x}{ημ^2x\,συν^2x}-\frac{συν^2x}{ημ^2xσυν^2x}=\frac{ημ^2x-συν^2x}{ημ^2xσυν^2x}=\frac{-(συν^2x-ημ^2x)}{ημ^2xσυν^2x}=$$

$$=\frac{-συν2x}{ημ^2xσυν^2x}=-\frac{συν2x}{ημ^2xσυν^2x}$$

$συν2x = συν^2x - ημ^2x$

Θεωρώ τη συνάρτηση $g(x)= συν2x,\ x∈(0, \frac{π}{2})$

$g'(x)= (συν2x)'= -ημ2x\ (2x)'= -2ημ2x$

Έχω : $0<x<\frac{π}{2} \Rightarrow 2•0<2x<2\frac{π}{2} \Rightarrow 0<2x< π \Rightarrow ημ2x>0 \Rightarrow$

$-2ημ2x<0 \Rightarrow g'(x) <0$

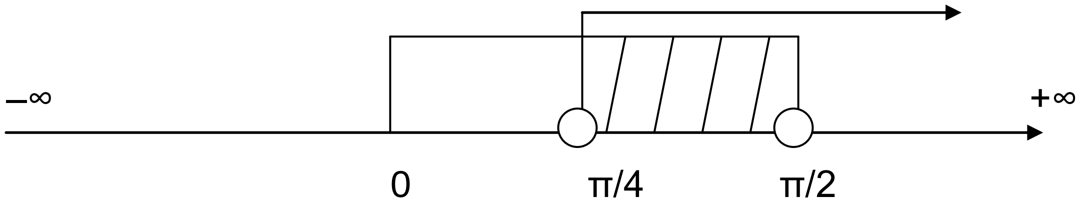
Επειδή $g'(x) <0$ για κάθε $x∈(0, \frac{π}{2})$ η g είναι γνησίως φθίνουσα

Οπότε η g είναι «1-1»

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)>0 \\ x∈(0, \frac{π}{2}) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} -\frac{συν2x}{ημ^2xσυν^2x}>0 \\ x∈(0, \frac{π}{2}) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} συν2x<0 \\ x∈(0, \frac{π}{2}) \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} g(x)<0 \\ x∈(0, \frac{π}{2}) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} g(x)< g(\frac{π}{4}) \\ x∈(0, \frac{π}{2}) \end{array}\right\} \overset{\text{Η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left.\begin{matrix} x>\dfrac{\pi}{4} \\ 0<x<\dfrac{\pi}{2} \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{2}$$



$$\left.\begin{matrix} f'(x)=0 \\ x\in(0,\dfrac{\pi}{2}) \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{matrix} -\dfrac{συν2x}{ημ^2xσυν^2x}=0 \\ x\in(0,\dfrac{\pi}{2}) \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{matrix} συν2x=0 \\ x\in(0,\dfrac{\pi}{2}) \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} g(x)=0 \\ x\in(0,\dfrac{\pi}{2}) \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{matrix} g(x)=g(\dfrac{\pi}{4}) \\ x\in(0,\dfrac{\pi}{2}) \end{matrix}\right\} \overset{\text{Η συνάρτηση g είναι «1-1»}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left.\begin{matrix} x=\dfrac{\pi}{4} \\ 0<x<\dfrac{\pi}{2} \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}$$

$$\left.\begin{matrix} f'(x)<0 \\ x\in(0,\dfrac{\pi}{2}) \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow 0<x<\dfrac{\pi}{4}$$

2

x	0		π/4		π/2
f ΄		–	0	+	
f		↘		↗	
			min		

Επειδή:
- I) $f΄(π/2)=0$
- II) $f΄(x) < 0$ για κάθε $x∊(0,π/4)$
- III) $f΄(x) > 0$ για κάθε $x∊(π/4, π/2)$

Η συνάρτηση f έχει ελάχιστο στη θέση $x_o = π/4$ τον αριθμό :

$$f\left(\frac{π}{4}\right)=εφ\frac{π}{4}+σφ\frac{π}{4}-2=1+1-2=0$$

Οπότε για κάθε $x∊\left(0, \frac{π}{4}\right)$ ισχύει :

$$f(x)\geq f\left(\frac{π}{4}\right) \Longleftrightarrow εφx+σφx-2\geq 0 \Longleftrightarrow εφx+σφx\geq 2$$

5.

Για κάθε $x∊(0,1)$ ισχύει $x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}$

Θεωρώ τη συνάρτηση $f(x)= x^x(1-x)^{1-x} - \frac{1}{2}$, $x∊(0,1)$

$$f΄(x)= \left(x^x(1-x)^{1-x} - \frac{1}{2}\right)΄= \left(x^x(1-x)^{1-x}\right)΄ - \left(\frac{1}{2}\right)΄=$$

$$=(x^x)΄(1-x)^{1-x}+x^x\left((1-x)^{1-x}\right)΄= \left(e^{\ln x^x}\right)΄(1-x)^{1-x} + x^x\left(e^{\ln(1-x)^{1-x}}\right)΄=$$
$$=\left(e^{x\ln x}\right)΄(1-x)^{1-x}+ x^x\left(e^{(1-x)\ln(1-x)}\right)΄=$$

$=e^{x\ln x}\,(x\ln x)'(1-x)^{1-x}+x^x\, e^{(1-x)\ln(1-x)}((1-x)\ln(1-x))'=$

$= e^{\ln x^x}\,[\,(x)'\ln x + x\,(\ln x)'](1-x)^{1-x} + x^x\, e^{\ln(1-x)^{1-x}}\,[\,(1-x)'\ln(1-x) + 1-x\,(\ln 1-x)'] =$

$= x^x(1-x)^{1-x}(\ln x + x\dfrac{1}{x}) + x^x(1-x)^{1-x}(-\ln(1-x) + (1-x)\dfrac{(1-x)'}{1-x})$

$= x^x(1-x)^{1-x}(\ln x+1(-\ln(1-x)-1) = x^x(1-x)^{1-x}\ln\dfrac{x}{1-x}$

$(e^f)' = e^f \cdot f'$
$\theta = \ln e^\theta$,θ>0
$x \cdot \ln\theta = \ln\theta^x$,θ>0
$\ln\theta_1 - \ln\theta_2 = \ln\dfrac{\theta_1}{\theta_2}$ με $\theta_1, \theta_2>0$

Για κάθε x∈(0,1) θα ισχύει :

$\left.\begin{matrix} x>0 \\ x<1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x>0 \\ 1>x \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x>0 \\ 1-x>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x^x>0 \\ (1-x)^{1-x}>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

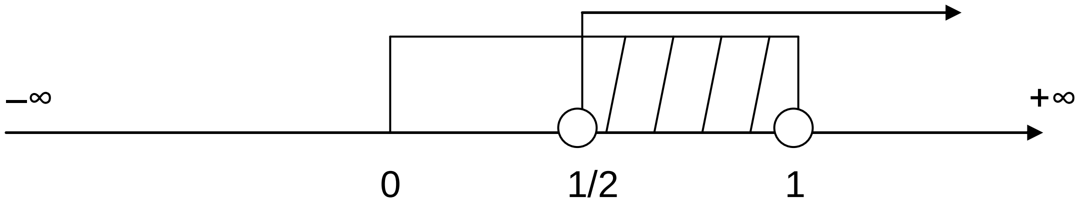
$\Rightarrow x^x(1-x)^{1-x}>0$

$\left.\begin{matrix} f'(x)>0 \\ 0<x<1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \ln\dfrac{x}{1-x}>0 \\ 0<x<1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \ln\dfrac{x}{1-x}>\ln 1 \\ 0<x<1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$

$\left.\begin{matrix} \dfrac{x}{1-x}>1 \\ 0<x<1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \dfrac{x}{1-x}(1-x) > 1(1-x) \\ 0<x<1 (\text{Γιατι} :1>x \text{ κή } 1-x>0) \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$

$\left.\begin{matrix} x>1-x \\ 0<x<1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x+x>1 \\ 0<x<1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 2x>1 \\ 0<x<1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{2x}{2}>\dfrac{1}{2}\\ 0<x<1\end{array}\right\}\Longleftrightarrow\left.\begin{array}{l}x>\dfrac{1}{2}\\ 0<x<1\end{array}\right\}\Longleftrightarrow\dfrac{1}{2}<x<1$$



$$\left.\begin{array}{l}f'(x)=0\\ 0<x<1\end{array}\right\}\Longleftrightarrow\left.\begin{array}{l}\ln\dfrac{x}{1-x}=0\\ 0<x<1\end{array}\right\}\Longleftrightarrow\left.\begin{array}{l}\ln\dfrac{x}{1-x}=\ln 1\\ 0<x<1\end{array}\right\}\Longleftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x}{1-x}=1\\ 0<x<1\end{array}\right\}\Longleftrightarrow\left.\begin{array}{l}x=1-x\\ 0<x<1\end{array}\right\}\Longleftrightarrow\left.\begin{array}{l}x+x=1\\ 0<x<1\end{array}\right\}\Longleftrightarrow\left.\begin{array}{l}2x=1\\ 0<x<1\end{array}\right\}\Longleftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{2x}{2}=\dfrac{1}{2}\\ 0<x<1\end{array}\right\}\Longleftrightarrow\left.\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}\\ 0<x<1\end{array}\right\}\Longleftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l}f'(x)>0\\ 0<x<1\end{array}\right\}\Longleftrightarrow 0<x<\dfrac{1}{2}$$

x	0		1/2		1
f ΄		–	0	+	
f		↘		↗	

min

Επειδή:
- I) f΄(1/2)=0
- II) f΄(x) < 0 για κάθε x∈(0,1/2)
- III)f΄(x) > 0 για κάθε x∈(1/2, 1)

Η συνάρτηση f έχει ελάχιστο στη θέση x_o = 1/2 τον αριθμό :

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{1-1/2}-\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}-\frac{1}{2}=0$$

Οπότε για κάθε x∈(0, 1) ισχύει :

$$f(x)\geq f\left(\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow x^x(1-x)^{1-x}-\frac{1}{2}\geq 0 \Leftrightarrow x^x(1-x)^{1-x}\geq\frac{1}{2}$$

5.

$Να\ αποδείξετε\ οτι: xe^{-x^2}\leq\frac{1}{\sqrt{2e}}, x\geq 0$

$Θεωρώ\ τη\ συνάρτηση\ f(x)=xe^{-x^2}-\frac{1}{\sqrt{2e}}, x\geq 0$

$$f'(x)=\left(xe^{-x^2}-\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)'=\left(xe^{-x^2}\right)'-\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)'=(x)'e^{-x^2}+x\left(e^{-x^2}\right)'=$$

$$=e^{-x^2}+x\left(-x^2\right)'e^{-x^2}=e^{-x^2}-2x^2e^{-x^2}=e^{-x^2}\left(1-2x^2\right)$$

$$\left\{\begin{matrix} f'(x)>0 \\ x\geq 0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix} e^{-x^2}\left(1-2x^2\right)>0 \\ x\geq 0\end{matrix}\right\}\overset{e^{-x^2}>0}{\Longleftrightarrow}\left\{\begin{matrix} 1-2x^2>0 \\ x\geq 0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix} -2x^2>-1 \\ x\geq 0\end{matrix}\right\}$$

Όταν διαιρώ και τα δυο μέλη μιας ανίσωσης με αρνητικό αριθμό προκύπτει ετερόστροφη ανίσωση

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \frac{-2x^2}{-2} < \frac{-1}{-2} \\ x \geq 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x^2 < \frac{1}{2} \\ x \geq 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \sqrt{x^2} < \sqrt{\frac{1}{2}} \\ x \geq 0 \end{matrix}\right\} \overset{\sqrt{x^2}=|x|}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{matrix} |x| < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x \geq 0 \end{matrix}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} |x| < \frac{1 \bullet \sqrt{2}}{\sqrt{2} \bullet \sqrt{2}} \\ x \geq 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} |x| < \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x \geq 0 \end{matrix}\right\} \overset{|x|<\theta \Leftrightarrow -\theta<x<\theta, \theta>0}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{matrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x \geq 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow 0 \leq x < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\left\{\begin{matrix} f'(x) = 0 \\ x \geq 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} e^{-x^2}\left(1-2x^2\right) = 0 \\ x \geq 0 \end{matrix}\right\} \overset{e^{-x^2}>0}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{matrix} 1-2x^2 = 0 \\ x \geq 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} -2x^2 = -1 \\ x \geq 0 \end{matrix}\right\}$$

$$\left\{\begin{matrix} x^2 = \frac{-1}{-2} \\ x \geq 0 \end{matrix}\right\} \overset{x^2=\theta \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\theta}, \theta\geq 0}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{matrix} x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \\ x \geq 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \\ x \geq 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\left\{\begin{matrix} f'(x) < 0 \\ x \geq 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow x > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f		↗		↘	

max

$$\text{Οπότε}:\left\{\begin{array}{l}(\text{I})\ f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0\\(\text{II})\ f'(x)>0, x\in\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\(\text{III})\ f'(x)<0, x\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)\end{array}\right\}$$

Άρα η συνάρτηση f έχει μέγιστο στην θέση $x_0=\frac{\sqrt{2}}{2}$ *τον αριθμό*:

$$f(x_0)=f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}-\frac{1}{\sqrt{2e}}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{\sqrt{2e}}\overset{e^{-x}=\frac{1}{e^x}}{=}\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{e^{\frac{1}{2}}}-\frac{1}{\sqrt{2e}}$$

$$\overset{\substack{\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}},a\geq 0\\ 2=\left(\sqrt{2}\right)^2}}{=}\frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^{2}\sqrt{e}}-\frac{1}{\sqrt{2e}}=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{e}}-\frac{1}{\sqrt{2e}}\overset{\sqrt{a}\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha\beta},\alpha,\beta\geq 0}{=}\frac{1}{\sqrt{2e}}-\frac{1}{\sqrt{2e}}=0$$

Συνεπώς για κάθε $x\geq 0$ *θα ισχύει*:

$$\left\{\begin{array}{c}f(x)\leq f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\x\geq 0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}xe^{-x^2}-\frac{1}{\sqrt{2e}}\leq 0\\x\geq 0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}xe^{-x^2}\leq\frac{1}{\sqrt{2e}}\\x\geq 0\end{array}\right\}$$

6.

Να αποδείξετε οτι: $x^3\ln x\geq -\frac{1}{3e}, x>0$

Θεωρώ την συνάρτηση $f(x)=x^3\ln x+\frac{1}{3e}, x>0$

$$f'(x)=\left(x^3\ln x+\frac{1}{3e}\right)'\overset{(F(x)-G(x))'=F'(x)+G'(x)}{=}\left(x^3\ln x\right)'+\left(\frac{1}{3e}\right)'$$

$$\overset{\substack{(F(x)G(x))'=F'(x)G(x)+F(x)G'(x)\\ (c)'=0,c:\Sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}}}{=} \left(x^3\right)'\ln x + x^3\left(\ln x\right)' \overset{\substack{(x^a)'=ax^{a-1}\\ (\ln x)'=\frac{1}{x},x>0}}{=} 3x^2\ln x + x^3\frac{1}{x} =$$

$$3x^2\ln x + x^2 = x^2\left(3\ln x+1\right)$$

$$\left\{\begin{matrix} f'(x)>0 \\ x>0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x^2\left(3\ln x+1\right)>0 \\ x>0 \end{matrix}\right\} \overset{\text{Αν } x\neq 0 \text{ έχω } x^2>0}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{matrix} 3\ln x+1>0 \\ x>0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} 3\ln x>-1 \\ x>0 \end{matrix}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \ln x>-\frac{1}{3} \\ x>0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \ln x>-\frac{1}{3}\bullet 1 \\ x>0 \end{matrix}\right\} \overset{\ln e=1}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{matrix} \ln x>-\frac{1}{3}\bullet \ln e \\ x>0 \end{matrix}\right\} \overset{x\ln\theta=\ln\theta^x,\theta>0}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{matrix} \ln x>\ln e^{-\frac{1}{3}} \\ x>0 \end{matrix}\right\}$$

$$\overset{\substack{\text{Αν } \theta_1,\theta_2>0 \text{ τότε ισχύει η ισοδυναμία:}\\ \ln\theta_1>\ln\theta_2\Leftrightarrow\theta_1>\theta_2}}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{matrix} x>e^{-\frac{1}{3}} \\ x>0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow x>e^{-\frac{1}{3}}$$

$$\left\{\begin{matrix} f'(x)=0 \\ x>0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x^2\left(3\ln x+1\right)=0 \\ x>0 \end{matrix}\right\} \overset{\text{Αν } x\neq 0 \text{ έχω } x^2>0}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{matrix} 3\ln x+1=0 \\ x>0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} 3\ln x=-1 \\ x>0 \end{matrix}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \ln x=-\frac{1}{3} \\ x>0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \ln x=-\frac{1}{3}\bullet 1 \\ x>0 \end{matrix}\right\} \overset{\ln e=1}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{matrix} \ln x=-\frac{1}{3}\bullet \ln e \\ x>0 \end{matrix}\right\} \overset{x\ln\theta=\ln\theta^x,\theta>0}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{matrix} \ln x=\ln e^{-\frac{1}{3}} \\ x>0 \end{matrix}\right\}$$

$$\overset{\substack{\text{Αν } \theta_1,\theta_2>0 \text{ τότε ισχύει η ισοδυναμία:}\\ \ln\theta_1>\ln\theta_2\Leftrightarrow\theta_1>\theta_2}}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{matrix} x=e^{-\frac{1}{3}} \\ x>0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow x=e^{-\frac{1}{3}}$$

$$\left\{\begin{matrix} f'(x)<0 \\ x>0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow 0<x<e^{-\frac{1}{3}}$$

x	0		$e^{-\frac{1}{3}}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		↘		↗	

min

$$\text{Οπότε}:\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\ f'\left(e^{-\frac{1}{3}}\right)=0\\(\mathrm{II})\ f'(x)<0, x\in\left(0,e^{-\frac{1}{3}}\right)\\(\mathrm{III})\ f'(x)>0, x\in\left(e^{-\frac{1}{3}},+\infty\right)\end{array}\right\}$$

Άρα η συνάρτηση f έχει ελάχιστο στην θέση $x_0=e^{-\frac{1}{3}}$ τον αριθμό:

$$f(x_0)=f\left(e^{-\frac{1}{3}}\right)=\left(e^{-\frac{1}{3}}\right)^3\ln e^{-\frac{1}{3}}+\frac{1}{3e}\overset{\substack{(\alpha^\mu)^\nu=\alpha^{\mu\nu}\\ x\ln\theta=\ln\theta^x,\theta>0}}{=}e^{-3\frac{1}{3}}\left(-\frac{1}{3}\right)\ln e+\frac{1}{3e}\overset{\ln e=1}{=}$$

$$-\frac{e^{-1}}{3}+\frac{1}{3e}\overset{a^{-1}=\frac{1}{a},a\neq 0}{=}-\frac{1}{3e}+\frac{1}{3e}=0$$

$Συνεπώς\ για\ κάθε\ x>0\ θα\ ισχύει:$

$$\begin{Bmatrix} f(x)\geq f\left(e^{-\frac{1}{3}}\right) \\ x>0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x^3\ln x+\frac{1}{3e}\geq 0 \\ x>0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x^3\ln x\geq -\frac{1}{3e} \\ x>0 \end{Bmatrix}$$

7.

$Να\ αποδείξετε\ οτι: \frac{\ln x}{x}\geq\frac{1}{e}, x>0$

$Θεωρώ\ την\ συνάρτηση: f(x)=\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{e}, x>0$

$$f'(x)=\left(\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{e}\right)' \overset{(F(x)-G(x))'=F'(x)-G'(x)}{=} \left(\frac{\ln x}{x}\right)'-\left(\frac{1}{e}\right)'$$

$$\overset{\left(\frac{F(x)}{G(x)}\right)'=\frac{F'(x)G(x)-F(x)G'(x)}{G^2(x)},\ (c)=0, c:Σταθερά}{=} \frac{(\ln x)'x-\ln x(x)'}{x^2} \overset{(\ln x)'=\frac{1}{x}, x>0}{=} \frac{\frac{1}{x}x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$\begin{Bmatrix} f'(x)>0 \\ x>0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \frac{1-\ln x}{x^2}>0 \\ x>0 \end{Bmatrix} \overset{Αν\ x\neq 0\ θα\ έχω\ x^2>0}{\Leftrightarrow} \begin{Bmatrix} 1-\ln x>0 \\ x>0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -\ln x>-1 \\ x>0 \end{Bmatrix}$$

$$\overset{\text{Όταν διαιρώ και τα δυο μέλη μιας ανίσωσης με αρνητικό αριθμό προκύπτει ετερόστροφη ανίσωση}}{\Leftrightarrow} \begin{Bmatrix} \frac{-\ln x}{-1}<\frac{-1}{-1} \\ x>0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \ln x<1 \\ x>0 \end{Bmatrix} \overset{\ln e=1}{\Leftrightarrow} \begin{Bmatrix} \ln x<\ln e \\ x>0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x<e \\ x>0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow 0<x<e$$

$$\begin{Bmatrix} f'(x)=0 \\ x>0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \frac{1-\ln x}{x^2}=0 \\ x>0 \end{Bmatrix} \overset{Αν\ x\neq 0\ θα\ έχω\ x^2>0}{\Leftrightarrow} \begin{Bmatrix} 1-\ln x=0 \\ x>0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \ln x=1 \\ x>0 \end{Bmatrix}$$

$$\overset{\ln e=1}{\Leftrightarrow} \begin{Bmatrix} \ln x=\ln e \\ x>0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x=e \\ x>0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow x=e$$

$$\begin{Bmatrix} f'(x)<0 \\ x>0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow x>e$$

x	0		e		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		↘	min	↗	

$$\text{Οπότε}:\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\ f'\left(e^{-\frac{1}{3}}\right)=0\\(\mathrm{II})\ f'(x)<0, x\in\left(0,e^{-\frac{1}{3}}\right)\\(\mathrm{III})\ f'(x)>0, x\in\left(e^{-\frac{1}{3}},+\infty\right)\end{array}\right\}$$

Άρα η συνάρτηση f έχει ελάχιστο στην θέση $x_0=e$ τον αριθμό:

$$f(x_0)=f(e)=\frac{\ln e}{e}-\frac{1}{e}=\frac{1}{e}-\frac{1}{e}=0$$

Συνεπώς για κάθε $x>0$ θα ισχύει:

$$\left\{\begin{array}{c}f(x)\geq f(e)\\x>0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{e}\geq 0\\x>0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\frac{\ln x}{x}\geq\frac{1}{e}\\x>0\end{array}\right\}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Να αποδείξετε ότι για κάθε x∈IR ισχύει: $xe^x+1\geq e^x$

2.

Να αποδείξετε ότι για κάθε x∈(0,+∞): $x-x\ln x\leq 1$

3.

Να αποδείξετε οτι: $xe^{\frac{1}{x^2}}\leq\frac{\sqrt{2}}{2}e^2, x\geq 0$