Πως θα βρω το μέγιστο ή το ελάχιστο ενός μεγέθους όταν δίνεται μια συνθήκη ;;;

↓

Εκφράζω το μέγεθος που με ενδιαφέρει συναρτήσει των μεταβλητών x και y

↓

Από την συνθήκη που μου δίνεται θα βρω το y συναρτήσει του x ή το x συναρτήσει του y(Συνήθως αυτό που είναι πιο εύκολο)

↓

Εκφράζω το μέγεθος που με ενδιαφέρει συναρτήσει μιας μόνο μεταβλητής

↓

Μελετάω τα ακρότατα της παράστασης που έχει προκύψει

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1.

Από όλα τα ορθογώνια που το άθροισμα των διαστάσεων του είναι 10 m και να βρεθεί ποιο έχει μέγιστο εμβαδό και πόσο είναι το μέγιστο εμβαδόν

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

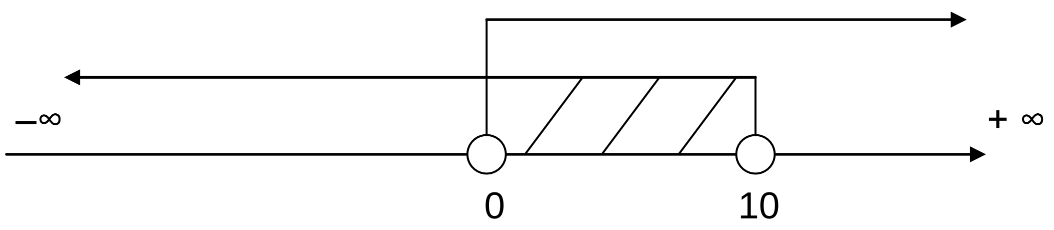
Αν x, y οι διαστάσεις του ορθογωνίου τότε θα έχω :

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 10 \\ x>0,\ y>0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} y = 10 - x \\ x>0,\ y>0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} y = 10 - x \\ x>0,\ 10 - x>0 \end{array}\right\}$$

Θα πρέπει να έχω :

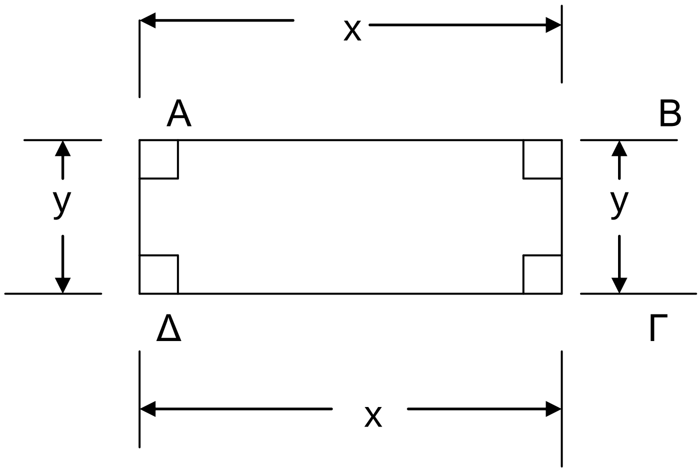
$$\left.\begin{array}{l} 10 - x>0 \\ x>0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} -x > -10 \\ x>0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{-x}{-1} < \dfrac{-10}{-1} \\ x>0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x < 10 \\ x > 0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow 0< x < 10$$



Το εμβαδό του ορθογωνίου ΑΒΓΔ δίνεται από την σχέση :

$E = x\,y = x\,(10 - x) = 10\,x - x \bullet x = 10x - x^2$

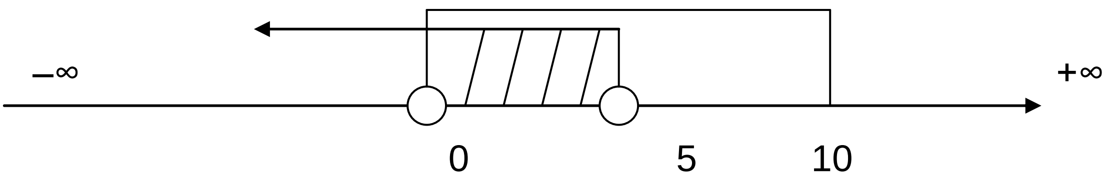


Θεωρώ την συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 10x$

$f'(x) = (-x^2 + 10x)' = (-x^2)' + (10x)' = -2x + 10(x)' = -2x + 10 \bullet 1 =$
$= -2x + 10$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) > 0 \\ 0 < x < 10 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} -2x + 10 > 0 \\ 0 < x < 10 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} -2x > -10 \\ 0 < x < 10 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{-2x}{-2} < \dfrac{-10}{-2} \\ 0 < x < 10 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} x < 5 \\ 0 < x < 10 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow 0 < x < 5$$



$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ 0 < x < 10 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} -2x + 10 = 0 \\ 0 < x < 10 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} -2x = -10 \\ 0 < x < 10 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{-2x}{-2} = \dfrac{-10}{-2} \\ 0 < x < 10 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} x = 5 \\ 0 < x < 10 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow x = 5$$

Οπότε :

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) < 0 \\ 0 < x < 10 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \quad 5 < x < 10$$

x	0		5		10
f ΄	||	+	0	–	||
f	||	↗		↘	||

max

$$\text{Επειδή:} \begin{cases} \text{I) } f'(10)=0 \\ \text{II) } f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in (0,5) \\ \text{III) } f'(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in (5,\ 10\ ) \end{cases}$$

Η συνάρτηση f έχει μέγιστο στη θέση x_o = 5m τον αριθμό :

$f(5) = -5^2 + 10 \bullet 5 = -25 + 50 = 25m^2$

2.

Να βρείτε το σημείο της παραβολής με εξίσωση $y = x^2$ που απέχει από το σημείο Α(3,0) τη μικρότερη δυνατή απόσταση

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν Β(x ,y) τυχαίο σημείο της παραβολής τότε θα έχω $y = x^2$.Οπότε το σημείο Β(x ,y) θα έχει τη μορφή Β(x , x^2)

$$\boxed{AB = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2}, A\left(x_A, y_A\right), B\left(x_B, y_B\right)}$$

$$AB = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2} = \sqrt{\left(x-3\right)^2 + \left(x^2 - 0\right)^2} =$$

$$\overset{\substack{(a-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2\\(\alpha^\nu)^\mu=\alpha^{\nu\mu}}}{=}\sqrt{x^2-2\bullet x\bullet 3+3^2+x^4}=\sqrt{x^4+x^2-6x+9}$$

$\Theta\varepsilon\omega\rho\acute{\omega}\ \tau\eta\nu\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f(x)=\sqrt{x^4+x^2-6x+9}$

$$\acute{E}\chi\omega: f(x)=\sqrt{x^4+x^2-6x+9}\overset{\sqrt{\alpha}=\alpha^{\frac{1}{2}},\alpha\geq 0}{=}\left(x^4+x^2-6x+9\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x)=\left[\left(x^4+x^2-6x+9\right)^{\frac{1}{2}}\right]'\overset{(F^a)'=a\bullet F^{a-1}\bullet F'}{=}\frac{1}{2}\left(x^4+x^2-6x+9\right)^{\frac{1}{2}-1}\left(x^4+x^2-6x+9\right)'$$

$$=\frac{1}{2}\left(x^4+x^2-6x+9\right)^{-\frac{1}{2}}\left[\left(x^4\right)'+\left(x^2\right)'-\left(6x\right)'+\left(9\right)'\right]\overset{\substack{a^{-x}=\frac{1}{a^x},a\neq 0\\(x^a)'=ax^{a-1}\\(c)=0,c:\Sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}\\(cF(x))'=cF'(x),c:\Sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}}}{=}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{\left(x^4+x^2-6x+9\right)^{\frac{1}{2}}}\left[4x^3+2x-6(x)'\right]\overset{\substack{(x)'=1\\\sqrt{\alpha}=\alpha^{\frac{1}{2}},\alpha\geq 0}}{=}\frac{1}{2}\frac{4x^3+2x-6}{\sqrt{x^4+x^2-6x+9}}=$$

$$=\frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}\left(2x^3+x-3\right)}{\sqrt{x^4+x^2-6x+9}}=\frac{2x^3+x-3}{\sqrt{x^4+x^2-6x+9}}$$

$$2x^3+x-3\overset{-3=-2-1}{=}\underbrace{2x^3-2}_{\substack{\mathrm{B}\gamma\acute{\alpha}\zeta\omega\ \kappa o\iota\nu\acute{o}\\ \pi\alpha\rho\acute{\alpha}\gamma o\nu\tau\alpha\ \tau o 2}}+x-1=2\left(x^3-1\right)+x-1=2\left(x^3-1^3\right)+x-1$$

$$\overset{a^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}{=}2(x-1)\left(x^2+x\bullet 1+1^2\right)+x-1=\underbrace{2(x-1)\left(x^2+x+1\right)+1(x-1)}_{\mathrm{B}\gamma\acute{\alpha}\zeta\omega\ \kappa o\iota\nu\acute{o}\ \pi\alpha\rho\acute{\alpha}\gamma o\nu\tau\alpha\ \tau o\ x-1}$$

$$=(x-1)\left[2\left(x^2+x+1\right)+1\right]=(x-1)\left(2x^2+2x+2+1\right)=(x-1)\left(2x^2+2x+3\right)$$

$$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon: f'(x)=\frac{(x-1)\left(2x^2+2x+3\right)}{\sqrt{x^4+x^2-6x+9}}$$

$x-1>0 \Longleftrightarrow x>1$
$x-1=0 \Longleftrightarrow x=1$
$x-1<0 \Longleftrightarrow x<1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$

Θεωρώ την δευτεροβάθμια εξίσωση :

$\boxed{+2}\ x^2\ \boxed{+2}\ x\ \boxed{+3}\ =\ 0 \quad (1)$

$\alpha = 2 \quad \beta = 2 \quad \gamma = 3$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4 \bullet 2 \bullet 3 = 4 - 12 = -8 < 0$

Επειδή α=2>0 και Δ < 0 για κάθε x ε IR θα έχω $x^2 + 2x + 3 > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$2x^2 + 2x + 3$	$+$	

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$
$2x^2 + 2x + 3$	$+$		$+$
$(x-1)(2x^2+2x+3)$	$-$	0	$+$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	↘		↗

$\left\{ \begin{array}{l} \text{I) } f'(1)=0 \\ \text{II) } f'(x) < 0 \text{ για κάθε } x \epsilon (-\infty, 1) \\ \text{III) } f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \epsilon (1, +\infty) \end{array} \right.$

Η συνάρτηση f έχει ελάχιστο στη θέση $x_o = 1$.Οπότε $y = x^2 = 1^2 = 1$
Άρα έχω τη μικρότερη δυνατή απόσταση στο σημείο (1,1)
3.

Να βρείτε δυο θετικούς αριθμούς που έχουν άθροισμα 20 και το γινόμενο τους είναι μέγιστο

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

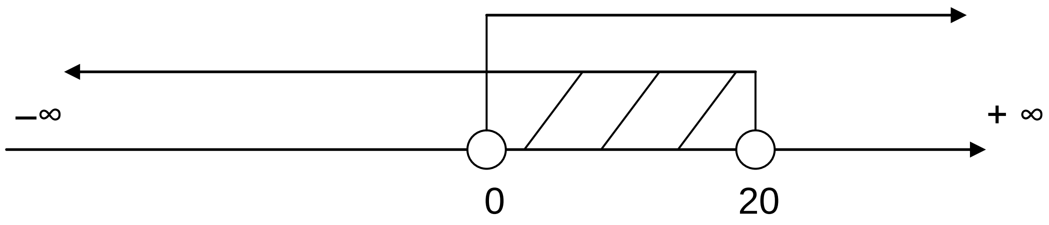
Έστω x, y οι ζητούμενοι αριθμοί τότε θα έχω :

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 10 \\ x>0,\ y>0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y = 20 - x \\ x>0,\ y>0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y = 20 - x \\ x>0,\ 20 - x >0 \end{array}\right\}$$

Θα πρέπει να έχω :

$$\left.\begin{array}{l} 20 - x >0 \\ x>0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} - x > -20 \\ x>0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{-x}{-1} < \dfrac{-20}{-1} \\ x>0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x < 20 \\ x > 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow 0< x < 20$$



$P = x\, y = x\,(20 - x) = 20\, x - x \bullet x = 20x - x^2$

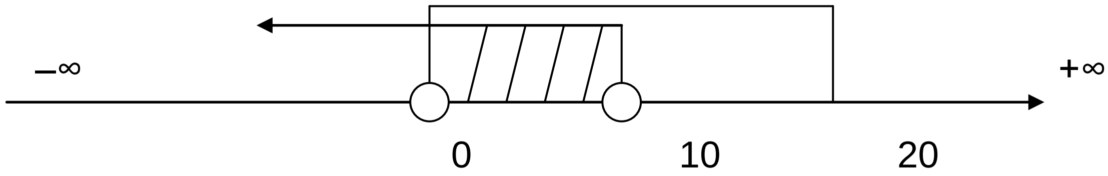
Θεωρώ την συνάρτηση $f(x)= - x^2 + 20x$

$f'(x)= (- x^2 + 20x)'= (- x^2)'+ (20x)' = - 2x + 20(x)' = - 2x + 20 \bullet 1=$
$= - 2x + 20$

$[\, f(x) - g(x)\,]' = f'(x) - g'(x)$
$[\lambda\, f(x)\,]' = \lambda f'(x)$ λ: Σταθερά
$(x)' = 1$
$(x^{\alpha})' = \alpha\, x^{\alpha-1}$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) > 0 \\ 0 < x < 20 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} -2x + 20 > 0 \\ 0 < x < 20 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} -2x > -20 \\ 0 < x < 20 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{-2x}{-2} < \dfrac{-20}{-2} \\ 0 < x < 20 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} x < 10 \\ 0 < x < 20 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow 0 < x < 10$$



$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ 0 < x < 20 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} -2x + 20 = 0 \\ 0 < x < 20 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} -2x = -20 \\ 0 < x < 20 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{-2x}{-2} = \dfrac{-20}{-2} \\ 0 < x < 20 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} x = 10 \\ 0 < x < 20 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow x = 10$$

Οπότε :

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) < 0 \\ 0 < x < 20 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow 10 < x < 20$$

x	0		10		20
f ΄		+	0	–	
f		↗		↘	

max

Επειδή: $\begin{cases} \text{I) } f'(0)=0 \\ \text{II) } f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x\in(0,10) \\ \text{III) } f'(x) < 0 \text{ για κάθε } x\in(10, 20) \end{cases}$

Η συνάρτηση f έχει μέγιστο στη θέση $x_o = 10$

$y_o = 20 - x_o = 20 - 10 = 10$

4.

Δυο αριθμοί έχουν γινόμενο 100. Πότε το άθροισμα τους γίνεται ελάχιστο

Έστω x, y οι ζητούμενοι αριθμοί τότε θα έχω :

$$\left.\begin{array}{l} x \cdot y = 100 \\ x>0,\ y>0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{x \cdot y}{x} = \dfrac{100}{x} \\ x>0,\ y>0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y = \dfrac{100}{x} \\ x>0 \end{array}\right\}$$

$$S = x+y = x + \frac{100}{x}$$

Θεωρώ την συνάρτηση $f(x)= x + \dfrac{100}{x}$, $x\in(0,+\infty)$

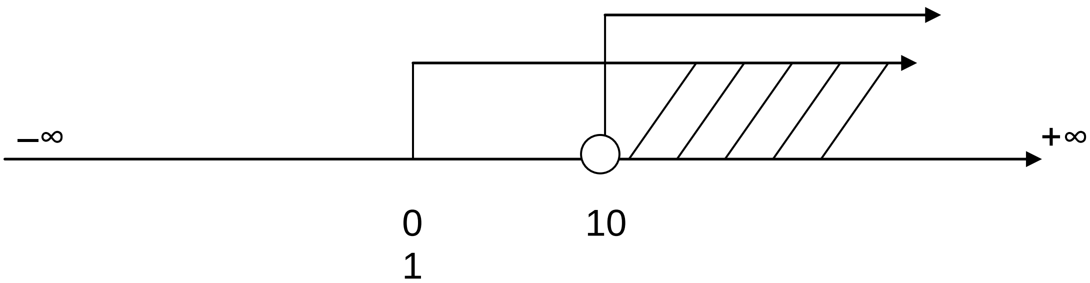
$$f'(x)= (x + 100x^{-1})' = (x)' + (100x^{-1})' = 1 + 100(x^{-1})' = 1 - 100x^{-2} =$$

$$= 1 - 100 \cdot \frac{1}{x^2} = 1 - \frac{100}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} - \frac{100}{x^2} = \frac{x^2 - 100}{x^2} = \frac{x^2 - 10^2}{x^2} =$$

$$= \frac{(x-10)(x+10)}{x^2} = \frac{x+10}{x^2}(x-10)$$

Έχω : $x>0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2 > 0 \\ x+10>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{x+10}{x^2} > 0$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) > 0 \\ x >0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x - 10 > 0 \\ x >0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x >10 \\ x >0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x >10$$



$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ x > 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x - 10 = 0 \\ x > 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x = 10 \\ x > 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x = 10$$

Οπότε :

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) < 0 \\ x > 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow 0 < x < 10$$

x	0		10		+∞
f ΄	‖	–	0	+	‖
f	‖	↘		↗	‖
			min		

$$\text{Επειδή: } \begin{cases} \text{I) } f'(10)=0 \\ \text{II) } f'(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in (0,10) \\ \text{III) } f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in (10, +\infty) \end{cases}$$

Η συνάρτηση f έχει ελάχιστο στη θέση $x_o = 10$

$$y_o = \frac{100}{x_o} = \frac{100}{10} = 10$$

5.

Να βρεθούν τα x,yє(0,13) τέτοια ώστε x + y = 13 και η παράσταση

$3\sqrt{x} + 2\sqrt{y}$ να εχει μέγιστη τιμή

$$\left.\begin{array}{l} x+y=13 \\ 0<x<13 \\ 0<y<13 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} y=13-x \\ 0<x<13 \\ 0<13-x<13 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{c} y=13-x \\ 0<x<13 \\ -13<-x<13-13 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} y=13-x \\ 0<x<13 \\ \dfrac{-13}{-1}>\dfrac{-x}{-1}>\dfrac{0}{-1} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{c} y=13-x \\ 0<x<13 \\ 13>x>0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{c} y=13-x \\ 0<x<13 \end{array}\right\}$$

$$\acute{E}\chi\omega: 3\sqrt{x}+2\sqrt{y} \overset{y=13-x}{=} 3\sqrt{x}+2\sqrt{13-x}$$

$$\Theta\varepsilon\omega\rho\acute{\omega}\ \tau\eta\nu\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f(x)=3\sqrt{x}+2\sqrt{13-x}, 0<x<13$$

$$f'(x)=\left(3\sqrt{x}+2\sqrt{13-x}\right)' \overset{a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a},a\geq 0}{=} \left[3x^{\frac{1}{2}}+2(13-x)^{\frac{1}{2}}\right]' \overset{(F(x)+G(x))'=F'(x)+G'(x)}{=}$$

$$\left(3x^{\frac{1}{2}}\right)'+\left[2(13-x)^{\frac{1}{2}}\right]' \overset{(cF(x))'=cF'(x),c:\Sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}}{=} 3\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'+2\left[(13-x)^{\frac{1}{2}}\right]' \overset{\substack{(x^a)'=ax^{a-1} \\ (F^a)'=a\bullet F^{a-1}\bullet F'}}{=}$$

$$3\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}+2\frac{1}{2}(13-x)^{\frac{1}{2}-1}(13-x)'=\frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}+(13-x)^{-\frac{1}{2}}(-1) \overset{a^{-x}=\frac{1}{a^x}}{=}$$

$$\frac{3}{2}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}-\frac{1}{(13-x)^{\frac{1}{2}}} \overset{a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a},a\geq 0}{=} \frac{3}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{13-x}}=\frac{3\sqrt{13-x}}{2\sqrt{x}\sqrt{13-x}}-\frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{13-x}}=$$

$$=\frac{3\sqrt{13-x}-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{13-x}}$$

$$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon: f'(x)=\frac{3\sqrt{13-x}-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{13-x}}, 0<x<13$$

$$\begin{cases} f'(x)>0 \\ 0<x<13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3\sqrt{13-x}-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{13-x}}>0 \\ 0<x<13 \end{cases} \overset{\substack{\text{Όταν } 0<x<13 \text{ έχω} \\ 2\sqrt{x}\sqrt{13-x}>0}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 3\sqrt{13-x}-2\sqrt{x}>0 \\ 0<x<13 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 3\sqrt{13-x}>2\sqrt{x} \\ 0<x<13 \end{cases} \overset{\substack{\text{Αν } \alpha,\beta\geq 0 \text{ ισχύει η ισοδυναμία:} \\ \alpha>\beta\Leftrightarrow\alpha^2>\beta^2}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \left(3\sqrt{13-x}\right)^2>\left(2\sqrt{x}\right)^2 \\ 0<x<13 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 9\left(\sqrt{13-x}\right)^2>4\left(\sqrt{x}\right)^2 \\ 0<x<13 \end{cases} \overset{\left(\sqrt{\alpha}\right)^2=\alpha,\alpha\geq 0}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 9(13-x)>4x \\ 0<x<13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9\bullet 13-9x>4x \\ 0<x<13 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 117-9x>4x \\ 0<x<13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9x-4x>-117 \\ 0<x<13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -13x>-117 \\ 0<x<13 \end{cases} \overset{\substack{\text{Όταν διαιρώ και τα δυο} \\ \text{μέλη μιας ανίσωσης} \\ \text{με αρνητικό αριθμό} \\ \text{προκύπτει ετερόστροφη} \\ \text{ανίσωση}}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\begin{cases} \dfrac{-13x}{-13}<\dfrac{-117}{-13} \\ 0<x<13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<9 \\ 0<x<13 \end{cases} \Leftrightarrow 0<x<9$$

$$\begin{cases} f'(x)=0 \\ 0<x<13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3\sqrt{13-x}-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{13-x}}=0 \\ 0<x<13 \end{cases} \overset{\substack{\text{Όταν } 0<x<13 \text{ έχω} \\ 2\sqrt{x}\sqrt{13-x}>0}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 3\sqrt{13-x}-2\sqrt{x}=0 \\ 0<x<13 \end{cases} \Leftrightarrow$$

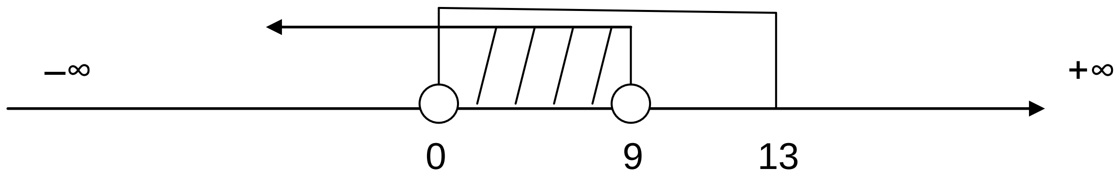
$$\begin{cases} 3\sqrt{13-x}=2\sqrt{x} \\ 0<x<13 \end{cases} \overset{\substack{\text{Αν } \alpha,\beta\geq 0 \text{ ισχύει η ισοδυναμία:} \\ \alpha=\beta\Leftrightarrow\alpha^2>\beta^2}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \left(3\sqrt{13-x}\right)^2=\left(2\sqrt{x}\right)^2 \\ 0<x<13 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 9\left(\sqrt{13-x}\right)^2=4\left(\sqrt{x}\right)^2 \\ 0<x<13 \end{cases} \overset{\left(\sqrt{\alpha}\right)^2=\alpha,\alpha\geq 0}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 9(13-x)=4x \\ 0<x<13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9\bullet 13-9x=4x \\ 0<x<13 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 117-9x=4x \\ 0<x<13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9x-4x=-117 \\ 0<x<13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -13x=-117 \\ 0<x<13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-117}{-13} \\ 0<x<13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=9 \\ 0<x<13 \end{cases} \Leftrightarrow x=9$$

$$\begin{cases} f'(x)>0 \\ 0<x<13 \end{cases} \Leftrightarrow 9<x<13$$



$$\begin{cases} f'(x)=0 \\ 0<x<13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3\sqrt{13-x}-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{13-x}}=0 \\ 0<x<13 \end{cases} \overset{\substack{\text{Όταν } 0<x<13 \text{ έχω} \\ 2\sqrt{x}\sqrt{13-x}>0}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 3\sqrt{13-x}-2\sqrt{x}=0 \\ 0<x<13 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 3\sqrt{13-x}=2\sqrt{x} \\ 0<x<13 \end{cases} \overset{\substack{\text{Αν } \alpha,\beta\geq 0 \text{ ισχύει η ισοδυναμία:} \\ \alpha=\beta\Leftrightarrow\alpha^2>\beta^2}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \left(3\sqrt{13-x}\right)^2=\left(2\sqrt{x}\right)^2 \\ 0<x<13 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 9\left(\sqrt{13-x}\right)^2=4\left(\sqrt{x}\right)^2 \\ 0<x<13 \end{cases} \overset{\left(\sqrt{\alpha}\right)^2=\alpha,\alpha\geq 0}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 9(13-x)=4x \\ 0<x<13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9\bullet 13-9x=4x \\ 0<x<13 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 117-9x=4x \\ 0<x<13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9x-4x=-117 \\ 0<x<13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -13x=-117 \\ 0<x<13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-117}{-13} \\ 0<x<13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=9 \\ 0<x<13 \end{cases} \Leftrightarrow x=9$$

$$\begin{cases} f'(x)>0 \\ 0<x<13 \end{cases} \Leftrightarrow 9<x<13$$

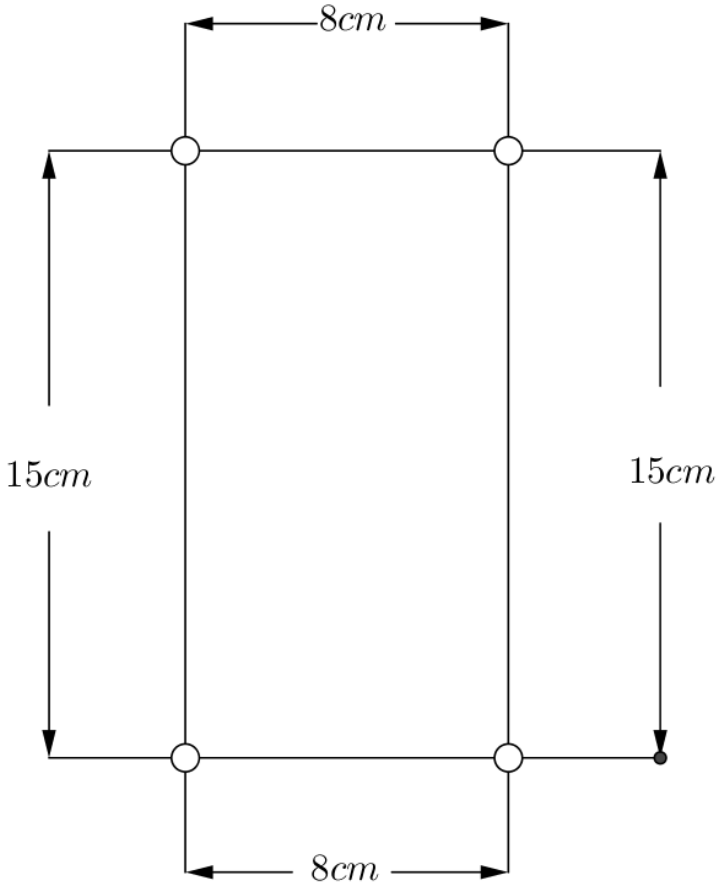
x	0		9		13
f ΄		+	0	–	
f		↗		↘	

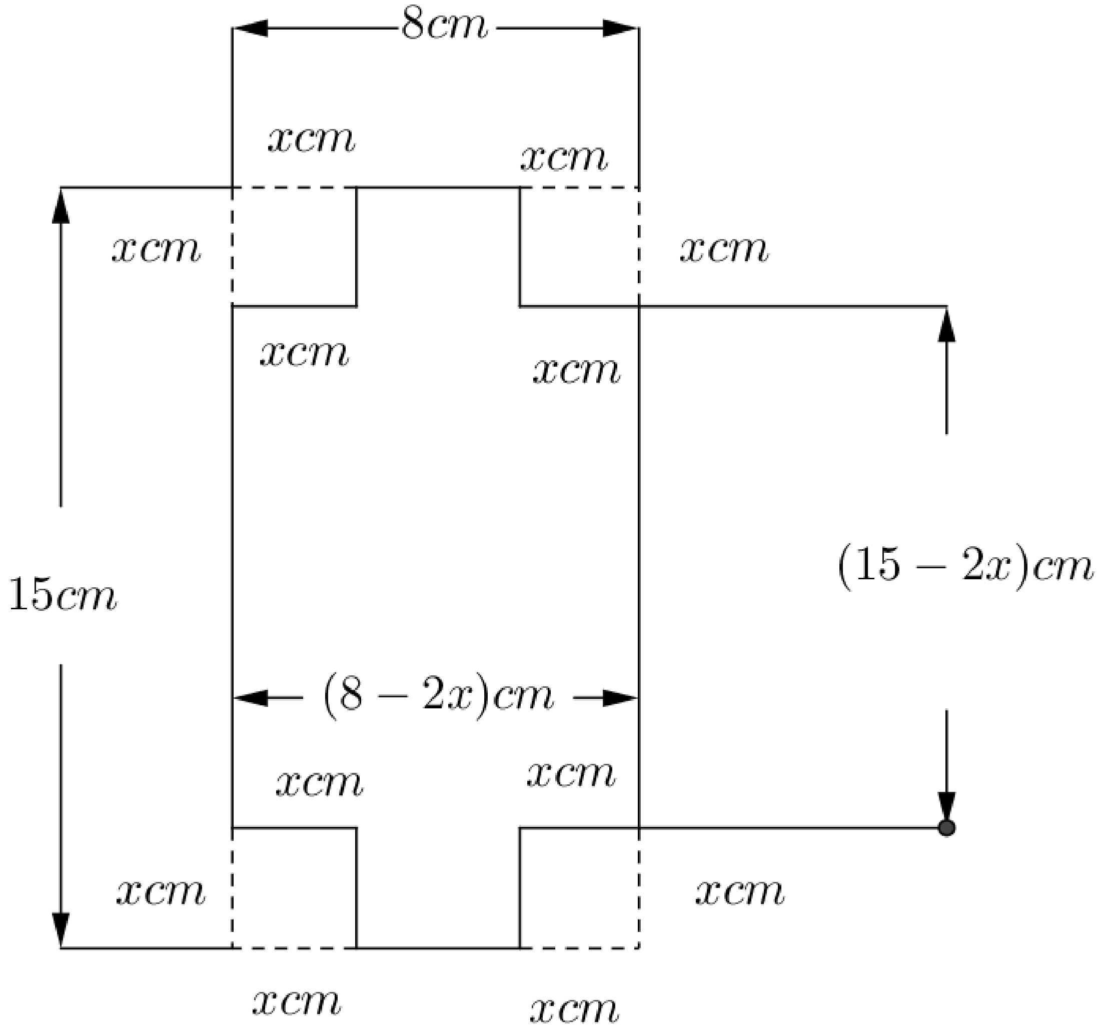
max

Επειδή:
- I) f΄(9)=0
- II) f΄(x) > 0 για κάθε xє(0,9)
- III)f΄(x) < 0 για κάθε xє(9, 13)

Η συνάρτηση f έχει μέγιστο στη θέση $x_o = 9$
$y_o = 13 – x_o = 13– 9 = 4$
6.

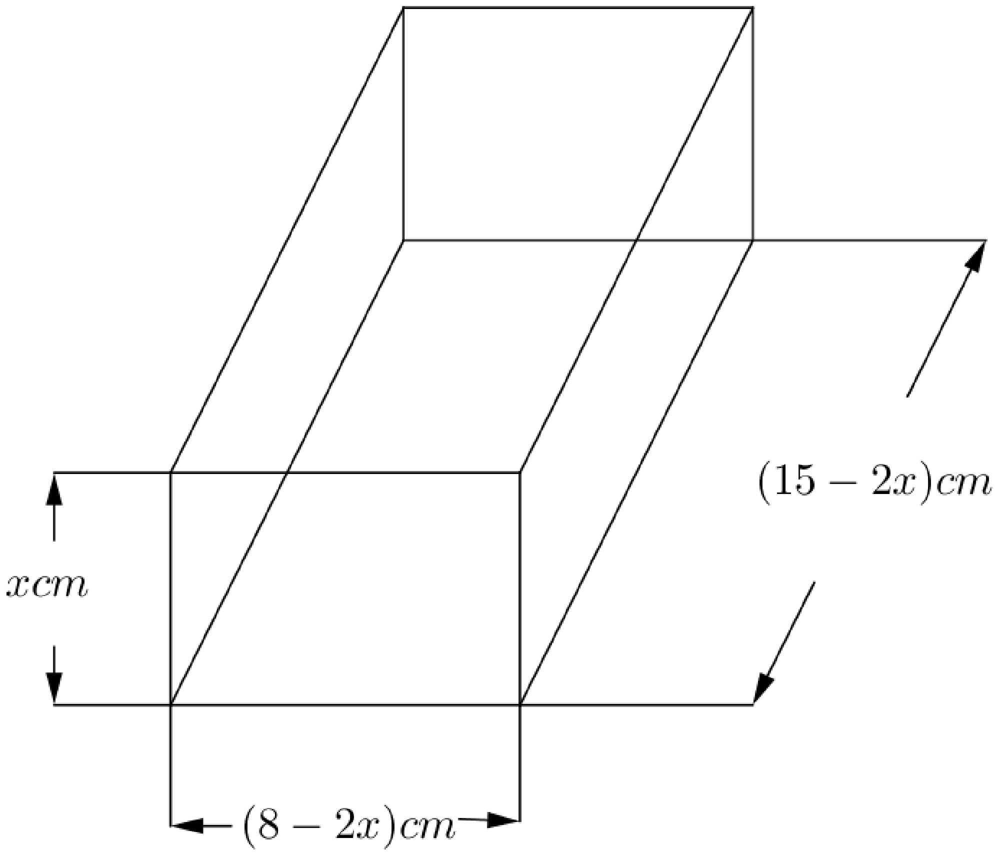
Από ένα χαρτόνι μήκους 8cm και πλάτους 15cm θέλουμε να κατασκευάσουμε κουτί ανοιχτό από πάνω, κόβοντας τέσσερα ίσα τετράγωνα, με πλευρά xcm, από κάθε γωνία του και διπλώνοντας μετά τις πλευρές που προεξέχουν.
(I)Να εκφράσετε τον όγκο V του κουτιού που σχηματίστηκε ως συνάρτηση του x
(II)Να βρείτε ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις του κουτιού, ώστε να έχει τον μέγιστο όγκο του, καθώς και να υπολογίσετε τον όγκο του





Κόβοντας τέσσερα ίσα τετράγωνα, με πλευρά $x\,cm$, από κάθε γωνία του και διπλώνοντας μετά τις πλευρές που προεξέχουν θα κατασκευάσω ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με μήκος $(8-2x)\,cm$ πλάτος $(15-2x)\,cm$ και ύψος $x\,cm$ (Απλά το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο θα είναι ανοιχτό απο πάνω). Θα πρέπει να ισχύει:

$$\begin{cases} 8-2x>0 \\ 15-2x>0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x>-8 \\ -2x>-15 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-2x}{-2}<\dfrac{-8}{-2} \\ \dfrac{-2x}{-2}<\dfrac{-15}{-2} \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<4 \\ x<7,5 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<x<4$$



Ο *όγκος του ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου θα είναι* :

$V = a \bullet \beta \bullet \gamma = (8-2x)(15-2x)x, 0<x<4$

Θ*εωρώ την συνάρτηση* :

$f(x) = (8-2x)(15-2x)x, 0<x<4$

Έχω : $f(x) = (8-2x)(15x-2x^2)$

$f'(x) = (8-2x)'(15x-2x^2) + (8-2x)(15x-2x^2)' =$

$-2(15x-2x^2) + (8-2x)(15-4x) =$

$= -2 \bullet 15x - 2(-2x^2) + 8 \bullet 15 + 8(-4x) - 2x \bullet 15 - 2x(-4x) =$

$= -30x + 4x^2 + 120 - 32x - 30x + 8x^2 =$

$= 12x^2 - 92x + 120 = 4(2x^2 - 23x + 30)$

Θ*εωρώ την δευτεροβάθμια εξίσωση* : $2x^2 - 23x + 30 = 0 \,(1)$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-23)^2 - 4 \bullet 2 \bullet 30 = 529 - 240 = 289 = 17^2 > 0$

Ε*πειδή* $\Delta > 0$ *η δευτεροβάθμια εξίσωση* (1) *έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες* :

$$\rho_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-23)\pm\sqrt{289}}{2\bullet 2}=\frac{23\pm17}{4}=\begin{cases}\nearrow\frac{23+17}{4}=\frac{40}{4}=10\\ \searrow\frac{23-17}{4}=\frac{6:2}{4:2}=\frac{3}{2}\end{cases}$$

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{2}$		4		10		$+\infty$
f'		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f			‖	$\nearrow$		$\searrow$	‖				

$$\acute{E}\chi\omega:\begin{Bmatrix}(\mathrm{I})\ f'\left(\frac{3}{2}\right)=0\\ (\mathrm{II})\ f'(x)>0, x\in\left(0,\frac{3}{2}\right)\\ (\mathrm{III})\ f'(x)<0, x\in\left(\frac{3}{2},4\right)\end{Bmatrix}$$

Άρα η συνάρτηση f έχει μέγιστη τιμή στην θέση $x_0=\frac{3}{2}$ τον αριθμό:

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=\left(8-2\frac{3}{2}\right)\left(15-2\frac{3}{2}\right)\frac{3}{2}=5\bullet 12\bullet\frac{3}{2}=5\bullet 6\bullet 3=90cm^3$$

Τότε *θα έχω μήκος* $5cm$, *πλάτος* $12cm$ *και ύψος* $\frac{3}{2}=1,5cm$

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

1.

Από ένα τετράγωνο φύλλο λαμαρίνας με περίμετρο $48cm$ θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα κουτί ανοιχτό προς τα πάνω, κόβοντας τέσσερα ίσα τετράγωνα πλευράς xcm, απο τις γωνίες του και διπλώνοντας τις πλευρές που προεξέχουν.   (I) *Να εκφράσετε τον όγκο V του που σχηματίσαμε ως συνάρτηση του x*   (II) *Να βρείτε πόση πρέπει να είναι η πλευρά του τετραγώνου x που αποκόβουμε, ώστε το κουτί να έχει μέγιστο όγκο*

2.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}, x\geq 0$ και το σημείο $\mathrm{A}\left(\frac{3}{2},0\right)$. Να βρεθεί το σημείο Μ της γραφικής παράστασης της f που απέχει απο το Α την μικρότερη δυνατή απόσταση