ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

1.

Δίνεται το δείγμα των παρατηρήσεων :

$2, 2, 1, 4, 3, 5, 4, 3$

α. Να βρείτε την μέση τιμή, τη διάμεσο, τη διακύμανση και το εύρος του δείγματος

β. Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση :

$$f\left(x\right)=-\bar{x}\frac{x^3}{3}+s^2x^2+\delta$$

όπου $\bar{x}, s^2, \delta$ η μέση τιμή η διακύμανση και η διάμεσος αντίστοιχα του αρχικού δείγματος.

i. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τα ακρότατα και την μονοτονία

ii. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to R}\dfrac{2f\left(x\right)+f'\left(x\right)-6+29x}{4x-x^2}$

όπου R το εύρος του αρχικού δείγματος

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της συνάρτησης f στο σημείο $\left(0,\delta\right)$ όπου δ η διάμεσος του αρχικού δείγματος

α. Για να βρώ την διάμεσο του δείγματος $2,2,1,4,3,5,4,3$ θα διατάξω το δείγμα κατά αύξουσα σειρά δηλαδή απο την μικρότερη προς την μεγαλύτερη. Οπότε θα έχω :

$$\begin{array}{cccccccc} 1, & 2, & 2, & 3, & 3, & 4, & 4, & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 & t_6 & t_7 & t_8 \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\delta=\begin{cases}\dfrac{t_{\frac{\nu}{2}}+t_{\frac{\nu}{2}+1}}{2}, \nu=\text{Άρτιος}\\ t_{\frac{\nu+1}{2}}, \nu=\text{Άρτιος}\end{cases}\\ \delta=\text{Διάμεσος}, \nu=\text{Το πλήθος των στοιχείων του δείγματος}\end{array}}$$

$$\delta=\frac{t_{\frac{8}{2}}+t_{\frac{8}{2}+1}}{2}=\frac{t_4+t_5}{2}=\frac{3+3}{2}=\frac{6}{2}=3$$

$$R = t_{\max} - t_{\min} = 5 - 1 = 4$$

$$\bar{x} = \frac{\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \bullet\bullet\bullet + \nu_\kappa x_\kappa}{\nu} = \frac{1\bullet 1 + 2\bullet 2 + 2\bullet 3 + 2\bullet 4 + 1\bullet 5}{8} = \frac{1 + 4 + 6 + 8 + 5}{8} = \frac{24}{8} = 3$$

$$s^2 = \frac{\nu_1\left(x_1 - \bar{x}\right)^2 + \nu_2\left(x_2 - \bar{x}\right)^2 + \bullet\bullet\bullet + \nu_\kappa\left(x_\kappa - \bar{x}\right)^2}{8} =$$

$$\frac{1\bullet(1-3)^2 + 2\bullet(2-3)^2 + 2\bullet(3-3)^2 + 2\bullet(4-3)^2 + 1\bullet(5-3)^2}{8} =$$

$$= \frac{4+2+2+4}{8} = \frac{12:4}{8:4} = \frac{3}{2}$$

όπου $\bar{x}, s^2, \delta$ *η μέση τιμή η διακύμανση και η διάμεσος αντίστοιχα του αρχικού δείγματος.*

$$\beta)\ f\left(x\right) = -\bar{x}\frac{x^3}{3} + s^2x^2 + \delta = -3\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + 3 = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 3$$

$$i)\ f'\left(x\right) = \left(-x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 3\right)' = \left(-x^3\right)' + \frac{3}{2}\left(x^2\right)' + \left(3\right)' = -3x^2 + \frac{3}{2}2x = -3x^2 + 3x =$$

$$= -3x\left(x-1\right)$$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
			$\tau.\varepsilon$		$\tau.\mu$		

Επειδή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)$ η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0)$

Επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,1)$ η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1)$

Επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$

$$\text{Έχω}:\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\ f'(0)=0\\(\mathrm{II})\ f'(x)<0\ \text{για κάθε}\ x\in(-\infty,0)\\(\mathrm{III})\ f'(x)>0\ \text{για κάθε}\ x\in(0,1)\end{array}\right\}$$

Οπότε η συνάρτηση f έχει τοπικό ελάχιστο στην θέση $x_1=0$ τον αριθμό

$$f(x_1)=f(0)=-0^3+\frac{3}{2}\bullet 0^2+3=3$$

$$\text{Έχω}:\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\ f'(1)=0\\(\mathrm{II})\ f'(x)>0\ \text{για κάθε}\ x\in(0,1)\\(\mathrm{III})\ f'(x)<0\ \text{για κάθε}\ x\in(1,+\infty)\end{array}\right\}$$

Οπότε η συνάρτηση f έχει τοπικό μέγιστο στην θέση $x_2=1$ τον αριθμό

$$f(x_2)=f(1)=-1^3+\frac{3}{2}\bullet 1^2+3=2+\frac{3}{2}=\frac{4}{2}+\frac{3}{2}=\frac{7}{2}$$

$ii)$ Αν $x\neq 0,4$ θα έχω: $-x^3+\frac{3}{2}x^2+3$

$$\frac{2f(x)+f'(x)-6+29x}{4x-x^2}=\frac{2\left(-x^3+\frac{3}{2}x^2+3\right)-3x^2+3x-6+29x}{-4x(x-4)}=$$

$$=\frac{-2x^3+2\frac{3}{2}x^2+2\bullet 3-3x^2+3x-6+29x}{-4x(x-4)}=\frac{-2x^3+3x^2+6-3x^2+3x-6+29x}{-4x(x-4)}=$$

$$=\frac{-2x^3+32x}{-4x(x-4)}=\frac{-2\cancel{x}(x^2-16)}{-4\cancel{x}(x-4)}=\frac{x^2-4^2}{2(x-4)}=\frac{\cancel{(x-4)}(x+4)}{2\cancel{(x-4)}}=\frac{x+4}{2}$$

$$\lim_{x\to R}\frac{2f(x)+f'(x)-6+29x}{4x-x^2}=\lim_{x\to 4}\frac{x+4}{2}=\frac{4+4}{2}=\frac{8}{2}=4$$

(γ) *Έστω* (ε) *εφαπτομένη της* C_f *στο σημείο επαφής* $\mathrm{M}(0,\delta)$.Τότε *η ευθεία* (ε) *θα έχει την εξίσωση*

$(\varepsilon): y = \lambda_\varepsilon x + \kappa$

Ε*πειδή* (ε) *εφαπτομένη της* C_f *στο σημείο επαφής* $\mathrm{M}(0,3)$ *και η* f *είναι παραγωγίσιμη στην θέση* $x_0 = 0$ *θα έχω*:

$\lambda_\varepsilon = f'(0) = -3 \bullet 0^2 + 3 \bullet 0 = 0$

Τ*ότε η ευθεία* (ε) *θα έχει εξίσωση*:

$(\varepsilon): y = \kappa$

$\mathrm{M}(0,3) \in (\varepsilon) \Leftrightarrow y_{\mathrm{M}} = \kappa \Leftrightarrow \kappa = 3$

Ο*πότε* $(\varepsilon): y = 3$

2.

Δ*ίνεται η συνάρτηση* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-5x+6}{x-2}, x \neq 2 \\ 9\alpha - 2\beta, x = 3 \end{cases}$ *συνεχής στο* $x_0 = 3$

και ο πίνακας σχετικών συχνοτήτων

x_i	v_i	f_i	$f_i\%$
a	κa		
$2a$	$2a$	$a - \dfrac{\beta}{5}$	
$3a$	$\alpha + \beta$		
ΣΥΝΟΛΟ	10		

(I) Ν*α βρεθούν τα* α, β, κ

(II) Ν*α συμπληρωθεί ο στατιστικός πίνακας*

(III) Ν*α βρεθεί το ποσοστό των στοιχείων που είναι μικρότερο ή ίσο του* 2

(IV) Ν*α βρεθεί η διάμεσος*

$\Theta\varepsilon\omega\rho\acute{\omega}\ \tau\eta\nu\ \delta\varepsilon\upsilon\tau\varepsilon\rho\text{o}\beta\acute{\alpha}\theta\mu\iota\alpha\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta\ x^2-5x+6=0\left(1\right)$

$\Delta=\beta^2-4\bullet\alpha\bullet\gamma=\left(-5\right)^2-4\bullet1\bullet6=25-24=1>0$

Επειδή $\Delta>0$ η δευτεροβάθμια εξίσωση (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες :

$$\rho_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-\left(-5\right)\pm\sqrt{1}}{2\bullet1}=\frac{5\pm1}{2}=\begin{cases}\nearrow\frac{5+1}{2}=\frac{6}{2}=3\\ \searrow\frac{5-1}{2}=\frac{4}{2}=2\end{cases}$$

Οπότε : $x^2-5x+6=\alpha\left(x-\rho_1\right)\left(x-\rho_2\right)=\left(x-2\right)\left(x-3\right)$

Αν $x\neq3$ θα έχω :

$$f\left(x\right)=\frac{x^2-5x+6}{x-3}=\frac{\cancel{\left(x-3\right)}\left(x-2\right)}{\cancel{x-3}}=x-2$$

$$\lim_{x\to3}f\left(x\right)=\lim_{x\to3}\left(x-2\right)=3-2=1$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=3$ θα έχω :

$$\lim_{x\to3}f\left(x\right)=f\left(3\right)\Leftrightarrow9\alpha-2\beta=1$$

$$f_3=\frac{\nu_3}{\nu}\Leftrightarrow\frac{2\alpha}{10}=\alpha-\frac{\beta}{5}\Leftrightarrow\frac{\alpha}{5}=\alpha+\beta\Leftrightarrow\alpha=5\left(\alpha-\frac{\beta}{5}\right)\Leftrightarrow\alpha=5\alpha-5\frac{\beta}{5}\Leftrightarrow$$

$$\alpha=5\alpha-\beta\Leftrightarrow\beta=5\alpha-\alpha\Leftrightarrow\beta=4\alpha$$

$$9\alpha-2\beta=1\overset{\beta=4\alpha}{\Longleftrightarrow}\alpha+2\bullet4\alpha=1\Leftrightarrow9\alpha-8\alpha=1\Leftrightarrow\alpha=1$$

Έχω : $\beta=4\alpha=4\bullet1=4$

Έχω : $\nu_1+\nu_2+\nu_3=10\Leftrightarrow\kappa\alpha+2\alpha+\alpha+\beta=10\overset{\alpha=1,\beta=4}{\Longleftrightarrow}\kappa\bullet1+2\bullet1+1+4=10\Leftrightarrow$

$\kappa+7=10\Leftrightarrow\kappa=10-7\Leftrightarrow\kappa=3$

Οπότε : $\nu_1=\kappa\alpha=3\bullet1=3,\nu_2=2\alpha=2\bullet1=2,\nu_3=\alpha+\beta=1+4=5$

$$f_1=\frac{\nu_1}{\nu}=\frac{3}{10}=0,3,\ f_1\%=30\%$$

$$f_2=\frac{\nu_2}{\nu}=\frac{2}{10}=0,2,\ f_2\%=20\%$$

$$f_3=\frac{\nu_3}{\nu}=\frac{5}{10}=0,5,\ f_3\%=50\%$$

x_i	ν_i	f_i	$f_i\%$
1	3	0,3	30%
2	2	0,2	20%
3	5	0,5	50%
ΣΥΝΟΛΟ	10	1	100%

(III) Το *ποσοστό των στοιχείων που είναι μικρότερο ή ίσο του* 2 *είναι*:

$$\boxed{\begin{matrix}\text{Το ποσοστό των στοιχείων} \\ \text{είναι ίσα με το } 1\end{matrix}} + \boxed{\begin{matrix}\text{Το ποσοστό των στοιχείων} \\ \text{είναι ίσα με το } 2\end{matrix}} =$$

$= f_1\% + f_2\% = 30\% + 20\% = 50\%$

(IV) Ε*πειδή το ποσοστό των στοιχείων που είναι μικρότερα ή ίσα* 2 *είναι* 50% *έπεται οτι το* 2 *χωρίζει τον πληθυσμό σε δυο ίσα μέρη.Συνεπώς το* 2 *είναι η διάμεσος*

3.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -2x^3 + 9x^2 - 12x + 1, x \in \mathbb{R}$

*α.*Ν*α βρεθούν οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων της* f

*β.*Ν*α συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα κατανομής συχνοτήτων και αθροιστικών ενός δείγματος μεγέθους* ν

ΚΛΑΣΕΙΣ	x_i	ν_i	f_i	N_i	F_i
$[4,8)$		a			
$[\ \ )$			0,2	β	
$[\ \ )$					0,725
$[\ \ )$					
ΣΥΝΟΛΟ	–			–	–

όπου α η θέση τοπικού μεγίστου της συνάρτησης f *και*

$$\beta = 3 + \lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f'(x) + 2x^3 - 13}{x^2 - 2x}$$

$a.\ f\left(x\right)=-2x^3+9x^2-12x+1, x\in\mathbb{R}$

$f'\left(x\right)=\left(-2x^3+9x^2-12x+1\right)'=-2\left(x^3\right)'+9\left(x^2\right)'-12\left(x\right)'+\left(1\right)'=$

$-2\bullet 3x^2+9\bullet 2x-12=-6x^2+18x-12=-6\left(x^2-3x+2\right)$

$\Theta\varepsilon\omega\rho\acute{\omega}\ \tau\eta\nu\ \delta\varepsilon\upsilon\tau\varepsilon\rho o\beta\acute{\alpha}\theta\mu\iota\alpha\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta: x^2-3x+2=0\left(1\right)$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=\left(-3\right)^2-4\bullet 1\bullet 2=9-8=1>0$

Επειδή $\Delta>0$ η δευτεροβάθμια εξίσωση $\left(1\right)$ έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες :

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-\left(-3\right)\pm\sqrt{1}}{2\bullet 1}=\frac{3\pm 1}{2}=\begin{matrix}\nearrow \frac{3+1}{2}=\frac{4}{2}=2\\ \searrow \frac{3-1}{2}=\frac{2}{2}=1\end{matrix}$$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

$\tau.\varepsilon$ $\qquad\qquad$ $\tau.\mu$

$$\acute{E}\chi\omega:\left\{\begin{matrix}\left(\mathrm{I}\right)\ f'\left(1\right)=0\\ \left(\mathrm{II}\right)\ f'\left(x\right)<0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in\left(-\infty,1\right)\\ \left(\mathrm{III}\right)\ f'\left(x\right)>0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in\left(1,2\right)\end{matrix}\right\}$$

Οπότε η συνάρτηση f έχει τοπικό ελάχιστο στην θέση $x_1=1$

$$\acute{E}\chi\omega:\left\{\begin{matrix}\left(\mathrm{I}\right)\ f'\left(2\right)=0\\ \left(\mathrm{II}\right)\ f'\left(x\right)>0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in\left(1,2\right)\\ \left(\mathrm{III}\right)\ f'\left(x\right)<0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in\left(2,+\infty\right)\end{matrix}\right\}$$

Οπότε η συνάρτηση f έχει τοπικό μέγιστο στην θέση $x_2=2$

β. Επειδή *α* η θέση τοπικού μεγίστου της συνάρτησης f θα έχω $\alpha = 2$

Αν $x \neq 0, 2$ θα έχω:

$$\frac{f(x) - f'(x) + 2x^3 - 13}{x^2 - 2x} = \frac{-2x^3 + 9x^2 - 12x + 1 - \left(-6x^2 + 18x - 12\right) + 2x^3 - 13}{x(x-2)} =$$

$$\frac{-2x^3 + 9x^2 - 12x + 1 + 6x^2 - 18x + 12 + 2x^3 - 13}{x(x-2)} = \frac{15x^2 - 30x}{x(x-2)} = \frac{15\cancel{x(x-2)}}{\cancel{x(x-2)}} = 15$$

Οπότε: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x) - f'(x) + 2x^3 - 13}{x^2 - 2x} = 15$

Έχω: $\beta = 3 + \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x) - f'(x) + 2x^3 - 13}{x^2 - 2x} = 3 + 15 = 18$

Συνεπώς θα έχω τον πίνακα:

ΚΛΑΣΕΙΣ	x_i	ν_i	f_i	N_i	F_i
$[4,8)$		2			
$[\ \ )$			0,2	18	
$[\ \ )$					0,725
$[\ \ )$					
ΣΥΝΟΛΟ	$-$			$-$	$-$

Έχω: $N_1 = \nu_1 = 2$

$N_2 = N_1 + \nu_2 \Leftrightarrow 2 + \nu_2 = 18 \Leftrightarrow \nu_2 = 18 - 2 \Leftrightarrow \nu_2 = 16$

$$f_2 = \frac{\nu_2}{\nu} \Leftrightarrow 0,2 = \frac{16}{\nu} \Leftrightarrow 0,2\nu = 16 \Leftrightarrow \nu = \frac{16}{0,2} \Leftrightarrow \nu = \frac{16 \bullet 10}{0,2 \bullet 10} \Leftrightarrow \nu = \frac{160}{2} \Leftrightarrow \nu = 80$$

$$f_1 = \frac{\nu_1}{\nu} = \frac{2:2}{80:2} = \frac{1}{40} = \frac{1 \bullet 25}{40 \bullet 25} = \frac{25}{1000} = 0,025$$

$F_1 = f_1 = 0,025$

$F_2 = F_1 + f_2 = 0,025 + 0,2 = 0,225$

$F_3 = F_2 + f_3 \Leftrightarrow 0,225 + f_3 = 0,725 \Leftrightarrow f_3 = 0,725 - 0,225 \Leftrightarrow f_3 = 0,5$

$$f_3 = \frac{\nu_3}{\nu} \Leftrightarrow 0,5 = \frac{\nu_3}{80} \Leftrightarrow \nu_3 = 0,5 \bullet 80 \Leftrightarrow \nu_3 = 40$$

$N_3 = N_2 + \nu_3 = 18 + 40 = 58$

$N_4 = \nu = 80$

$N_4 = N_3 + \nu_4 \Leftrightarrow 58 + \nu_4 = 80 \Leftrightarrow \nu_4 = 80 - 58 \Leftrightarrow \nu_4 = 22$

$$f_4 = \frac{\nu_4}{\nu} = \frac{22}{80} = \frac{22:2}{80:2} = \frac{11 \bullet 25}{40 \bullet 25} = \frac{275}{1000} = 0,275$$

$F_4 = F_3 + f_4 = 0,725 + 0,275 = 1$

Ο*ι κλάσεις θα έχουν την μορφή*

$[\alpha, \alpha + c), [\alpha + c, \alpha + 2c), [\alpha + 2c, \alpha + 3c), [\alpha + 3c, \alpha + 4c)$

$$[\alpha, \alpha + c) = [4,8) \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} a = 4 \\ \alpha + c = 8 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} a = 4 \\ 4 + c = 8 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} a = 4 \\ c = 8 - 4 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} a = 4 \\ c = 4 \end{matrix}\right\}$$

Ο*πότε θα έχω τις κλάσεις* :

$[\alpha, \alpha + c) = [4,8)$

$[\alpha + c, \alpha + 2c) = [4 + 4, 8 + 4) = [8,12)$

$[\alpha + 2c, \alpha + 3c) = [8 + 4, 12 + 4) = [12,16)$

$[\alpha + 3c, \alpha + 4c) = [12 + 4, 16 + 4) = [16, 20)$

Τ*ο κέντρο της κλάσης* $[4,8)$ *θα είναι* $x_1 = \frac{4+8}{2} = \frac{12}{2} = 6$

Γ*ια τα υπόλοιπα κέντρα* x_2, x_3, x_4 *θα ισχύει* :

$x_2 = x_1 + c, x_3 = x_2 + c, x_4 = x_3 + c$

$x_2 = x_1 + c = 6 + 4 = 10$

$x_3 = x_2 + c = 10 + 4 = 14$

$x_4 = x_3 + c = 14 + 4 = 18$

Ο *πίνακας κατανομής συχνοτήτων και αθροιστικών συχνοτήτων συμπληρωμένος θα είναι* :

ΚΛΑΣΕΙΣ	x_i	ν_i	f_i	N_i	F_i
$[4,8)$	6	2	0,025	2	0,025
$[8,12)$	10	16	0,2	18	0,225
$[12,16)$	14	40	0,5	58	0,725
$[16,20)$	17	22	0,275	80	1
ΣΥΝΟΛΟ	–	80	1	–	–

4.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3-\beta x^2+1, x\in\mathbb{R}$ με $\mathrm{A}(2,5)\in C_f$ και η εφαπτομένη της C_f στο σημείο επαφής $\mathrm{M}(1,f(1))$ είναι παράλληλη με τον άξονα $x'x$

(Α) Να βρεθούν τα α,β

(Β) Για $\alpha=3, \beta=2$ να βρεθούν τα μ,ν όπου μ,ν είναι οι θέσεις τοπικών ακροτάτων της f με $\mu<\nu$

(Γ) Δίνεται το δείγμα Χ:

$$\lim_{x\to\nu}\frac{(\mu+\nu)x^2+(\mu-2\nu)x+1}{x^2-x}, \kappa, \lim_{x\to\mu}\frac{4\sqrt{\nu x+4}-\nu-7}{x^2+x}, \lim_{x\to\mu+\nu}\frac{(\mu+\nu)x^3-1}{x-\mu-\nu}$$

με $\bar{x}=4$

(Γ_1) Να βρεθεί το κ

(Γ_2) Να βρεθεί η διάμεσος του δείγματος

$(\mathrm{A})\ f(x)=\alpha x^3-\beta x^2+1$

$f'(x)=\left(\alpha x^3-\beta x^2+1\right)'=\alpha\left(x^3\right)'-\beta\left(x^2\right)'+(1)'=3\alpha x^2-2\beta x$

$\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \mathrm{A}(2,5)\in C_f\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$f(2)=5\Leftrightarrow \alpha\bullet 2^3-\beta\bullet 2^2+1=5\Leftrightarrow 8\alpha-4\beta=5-1\Leftrightarrow \cancel{4}\bullet(2\alpha-\beta)=\cancel{4}\bullet 1\Leftrightarrow$
$2\alpha-\beta=1(1)$

$\mathrm{A}\nu\ (\varepsilon)\ \eta\ \varepsilon\varphi\alpha\pi\tau o\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta\ \tau\eta\varsigma\ C_f\ \sigma\tau o\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\ \varepsilon\pi\alpha\varphi\acute{\eta}\varsigma\ \mathrm{M}(1,f(1))\ \mu\varepsilon\ (\varepsilon)//x'x$

$\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ (\varepsilon)\ \eta\ \varepsilon\varphi\alpha\pi\tau o\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta\ \tau\eta\varsigma\ C_f\ \sigma\tau o\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\ \varepsilon\pi\alpha\varphi\acute{\eta}\varsigma\ \mathrm{M}(1,f(1))\ \kappa\alpha\iota$
$\eta\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \pi\alpha\rho\alpha\gamma\omega\gamma\acute{\iota}\sigma\iota\mu\eta\ \sigma\tau o\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\ x_0=1\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$\lambda_\varepsilon=f'(x_0)=f'(1)=3\alpha\bullet 1^2-2\beta\bullet 1=3\alpha-2\beta$

$(\varepsilon)//(x'x)\Leftrightarrow \lambda_\varepsilon=\lambda_{x'x}\overset{\lambda_{x'x}=0}{\Longleftrightarrow}3\alpha-2\beta=0(2)$

$\mathrm{A}\pi o\ \tau\iota\varsigma\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\varepsilon\iota\varsigma\ (1),(2)\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ \tau o\ \sigma\acute{\upsilon}\sigma\tau\eta\mu\alpha:$

$$\left\{\begin{matrix}2\alpha-\beta=1\\3\alpha-2\beta=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}-2(2\alpha-\beta)=-2\bullet 1\\3\alpha-2\beta=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}-4\alpha+2\beta=-2\\3\alpha-2\beta=0\end{matrix}\right\}$$

$$\underline{\left\{\begin{matrix}-4\alpha+2\beta=-2\\3\alpha-2\beta=0\end{matrix}\right\}}(+)$$

$-4\alpha+2\beta+3\alpha-2\beta=-2+0\Leftrightarrow -\alpha=-2\Leftrightarrow \alpha=2$

$\Theta\acute{\varepsilon}\tau\omega\ \alpha=2\ \sigma\tau\eta\nu\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\eta(1):$

$2\alpha-\beta=1\overset{a=2}{\Longleftrightarrow}2\bullet 2-\beta=1\Leftrightarrow 4-\beta=1\Leftrightarrow -\beta=1-4\Leftrightarrow -\beta=-3\Leftrightarrow \beta=3$

$(\mathrm{B})\ \mathrm{A}\nu\ \alpha=2\ \kappa\alpha\iota\ \beta=3\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$f'(x)=3\alpha x^2-2\beta x=3\bullet 2x^2-2\bullet 3x=6x^2-6x=6x(x-1)$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
			$\tau.\varepsilon$		$\tau.\mu$		

$$\text{Έχω}:\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\ f'(0)=0\\ (\mathrm{II})\ f'(x)>0\ \textit{για κάθε}\ x\in(-\infty,0)\\ (\mathrm{III})\ f'(x)<0\ \textit{για κάθε}\ x\in(0,1)\end{array}\right\}$$

Οπότε η συνάρτηση f έχει τοπικό μέγιστο στην θέση $x_1=0$

$$\text{Έχω}:\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\ f'(1)=0\\ (\mathrm{II})\ f'(x)>0\ \textit{για κάθε}\ x\in(0,1)\\ (\mathrm{III})\ f'(x)<0\ \textit{για κάθε}\ x\in(1,+\infty)\end{array}\right\}$$

Οπότε η συνάρτηση f έχει τοπικό ελάχιστο στην θέση $x_2=1$

Επειδή μ,ν είναι οι θέσεις τοπικών ακροτάτων της f με $\mu<\nu$ θα έχω

$\mu=0$ και $\nu=1$

Αν $x\neq 0,1$ θα έχω:

$$\frac{(\mu+\nu)x^2+(\mu-2\nu)x+1}{x^2-x}=\frac{(0+1)x^2+(1-2\bullet1)x+1}{x^2-x}=\frac{x^2-2x+1}{x^2-x}=$$

$$\frac{\underbrace{x^2-2\bullet x\bullet1+1^2}_{a^2-2\bullet a\bullet\beta+\beta^2=(\alpha-\beta)^2}}{x(x-1)}=\frac{(x-1)^{\cancel{2}}}{x\cancel{(x-1)}}=\frac{x-1}{x}$$

$$\lim_{x\to\nu}\frac{(\mu+\nu)x^2+(\mu-2\nu)x+1}{x^2-x}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x}=\frac{1-1}{1}=0$$

Αν $x\in[-1,0)\cup(0,+\infty)$ θα έχω:

$$\frac{4\sqrt{\nu x+4}-\nu-7}{x^2+x}=\frac{4\sqrt{1\bullet x+4}-1-7}{x^2+x}=\frac{4\sqrt{x+4}-8}{x^2+x}=\frac{4\left(\sqrt{x+4}-2\right)}{x^2+x}$$

$$\frac{4\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{x(x+1)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}==\frac{4\left[\left(\sqrt{x+4}\right)^2-2^2\right]}{x(x+1)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\frac{4(x+4-4)}{x(x+1)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}$$

$$=\frac{4\cancel{x}}{\cancel{x}(x+1)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\frac{4}{(x+1)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}$$

$$\lim_{x\to\mu}\frac{4\sqrt{\nu x+4}-\nu-7}{x^2+x}=\lim_{x\to0}\frac{4}{(x+1)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\frac{4}{(0+1)\left(\sqrt{0+4}+2\right)}=\frac{4}{4}=1$$

$\text{Αν } x \neq 1 \,\theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\frac{(\mu+\nu)x^3-1}{x-\mu-\nu}=\frac{(0+1)x^3-1}{x-0-1}=\frac{x^3-1^3}{x-1}\overset{\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}{=}\frac{\cancel{(x-1)}\left(x^2+x\bullet1+1^2\right)}{\cancel{x-1}}=$$

$$=x^2+x+1$$

$$\lim_{x\to\mu+\nu}\frac{(\mu+\nu)x^3-1}{x-\mu-\nu}=\lim_{x\to1}\left(x^2+x+1\right)=1^2+1+1=3$$

$\Gamma\iota\alpha\ \tau o\ \delta\varepsilon\acute{\iota}\gamma\mu\alpha\ 0,1,\kappa,3\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ \bar{x}=4:$

$$\bar{x}=\frac{t_1+t_2+t_3+t_4}{4}\Leftrightarrow 4=\frac{0+1+3+\kappa}{4}\Leftrightarrow \kappa+4=16\Leftrightarrow \kappa=16-4\Leftrightarrow \kappa=12$$

Για να βρώ την διάμεσο του δείγματος θα διατάξω το $0,1,\kappa,3$ *δείγμα κατα αύξουσα σειρά δηλ. απο την μικρότερη προς την μεγαλύτερη.* Ο*πότε θα έχω*:

$$\underset{t_1}{\underset{\downarrow}{0}},\underset{t_2}{\underset{\downarrow}{1}},\underset{t_3}{\underset{\downarrow}{3}},\underset{t_4}{\underset{\downarrow}{12}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\delta=\begin{cases}\dfrac{t_{\frac{\nu}{2}}+t_{\frac{\nu}{2}+1}}{2},\nu=\text{Άρτιος}\\[2ex] t_{\frac{\nu+1}{2}},\nu=\text{Άρτιος}\end{cases}\\ \delta=\Delta\iota\acute{\alpha}\mu\varepsilon\sigma o\varsigma\ ,\nu=\text{Το πλήθος των στοιχείων του δείγματος}\end{array}}$$

$$\delta=\frac{t_{\frac{4}{2}}+t_{\frac{4}{2}+1}}{2}=\frac{t_2+t_3}{2}=\frac{1+3}{2}=\frac{4}{2}=2$$

5.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\sqrt{\ln x}-1}{\ln^2 x-1}$ και ο δειγματοχώρος Ω ενός πειράματος τύχης που αποτελείται απο ισοπιθανά απλά ενδεχόμενα
Έστω A,B δυο ενδεχόμενα του Ω τέτοια ώστε:

$\mathrm{P}(\mathrm{A}')=\lim\limits_{x\to e} f(x), \mathrm{P}(\mathrm{A}-\mathrm{B})=f(e^4)$ και $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=\dfrac{5}{6}$

i.Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

ii.Να υπολογίσετε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

A: πραγματοποιείται το A

B: πραγματοποιείται το B

Γ: πραγματοποιείται το A και το B

Δ: πραγματοποιείται μόνο το B

E: δεν πραγματοποιείται κανένα απο τα A και B

$i.\ f(x)=\dfrac{\sqrt{\ln x}-1}{\ln^2 x-1}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}: x>0, \ln x\geq 0, \ln^2 x-1\neq 0\}$

Θεωρώ την εξίσωση:

$$\begin{Bmatrix} x>0 \\ \ln^2 x-1=0\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix} x>0 \\ \ln^2 x=1\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\left\{\begin{pmatrix} x>0 \\ \ln x=1\end{pmatrix}\acute{\eta}\begin{pmatrix} x>0 \\ \ln x=-1\end{pmatrix}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{pmatrix} x>0 \\ \ln x=\ln e\end{pmatrix}\acute{\eta}\begin{pmatrix} x>0 \\ \ln x=-\ln e\end{pmatrix}\right\}\overset{\substack{k\ln\theta=\ln\theta^k,\theta>0 \\ \ln e=1}}{\Leftrightarrow}\left\{\begin{pmatrix} x>0 \\ x=e\end{pmatrix}\acute{\eta}\begin{pmatrix} x>0 \\ \ln x=\ln e^{-1}\end{pmatrix}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left\{(x=e)\acute{\eta}\begin{pmatrix} x>0 \\ x=\dfrac{1}{e}\end{pmatrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{(x=e)\acute{\eta}\left(x=\dfrac{1}{e}\right)\right\}$$

$$x\in D_f\Leftrightarrow\begin{Bmatrix} x>0 \\ \ln x\geq\ln 1 \\ x\neq\dfrac{1}{e},e\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix} x>0 \\ x\geq 1 \\ x\neq\dfrac{1}{e},e\end{Bmatrix}\Leftrightarrow x\in[1,e)\cup(e,+\infty)$$

Οπότε: $D_f=[1,e)\cup(e,+\infty)$

Αν $x \in [1,e) \cup (e,+\infty)$ θα έχω:

$$f(x) = \frac{\sqrt{\ln x} - 1}{\ln^2 x - 1} = \frac{\left(\sqrt{\ln x} - 1\right)\left(\sqrt{\ln x} + 1\right)}{\left(\ln^2 x - 1^2\right)\left(\sqrt{\ln x} + 1\right)} = \frac{\left(\sqrt{\ln x}\right)^2 - 1^2}{(\ln x - 1)(\ln x + 1)\left(\sqrt{\ln x} + 1\right)} =$$

$$= \frac{\cancel{\ln x - 1}}{\cancel{(\ln x - 1)}\,(\ln x + 1)\left(\sqrt{\ln x} + 1\right)} = \frac{1}{(\ln x + 1)\left(\sqrt{\ln x} + 1\right)}$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}') = \lim_{x \to e} f(x) = \frac{1}{(\ln e + 1)\left(\sqrt{\ln e} + 1\right)} \overset{\ln e = 1}{=} \frac{1}{(1+1)\left(\sqrt{1} + 1\right)} = \frac{1}{4}$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{A}') = 1 - \frac{1}{4} = \frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{A} - \mathrm{B}) = f\left(e^4\right) \overset{f(x) = \frac{1}{(\ln e + 1)\left(\sqrt{\ln e} + 1\right)},\, x \in [1,e) \cup (e,+\infty)}{=} \frac{1}{\left(\ln e^4 + 1\right)\left(\sqrt{\ln e^4} + 1\right)} \overset{\substack{k \ln \theta = \ln \theta^k,\, \theta > 0 \\ \ln e = 1}}{=}$$

$$\frac{1}{(4 \cdot \ln e + 1)\left(\sqrt{4 \cdot \ln e} + 1\right)} = \frac{1}{(4+1)\left(\sqrt{4} + 1\right)} = \frac{1}{5 \cdot 3} = \frac{1}{15}$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{A} - \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) - \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \Leftrightarrow \frac{1}{15} = \frac{3}{4} - \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \Leftrightarrow \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{3}{4} - \frac{1}{15} \Leftrightarrow$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{3 \cdot 15}{4 \cdot 15} - \frac{1 \cdot 4}{15 \cdot 4} \Leftrightarrow \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{45}{60} - \frac{4}{60} \Leftrightarrow \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{41}{60}$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\mathrm{B}) - \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \Leftrightarrow \frac{5}{6} = \frac{3}{4} + \mathrm{P}(\mathrm{B}) - \frac{41}{60} \Leftrightarrow$$

$$\frac{5}{6} = \frac{3 \cdot 15}{4 \cdot 15} + \mathrm{P}(\mathrm{B}) - \frac{41}{60} \Leftrightarrow \frac{5}{6} = \frac{45}{60} + \mathrm{P}(\mathrm{B}) - \frac{41}{60} \Leftrightarrow \frac{5}{6} = \frac{4}{60} + \mathrm{P}(\mathrm{B}) \Leftrightarrow$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}) = \frac{5 \cdot 10}{6 \cdot 10} - \frac{4}{60} \Leftrightarrow \mathrm{P}(\mathrm{B}) = \frac{50}{60} - \frac{4}{60} \Leftrightarrow \mathrm{P}(\mathrm{B}) = \frac{46:2}{60:2} \Leftrightarrow \mathrm{P}(\mathrm{B}) = \frac{23}{30}$$

$$\Gamma = \mathrm{A} \cap \mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{P}(\Gamma) = \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{41}{60}$$

$$\Delta = \mathrm{B} - \mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{P}(\Delta) = \mathrm{P}(\mathrm{B} - \mathrm{A}) = \mathrm{P}(\mathrm{B}) - \mathrm{P}(\mathrm{B} \cap \mathrm{A}) = \frac{23}{30} - \frac{41}{60} = \frac{23 \cdot 2}{30 \cdot 2} - \frac{41}{60} =$$

$$= \frac{46}{60} - \frac{41}{60} = \frac{5:5}{60:5} = \frac{1}{12}$$

$$\mathrm{E} = \mathrm{A}' \cap \mathrm{B}' = (\mathrm{A} \cup \mathrm{B})' \Rightarrow \mathrm{P}(\mathrm{E}) = \mathrm{P}\left[(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})'\right] = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \frac{6}{6} - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

6.

Έστω A,B *ενδεχόμενα ενός δειγματοχώρου* Ω *με* $\mathrm{P}(\mathrm{B})=0,7$ *και η συνάρτηση* f *με*

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-\mathrm{P}(\mathrm{A}')x-\mathrm{P}(\mathrm{A})}{\sqrt{x}-1}, & 0\le x<1\\[2mm] \dfrac{16}{5}, & x=1\end{cases}$$

*i.*Ν*α βρείτε το όριο* $\lim\limits_{x\to1}f(x)$

*ii.*Α*ν η* f *είναι συνεχής στο* $x_0=1$ *να δείξετε οτι* $\mathrm{P}(\mathrm{A})=0,6$

*iii.*Ν*α αποδείξετε οτι*: $0,3\le \mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})\le 1$

*i.*Α*ν* $0\le x<1$ *θα έχω*:

$$f(x)=\frac{x^2-\mathrm{P}(\mathrm{A}')x-\mathrm{P}(\mathrm{A})}{\sqrt{x}-1}\overset{\mathrm{P}(\mathrm{A}')=1-\mathrm{P}(\mathrm{A})}{=}\frac{\left[x^2-(1-\mathrm{P}(\mathrm{A}))x-\mathrm{P}(\mathrm{A})\right](\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=$$

$$=\frac{\left[x^2-x+\mathrm{P}(\mathrm{A})x-\mathrm{P}(\mathrm{A})\right](\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x})^2-1^2}=\frac{\left[x(x-1)+\mathrm{P}(\mathrm{A})(x-1)\right](\sqrt{x}+1)}{x-1}=$$

$$=\frac{\cancel{(x-1)}\left[x+\mathrm{P}(\mathrm{A})\right](\sqrt{x}+1)}{\cancel{x-1}}=\left[x+\mathrm{P}(\mathrm{A})\right](\sqrt{x}+1)$$

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\left[x+\mathrm{P}(\mathrm{A})\right](\sqrt{x}+1)=\left[1+\mathrm{P}(\mathrm{A})\right](\sqrt{1}+1)=2(1+\mathrm{P}(\mathrm{A}))$$

*ii.*Ε*πειδή συνάρτηση* f *είναι συνεχής στο* $x_0=1$ *θα ισχύει*:

$$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)\Leftrightarrow 2(1+\mathrm{P}(\mathrm{A}))=\frac{16}{5}\Leftrightarrow \cancel{2}(1+\mathrm{P}(\mathrm{A}))=\cancel{2}\bullet\frac{8}{5}\Leftrightarrow$$

$$1+\mathrm{P}(\mathrm{A})=\frac{8}{5}\Leftrightarrow \mathrm{P}(\mathrm{A})=\frac{8}{5}-\frac{5}{5}\Leftrightarrow \mathrm{P}(\mathrm{A})=\frac{3}{5}\Leftrightarrow \mathrm{P}(\mathrm{A})=0,6$$

$i.$ Αν $0 \le x < 1$ *θα έχω*:

$$iii.\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\mathrm{B}) - \mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) \overset{\substack{\mathrm{P}(\mathrm{A})=0,6\\ \mathrm{P}(\mathrm{B})=0,7}}{\Longleftrightarrow} \mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}) = 0,6 + 0,7 - \mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) \Leftrightarrow$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) = 1,3 - \mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) \le 1 \Leftrightarrow 1,3 - \mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}) \le 1 \Leftrightarrow -\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}) \le 1 - 1,3 \Leftrightarrow -\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}) \le -0,3$$

Όταν διαιρώ και τα δυο μέλη μιας ανίσωσης με αρνητικό αριθμό προκύπτει ετερόστροφη ανίσωση

$$\Longleftrightarrow \frac{-\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})}{-1} \ge \frac{-0,3}{-1} \Leftrightarrow 0,3 \le \mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})\,(1)$$

Έχω: $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}) \le 1\,(2)$

Απο *τις σχέσεις* $(1),(2)$ *θα έχω*: $0,3 \le \mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}) \le 1$

7.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4x^2 - 9x + 2}{x - 2}(1 - 3\alpha)^2, & x \ne 2 \\ -7(2\beta - 1)^2, & x = 2 \end{cases}$

$i.$ Ν*α υπολογίσετε τις τιμές* α, β *ώστε η* f *να είναι συνεχής στο* $x_0 = 2$

$ii.$ *Έστω* $\alpha = \mathrm{P}(\mathrm{A})$ *και* $\beta = \mathrm{P}(\mathrm{B})$ *οι πιθανότητες των ενδεχομένων* Α, Β *ενός δειγματικού χώρου* Ω *και* $\mathrm{P}(\mathrm{A} - \mathrm{B}) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\eta\mu x + 6\sigma\upsilon\nu x}{6\eta\mu x}$, *τότε να υπολογίσετε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων*

Γ: *πραγματιποιείται μόνο το* Α

Δ: *πραγματοποιείται μόνο το* Β

Ε: *πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον απο τα* Α, Β

Ζ: Δ*εν πραγματοποιείται κανένα απο τα* Α, Β

$i.$ Θ*εωρώ την δευτεροβάθμια εξίσωση*: $4x^2 - 9x + 2 = 0\,(1)$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-9)^2 - 4 \bullet 4 \bullet 2 = 81 - 32 = 49 > 0$$

Ε*πειδή* $\Delta > 0$ *η δευτεροβάθμια εξίσωση* (1) *έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες*:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-9) \pm \sqrt{49}}{2 \bullet 4} = \frac{9 \pm 7}{8} = \begin{cases} \nearrow \frac{9+7}{8} = \frac{16}{8} = 2 \\ \searrow \frac{9-7}{8} = \frac{2:2}{8:2} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$4x^2-9x+2=\alpha\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)=4\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-2\right)=\left(4x-4\frac{1}{4}\right)\left(x-2\right)=$$

$$=\left(4x-1\right)\left(x-2\right)$$

$\text{Αν } x\neq 2 \text{ θα έχω}:$

$$f\left(x\right)=\frac{4x^2-9x+2}{x-2}\left(1-3\alpha\right)^2=\frac{\left(4x-1\right)\cancel{\left(x-2\right)}}{\cancel{x-2}}\left(1-3\alpha\right)^2=\left(4x-1\right)\left(1-3\alpha\right)^2$$

$$\lim_{x\to 2} f\left(x\right)=\lim_{x\to 2}\left(4x-1\right)\left(1-3\alpha\right)^2=\left(4\bullet 2-1\right)\left(1-3\alpha\right)^2=5\left(1-3\alpha\right)^2$$

$\text{Επειδή η } f \text{ να είναι συνεχής στο } x_0=2 \text{ θα έχω}:$

$$\lim_{x\to 2} f\left(x\right)=f\left(2\right)\Leftrightarrow 5\left(1-3\alpha\right)^2=-7\left(2\beta-1\right)^2\Leftrightarrow 5\left(1-3\alpha\right)^2+7\left(2\beta-1\right)^2=0$$

$$\overset{\kappa\alpha^2+\lambda\beta^2=0\Leftrightarrow\alpha=\beta=0,\kappa,\lambda>0}{\Longleftrightarrow}\begin{Bmatrix}1-3\alpha=0\\2\beta-1=0\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}3\alpha=1\\2\beta=1\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}\alpha=\dfrac{1}{3}\\\beta=\dfrac{1}{2}\end{Bmatrix}$$

$ii.\text{Έχω}:\mathrm{P}\left(\mathrm{A}\right)=\alpha=\dfrac{1}{3},\mathrm{P}\left(\mathrm{B}\right)=\dfrac{1}{2}$

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{A}-\mathrm{B}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\eta\mu x+6\sigma\upsilon\nu x}{6\eta\mu x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\eta\mu x}{6\eta\mu x}+6\frac{\sigma\upsilon\nu x}{6\eta\mu x}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{6}+6\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}\right)=$$

$$\frac{1}{6}+6\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}}{\eta\mu\frac{\pi}{2}}\overset{\substack{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}=0\\ \eta\mu\frac{\pi}{2}=1}}{=}\frac{1}{6}+6\frac{0}{1}=\frac{1}{6}$$

$$\Gamma=\mathrm{A}-\mathrm{B}\Rightarrow\mathrm{P}\left(\Gamma\right)=\mathrm{P}\left(\mathrm{A}-\mathrm{B}\right)=\frac{1}{6}$$

$$\Delta=\mathrm{B}-\mathrm{A}=\Gamma'\Rightarrow\mathrm{P}\left(\Delta\right)=\mathrm{P}\left(\Gamma'\right)=1-\mathrm{P}\left(\Gamma\right)=1-\frac{1}{6}=\frac{6}{6}-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{A}-\mathrm{B}\right)=\mathrm{P}\left(\mathrm{A}\right)-\mathrm{P}\left(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\right)\Leftrightarrow\frac{1}{6}=\frac{1}{3}-\mathrm{P}\left(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\right)\Leftrightarrow\mathrm{P}\left(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\right)=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\Leftrightarrow$$

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\right)=\frac{1\bullet 2}{3\bullet 2}-\frac{1}{6}\Leftrightarrow\mathrm{P}\left(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\right)=\frac{2}{6}-\frac{1}{6}\Leftrightarrow\mathrm{P}\left(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\right)=\frac{1}{6}$$

$$\mathrm{E}=\mathrm{A}\cup\mathrm{B}\Rightarrow\mathrm{P}\left(\mathrm{E}\right)=\mathrm{P}\left(\mathrm{A}\right)+\mathrm{P}\left(\mathrm{B}\right)-\mathrm{P}\left(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\right)=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{2}{6}+\frac{3}{2}-\frac{1}{6}=\frac{4:2}{6:2}=\frac{2}{3}$$

$$\mathrm{Z}=\mathrm{A}'\cap\mathrm{B}'=\left(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}\right)'\Rightarrow\mathrm{P}\left(\mathrm{Z}\right)=\mathrm{P}\left[\left(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}\right)'\right]=1-\mathrm{P}\left(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}\right)=1-\frac{2}{3}=\frac{3}{3}-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$