ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1.

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$f\left(x\right)=x-e^{-x}$

$\left(\mathrm{I}\right)$ Να αποδείξετε οτι η f είναι γνησίως αύξουσα

$\left(\mathrm{II}\right)$ Αν $\lambda\in\mathbb{R}$ να λυθεί η ανίσωση: $\lambda^2-2\lambda<e^{1-\lambda^2}-e^{1-2\lambda}$

$\left(\mathrm{I}\right)\ D_f=\mathbb{R}$

Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$:

$$x_1<x_2\Rightarrow\begin{Bmatrix}x_1<x_2\\-x_1>-x_2\end{Bmatrix}\overset{\substack{\text{Αν } \alpha\in(1,+\infty) \text{ ισχύει}\\ \text{η ισοδυναμία:}\\ x<y\Leftrightarrow a^x<a^y}}{\Longrightarrow}\begin{Bmatrix}x_1<x_2\\e^{-x_1}>e^{-x_2}\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}x_1<x_2\\-e^{-x_1}<-e^{-x_2}\end{Bmatrix}\overset{(+)}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow x_1-e^{-x_1}<x_2-e^{-x_2}\Rightarrow f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)$$

Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα

$$\left(\mathrm{II}\right)\lambda^2-2\lambda<e^{1-\lambda^2}-e^{1-2\lambda}\Leftrightarrow\lambda^2-e^{1-\lambda^2}<-e^{1-2\lambda}+2\lambda\overset{\substack{\text{Προσθέτω και στα δυο μέλη}\\ \text{το } -1 \text{ για να σχηματιστεί η}\\ \text{συνάρτηση } f(x)=x-e^{-x}}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\lambda^2-1-e^{-\left(\lambda^2-1\right)}<2\lambda-1-e^{-(2\lambda-1)}\Leftrightarrow f\left(\lambda^2-1\right)<f\left(2\lambda-1\right)\overset{f\uparrow}{\Longleftrightarrow}$$

$$\lambda^2-\cancel{1}<2\lambda-\cancel{1}\Leftrightarrow\lambda^2-2\lambda<0$$

Θεωρώ την εξίσωση: $\lambda^2-2\lambda=0$

$$\lambda^2-2\lambda=0\Leftrightarrow\lambda\left(\lambda-2\right)=0\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}\lambda=0\\ \text{ή}\\ \lambda-2=0\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}\lambda=0\\ \text{ή}\\ \lambda=2\end{Bmatrix}$$

λ	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$\lambda^2-2\lambda$		$+$	0	$-$	0	$-$	

$$\lambda^2-2\lambda<0\Leftrightarrow\lambda\in\left(0,2\right)$$

2.

$\acute{E}\sigma\tau\omega\ \delta\upsilon o\ \sigma\upsilon\nu\alpha\rho\tau\acute{\eta}\sigma\varepsilon\iota\varsigma\ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ \kappa\alpha\iota\ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ \tau\acute{\varepsilon}\tau o\iota\varepsilon\varsigma\ \acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon$

$f(2)=1, g(3)=2\ \kappa\alpha\iota\ g(x)=e^{x-2}-f(x)\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in\mathbb{R}$

Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη τότε:

(I) Να αποδείξετε οτι η f είναι γνησίως φθίνουσα

(II) Να αποδείξετε οτι η g είναι γνησίως αύξουσα

(III) Να λύσετε την ανίσωση: $e^{x-1}<f(x+1)$

(I) $g(3)=e^{3-2}-f(3)\Leftrightarrow e-f(3)=2\Leftrightarrow f(3)=e-2$

Επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη θα είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα. Έστω η f είναι γνησίως αύξουσα. Τότε θα έχω:

$$2<3\overset{f\uparrow}{\Longleftrightarrow}f(2)<f(3)\Leftrightarrow 1<e-2\Leftrightarrow e>3\ (\acute{A}\tau o\pi o)$$

Συνεπώς η f είναι γνησίως φθίνουσα.

(II) Αν $x_1<x_2$. Τότε θα έχω:

$$x_1<x_2\overset{f\downarrow}{\Longrightarrow}\begin{cases}f(x_1)>f(x_2)\\ x_1-2<x_2-2\end{cases}\overset{\substack{\text{Αν } \alpha\in(1,+\infty) \text{ ισχύει}\\ \text{η ισοδυναμία:}\\ x<y\Leftrightarrow a^x<a^y}}{\Longrightarrow}\begin{cases}-f(x_1)<-f(x_2)\\ e^{x_1-2}<e^{x_2-2}\end{cases}(+)$$

$$e^{x_1-2}-f(x_1)<e^{x_2-2}-f(x_2)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(x_1)<g(x_2)$$

Συνεπώς η g είναι γνησίως αύξουσα

(III) $e^{x-1}<f(x+1)\Leftrightarrow e^{x-1}-f(x+1)<0\Leftrightarrow e^{(x+1)-2}-f(x+1)<0\Leftrightarrow$
$g(x+1)<0\ (1)$

Έχω: $g(2)=e^{2-2}-f(2)\overset{f(2)=1}{=}1-1=0$

Τότε απο την (1) θα έχω:

$$g(x+1)<0\overset{g(2)=0}{\Longleftrightarrow}g(x+1)<g(2)\overset{g\uparrow}{\Longleftrightarrow}x+1<2\Leftrightarrow x<1\Leftrightarrow x\in(-\infty,1)$$

3.

Έστω μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Να βρείτε (εφόσον υπάρχει) συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ισχύει:

$(f\circ g)(x+1)\le f(x)\le f\left(g(x)+1\right)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$$(f\circ g)(x+1)\le f(x)\Leftrightarrow f\left(g(x+1)\right)\le f(x)\overset{f\uparrow}{\Longleftrightarrow}g(x+1)\le x$$

Έχω: $g(x+1)\le x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (1)

Στην σχέση (1) θέτω όπου x το $x-1$:

$$g(x-1+1)\le x-1\Leftrightarrow g(x)\le x-1\ (2)$$

$$f(x)\le f\left(g(x)+1\right)\overset{f\uparrow}{\Longleftrightarrow}x\le g(x)+1\Leftrightarrow g(x)\ge x-1\ (3)$$

Απο τις σχέσεις $(2),(3)$ θα έχω:

$$\left.\begin{cases}g(x)\le x-1\\ g(x)\ge x-1\end{cases}\right\}\Rightarrow g(x)=x-1$$

4.

Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο Δ για την οποία ισχύει:

$\left|f(x)-f(y)\right|<|x-y|$ για κάθε $x,y\in\Delta$ με $x\ne y$

Να αποδείξετε οτι η συνάρτηση $g(x)=f(x)-x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ

Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$:

$$x_1<x_2\Rightarrow x_1-x_2<0\Rightarrow\left|x_1-x_2\right|=-x_1+x_2$$

$$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|<\left|x_1-x_2\right|\overset{|x_1-x_2|=-x_1+x_2}{\Longleftrightarrow}\left|f(x_1)-f(x_2)\right|<-x_1+x_2\overset{|x|<\theta\Leftrightarrow-\theta<x<\theta,\theta>0}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow-(-x_1+x_2)<f(x_1)-f(x_2)<-x_1+x_2\Leftrightarrow x_1-x_2<f(x_1)-f(x_2)<-x_1+x_2$$

$$f(x_1)-f(x_2)>x_1-x_2\Leftrightarrow f(x_1)-x_1>f(x_2)-x_2\Leftrightarrow g(x_1)>g(x_2)$$

Άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα

5.

Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

$f\left(e^{x}\right)+f\left(e^{5x}\right)<f\left(e^{-x}\right)+f\left(e^{2x}\right)$ για κάθε $x<0$

$$e^{x}<e^{-x}\Leftrightarrow x<-x\Leftrightarrow 2x<0\Leftrightarrow x<0\left(\text{Ισχύει}\right)$$

$$e^{5x}<e^{2x}\Leftrightarrow 5x<2x\Leftrightarrow 3x<0\Leftrightarrow x<0\left(\text{Ισχύει}\right)$$

$$\left.\begin{cases} e^{x}<e^{-x} \\ e^{5x}<e^{2x} \end{cases}\right\}\overset{f\uparrow}{\Longrightarrow}\left.\begin{cases} f\left(e^{x}\right)<f\left(e^{-x}\right) \\ f\left(e^{5x}\right)<f\left(e^{2x}\right) \end{cases}\right\}(+)$$

$$f\left(e^{x}\right)+f\left(e^{5x}\right)<f\left(e^{-x}\right)+f\left(e^{2x}\right)$$

6.

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:
$f\left(x\right)=\sqrt{x^{13}-e^{2-x}+\ln x-\frac{1}{x}+e}$
Ν*α βρεθεί το πεδίο ορισμού της f*

$$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}: x^{13}-e^{2-x}+\ln x-\frac{1}{x}+e\geq 0, x>0, x\neq 0\right\}=$$

$$=\left\{x\in\mathbb{R}: x^{13}-e^{2-x}+\ln x-\frac{1}{x}+e\geq 0, x>0\right\}$$

Θεωρώ την συνάρτηση $g\left(x\right)=x^{13}-e^{2-x}+\ln x-\frac{1}{x}+e, x\in\left(0,+\infty\right)$

Αν $x_1, x_2\in\left(0,+\infty\right)$ με $x_1<x_2$ θα έχω:

$$\left.\begin{cases} x_1<x_2 \\ x_1,x_2\in\left(0,+\infty\right) \end{cases}\right\}\Rightarrow\left.\begin{cases} x_1^{13}<x_2^{13} \\ -x_1>-x_2 \\ \ln x_1<\ln x_2 \\ \frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_2} \\ x_1,x_2\in\left(0,+\infty\right) \end{cases}\right\}\Rightarrow\left.\begin{cases} x_1^{13}<x_2^{13} \\ 2-x_1>2-x_2 \\ \ln x_1<\ln x_2 \\ -\frac{1}{x_1}<-\frac{1}{x_2} \\ x_1,x_2\in\left(0,+\infty\right) \end{cases}\right\}\Rightarrow\left.\begin{cases} x_1^{13}<x_2^{13} \\ e^{2-x_1}>e^{2-x_2} \\ \ln x_1<\ln x_2 \\ -\frac{1}{x_1}<-\frac{1}{x_2} \\ x_1,x_2\in\left(0,+\infty\right) \end{cases}\right\}$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} x_1^{13}<x_2^{13} \\ -e^{2-x_1}<-e^{2-x_2} \\ \ln x_1<\ln x_2 \\ -\dfrac{1}{x_1}<-\dfrac{1}{x_2} \\ x_1,x_2\in(0,+\infty) \end{array}\right\}\overset{(+)}{\Longrightarrow} x_1^{13}-e^{2-x_1}+\ln x_1-\frac{1}{x_1}<x_2^{13}-e^{2-x_2}+\ln x_2-\frac{1}{x_2}\Rightarrow$$

$$x_1^{13}-e^{2-x_1}+\ln x_1-\frac{1}{x_1}+e<x_2^{13}-e^{2-x_2}+\ln x_2-\frac{1}{x_2}+e\Rightarrow g(x_1)<g(x_2)$$

Άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα

$$x\in D_f \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x_1^{13}-e^{2-x_1}+\ln x_1-\dfrac{1}{x_1}+e>0 \\ x>0 \end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} g(x)>0 \\ x>0 \end{array}\right\}$$

$$Έχω: g(1)=1^{13}-e^{2-1}+\ln 1-\frac{1}{1}+e=1-e-1+e=0$$

$$x\in D_f \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} g(x)>0 \\ x>0 \end{array}\right\}\overset{g(1)=0}{\Longleftrightarrow}\left\{\begin{array}{c} g(x)>g(1) \\ x>0 \end{array}\right\}\overset{g\uparrow(0,+\infty)}{\Longleftrightarrow}\left\{\begin{array}{c} x>1 \\ x>0 \end{array}\right\}\Leftrightarrow x>1\Leftrightarrow$$

$$x\in(1,+\infty)$$

$$Οπότε: D_f=(1,+\infty)$$

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

1.

$$Δίνεται\ η\ συνάρτηση\ με\ τύπο: f(x)=\left(\frac{3}{7}\right)^x+\left(\frac{4}{7}\right)^x-1$$

(I) *Να αποδείξετε οτι η f είναι γνησίως φθίνουσα*

(II) *Να λυθεί η ανίσωση* $3^x+4^x>7^x$

Υπόδειξη: *Αν* $a\in(0,1)$ *τότε ισχύει η ισοδυναμία*: $x<y\Leftrightarrow \alpha^x>\alpha^y$

$$3^x+4^x>7^x\Leftrightarrow\left(\frac{3}{7}\right)^x+\left(\frac{4}{7}\right)^x-1>0\Leftrightarrow f(x)>f(1)\Leftrightarrow\cdots$$

2.

Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα τότε:

(I) Να δείξετε οτι η συνάρτηση $g(x)=f(x)-x$ είναι γνησίως φθίνουσα

(II) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:

$f(\lambda^3-2\lambda^2)-f(\lambda-2)>\lambda^3-2\lambda^2-\lambda+2$

3.

Έστω η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται απο τα σημεία $A(1,5)$ και $B(5,-2)$

(I) Να δείξετε οτι η f είναι γνησίως φθίνουσα

(II) Να δείξετε οτι η συνάρτηση $f \circ f$ είναι γνησίως αύξουσα

(III) Να λύσετε την ανίσωση: $f\left(f\left(e^x\right)\right)<-2$

4.

Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο Δ για την οποία ισχύει:

$\left|f(x)-f(y)\right|<|x-y|$ για κάθε $x, y \in \Delta$ με $x \neq y$

Να αποδείξετε οτι η συνάρτηση $g(x)=f(x)+x$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ

5.

Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

$f\left(e^{9x}\right)+f\left(e^{18x}\right)<f\left(e^{12x}\right)+f\left(e^{20x}\right)$ για κάθε $x>0$

6.

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x)=\sqrt{x^5+e^{2x-1}-\ln\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-e}$$

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f

7.

Έστω η συνάρτηση $f(x)=x+\ln x-1, x>0$. Να βρεθεί πότε η C_f βρίσκεται πάνω απο τον άξονα $x'x$

Υπόδειξη: $\left(f(x)>0, x>0\right) \overset{f(1)=0}{\Longleftrightarrow} \left(f(x)>f(1), x>0\right) \overset{f\uparrow(0,+\infty)}{\Longleftrightarrow} x>1$