ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ (Νο2)

1.

Έστω οι συναρτήσεις f και g για τις οποίες υποθέτουμε ότι :
α) είναι ορισμένες στο IR
β)$f(IR)=IR$
γ)Για κάθε $x \in IR$ ισχύει $(fof+gof)(x) = x$ (1)
Να αποδειχθεί ότι :
Ι) Η f είναι αντιστρέψιμη
ΙΙ)$f^{-1}=f+g$

Ι)Έστω : $f(x_1) = f(x_2)$

$$\left.\begin{array}{l} f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \\ g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} (fof)(x_1) = (fof)(x_2) \\ (gof)(x_1)) = (gof)(x_2) \end{array}\right\} (+)$$

$$(fof)(x_1)+ (gof)(x_1)) = (fof)(x_2)+ (gof)(x_2) \Longrightarrow$$

$$(fof+gof)(x_1) = (fof+gof)(x_2) \Longrightarrow x_1 =x_2$$

Άρα η συνάρτηση f είναι «1-1».Οπότε υπάρχει η f^{-1}

ΙΙ)

$f^{-1}(y)=x \Longleftrightarrow y= f(x)$

$f^{-1}(y)=x \Longleftrightarrow f^{-1}(f(x))=x$

$(fof+gof)(x) = x \Longleftrightarrow (fof)(x)+(gof)(x) = f^{-1}(f(x)) \Longleftrightarrow$

Θέτω: $y= f(x)$

$f(f(x))+ g(f((x)) = f^{-1}(f(x)) \Longleftrightarrow (f+g)(f(x)) = f^{-1}(f(x)) \Longleftrightarrow$

$(f+g)(y)) = f^{-1}(y) \Longleftrightarrow f+g = f^{-1}$

2.

Έστω οι συναρτήσεις f και g για τις οποίες υποθέτουμε ότι :
α) είναι ορισμένες στο IR
β)$f(IR)=IR$
γ)Για κάθε $x \in IR$ ισχύει $(fog)(x) = x$ (1)
Να αποδειχθεί ότι :
Ι) Η g είναι αντιστρέψιμη
ΙΙ)$g^{-1}=f$

Ι)

Έστω : $g(x_1) = g(x_2) \Longrightarrow f(g(x_1)) =f(g(x_2)) \Longrightarrow x_1 =x_2$

Άρα η συνάρτηση g είναι «1-1».Οπότε υπάρχει η g^{-1}

ΙΙ)

$g^{-1}(y)=x \Longleftrightarrow y= g(x)$

$g^{-1}(y)=x \Longleftrightarrow g^{-1}(g(x))=x$

$(fog)(x) = x \Leftrightarrow f(g(x)) = g^{-1}(g(x)) \Leftrightarrow f(y) = g^{-1}(y) \Leftrightarrow g^{-1} = f$

3.

Έστω οι συναρτήσεις f, g και hγια τις οποίες υποθέτουμε ότι : είναι ορισμένες στο IR για κάθε x∈IR ισχύει $(foh)(x) = (goh)(x) = x$ Να αποδειχθεί ότι : f=g

Έστω : $h(x_1) = h(x_2) \Longrightarrow f(h(x_1)) = f(h(x_2)) \Longrightarrow x_1 = x_2$

Άρα η συνάρτηση h είναι «1-1».Οπότε υπάρχει η h^{-1}

$h^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = h(x)$

$h^{-1}(y) = x \Leftrightarrow h^{-1}(h(x)) = x$

$(foh)(x) = x \Leftrightarrow f(h(x)) = h^{-1}(h(x)) \Leftrightarrow f(y) = h^{-1}(y) \Leftrightarrow h^{-1} = f$

$(goh)(x) = x \Leftrightarrow g(h(x)) = h^{-1}(h(x)) \Leftrightarrow g(y) = h^{-1}(y) \Leftrightarrow h^{-1} = g$

Οπότε : f=g

4.

Έστω η συναρτήση f που είναι ορισμένη στο IR για κάθε x∈IR ισχύει $f^3(x)+f(x)-x = 0$.Να βρεθεί η f^{-1}

$f^3(x)+f(x)-x = 0$ή $f^3(x)+f(x) = x$

$$\text{Έστω : } f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow \left.\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_2) \\ f^3(x_1) &= f^3(x_2) \end{aligned}\right\} (+)$$

$$f(x_1)+ f^3(x_1) = f(x_2)+ f^3(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η συνάρτηση f είναι «1-1».Οπότε υπάρχει η f^{-1}

Έχω : $f(x)=y$

$f^3(x)+f(x)-x = 0$ή $y^3+y-x = 0$ ή $x = y^3+y$

$f^{-1}: IR \to IR$ με $f^{-1}(x) = x^3+x$

5.

Να βρεθεί η αντίστροφη της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{1-e^x}{1+e^x}$

Το πεδίο ορισμού της f είναι το IR

($e^x > 0$ ή$1+e^x > 0$ή$1+e^x \neq 0$ για κάθε x∈IR)

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{1-e^{x_1}}{1+e^{x_1}} = \frac{1-e^{x_2}}{1+e^{x_2}} \Leftrightarrow$$

$(1-e^{x_1})(1+e^{x_2}) = (1-e^{x_2})(1+e^{x_1}) \Leftrightarrow$

$1\bullet1+1\bullet e^{x_2}-e^{x_1}\bullet1-e^{x_1}\bullet e^{x_2} = 1\bullet1+1\bullet e^{x_1}-e^{x_2}\bullet1-e^{x_2}\bullet e^{x_1} \Leftrightarrow$

$\cancel{1}+e^{x_2}-e^{x_1}-\cancel{e^{x_1}e^{x_2}} = \cancel{1}+e^{x_1}-e^{x_2}-\cancel{e^{x_2}e^{x_1}} \Leftrightarrow$

$e^{x_2}-e^{x_1} = e^{x_1}-e^{x_2} \Leftrightarrow 2e^{x_1}= 2e^{x_2} \Leftrightarrow e^{x_1}= e^{x_2} \Leftrightarrow x_1= x_2$

Άρα η συνάρτηση f είναι «1-1».Οπότε υπάρχει η f^{-1}

Έχω : $f(x)=y \Leftrightarrow y = \dfrac{1-e^x}{1+e^x} \Leftrightarrow y(1+e^x) = 1-e^x \Leftrightarrow$

$y\bullet 1+ye^x = 1-e^x \Leftrightarrow y+ye^x = 1-e^x \Leftrightarrow ye^x+e^x = 1- y \Leftrightarrow$

$(y+1)e^x = 1- y$ (1)

Έστω $y+1=0 \Leftrightarrow y=-1$

Θέτω $y=-1$ στην εξίσωση (1) :

$(y+1)e^x = 1- y \Leftrightarrow (-1+1)e^x = 1-(-1)$ ή $0\bullet e^x =2$(Άτοπο)

Άρα : $y \neq -1$

$$\left.\begin{array}{l} (y+1)e^x = 1- y \\ y \neq -1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{(y+1)e^x}{y+1} = \dfrac{1- y}{y+1} \\ y \neq -1 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} e^x = \dfrac{1- y}{y+1} \\ \dfrac{1- y}{y+1} > 0 \\ y \neq -1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x = \ln \dfrac{1- y}{y+1} \\ (1- y)(y+1) > 0 \\ y \neq -1 \end{array}\right\}$$

θεωρώ την δευτεροβάθμια εξίσωση$(1- y)(y +1) = 0$

$$(1- y)(y +1) = 0 \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} 1- y = 0 \\ \text{ή} \\ y +1 = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} y = 1 \\ \text{ή} \\ y = -1 \end{array}\right\}$$

y	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$(1- y)(y +1)$	$-$	||	$+$	0	$-$

$$\left.\begin{matrix}(1-y)(y+1)>0\\ y\neq -1\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow y\in(-1,1)$$

Οπότε το σύνολο τιμών της f είναι το (−1,1).Επειδή το σύνολο τιμών της f είναι το πεδίο ορισμού της f^{-1} το πεδίο ορισμού της f είναι το(−1,1)

$$f^{-1}:(-1,1)\to IR\ ,\ f^{-1}(x)=\ln\frac{1-x}{1+x} \text{ με } x\in(-1,1)$$

6.

> *Δίνεται η συνάρτηση* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *που ικανοποιεί την σχέση:*
> $$e^{3x}-3\left(e^{3x}+e^{2x}\right)f(x)+3\left(e^{3x}+2e^{2x}+e^{x}\right)f^2(x)-\left(e^x+1\right)^3 f^3(x)=0$$
> I)Ν*α βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
> II)Ν*α αποδείξετε οτι η f αντιστρέφεται*
> III)Ν*α βρεθεί η* f^{-1}

$$I)e^{3x}-3\left(e^{3x}+e^{2x}\right)f(x)+3\left(e^{3x}+2e^{2x}+e^{x}\right)f^2(x)-\left(e^x+1\right)^3 f^3(x)=0\Leftrightarrow$$

$$e^{3x}-3e^{2x}\left(e^x+1\right)f(x)+3e^{x}\left(e^{2x}+2e^{x}+1\right)f^2(x)-\left(e^x+1\right)^3 f^3(x)=0\Leftrightarrow$$

$$e^{3x}-3e^{2x}\left(e^x+1\right)f(x)+3e^{x}\underbrace{\left[\left(e^x\right)^2+2\bullet e^x\bullet 1+1^2\right]}_{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2}f^2(x)-\left(e^x+1\right)^3 f^3(x)=0$$

$$e^{3x}-3e^{2x}\left(e^x+1\right)f(x)+3e^{x}\left(e^x+1\right)^2 f^2(x)-\left(e^x+1\right)^3 f^3(x)=0\ \overset{\substack{\Delta\iota\alpha\iota\rho\acute{\omega}\ \kappa\alpha\iota\ \tau\alpha\ \delta\upsilon o\\ \mu\acute{\varepsilon}\lambda\eta\ \mu\varepsilon\ \tau o\ \left(e^x+1\right)^3}}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{e^{3x}-3e^{2x}\left(e^x+1\right)f(x)+3e^{x}\left(e^x+1\right)^2 f^2(x)-\left(e^x+1\right)^3 f^3(x)}{\left(e^x+1\right)^3}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{e^{3x}}{\left(e^x+1\right)^3}-3\frac{e^{2x}\left(e^x+1\right)}{\left(e^x+1\right)^3}f(x)+\frac{3e^{x}\left(e^x+1\right)^2 f^2(x)}{\left(e^x+1\right)^3}-\frac{\left(e^x+1\right)^3 f^3(x)}{\left(e^x+1\right)^3}=0\Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)^3-3\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)^2 f(x)+3\frac{e^x}{e^x+1}f^2(x)-f^3(x)=0\ \overset{\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3=(\alpha-\beta)^3}{\Leftrightarrow}$$

$$\left(\frac{e^x}{e^x+1}-f(x)\right)^3=0\Leftrightarrow\frac{e^x}{e^x+1}-f(x)=0\Leftrightarrow f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$$

$$II)f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow\frac{e^{x_1}}{e^{x_1}+1}=\frac{e^{x_2}}{e^{x_2}+1}\Leftrightarrow e^{x_1}(e^{x_2}+1)=e^{x_2}(e^{x_1}+1)\Leftrightarrow$$

$$\cancel{e^{x_1}e^{x_2}}+e^{x_1}=\cancel{e^{x_2}e^{x_1}}+e^{x_2}\Leftrightarrow e^{x_1}=e^{x_2}\Leftrightarrow x_1=x_2$$

Οπότε η συνάρτηση f είναι "1−1".Άρα υπάρχει η f^{-1}

$\text{III)}\, y = f(x) \Leftrightarrow y = \dfrac{e^x}{e^x+1} \Leftrightarrow y(e^x+1) = e^x \Leftrightarrow ye^x + y = e^x \Leftrightarrow$

$ye^x - e^x = -y \Leftrightarrow -e^x(1-y) = -y \Leftrightarrow e^x(1-y) = y(1)$

$\text{Έστω}: 1 - y = 0 \Leftrightarrow y = 1$

$\text{Θέτω } y = 1 \text{ στην σχέση } (1):$

$e^x(1-y) = y \Leftrightarrow e^x(1-1) = 1 \Leftrightarrow 0 \bullet e^x = 1 (\text{Άτοπο})$

$\text{Άρα}: y \neq 1$

$$\left.\begin{matrix} e^x(1-y) = y \\ y \neq 1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} e^x = \dfrac{y}{1-y} \\ \dfrac{y}{1-y} > 0 \\ y \neq 1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x = \ln\dfrac{y}{1-y} \\ \dfrac{y}{1-y} > 0 \\ y \neq 1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x = \ln\dfrac{y}{1-y} \\ y(1-y) > 0 \\ y \neq 1 \end{matrix}\right\}$$

$\text{Θεωρώ την δευτεροβάθμια εξίσωση}\, y(1-y) = 0$

$$y(1-y) = 0 \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} y = 0 \\ \text{ή} \\ 1 - y = 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} y = 0 \\ \text{ή} \\ y = 1 \end{matrix}\right\}$$

y	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y(1 – y)	–	‖	+	–

$$\left.\begin{matrix} y(1-y) > 0 \\ y \neq 1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow y \in (0,1)$$

$f^{-1}: (0,1) \to \mathbb{R},\ f^{-1}(x) = \ln\dfrac{x}{1-x}$

7.

I)Να βρεθεί η αντίστροφη της συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{1-x}}{\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{1-x}}$

II)Να βρεθεί ο α έτσι ώστε $f^{-1}(\alpha) = 0$

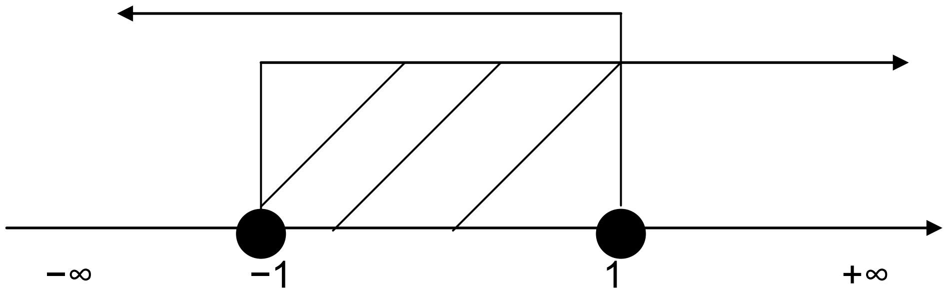
Αν Α τοπεδίο ορισμού της f.Τότε θα έχω:

$A = \{x \in IR: x+1 \geq 0,\ 1-x \geq 0,\ \sqrt{x+1}+\sqrt{1-x} \neq 0\}$

$x+1 \geq 0$ ή $x \geq -1$

$1-x \geq 0$ ή $-x \geq -1$ ή $\dfrac{-x}{-1} \leq \dfrac{-1}{-1}$ ή $x \leq 1$

Οπότε θα πρέπει : ($x \geq -1$ και $x \leq 1$)



Άρα : $x \in [-1,1]$

Θεωρώ την εξίσωση : $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{1-x} = 0$ μεχ $x \in [-1,1]$

$$\left.\begin{matrix} \sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{1-x} = 0 \\ x \in [-1,1] \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{matrix} x+1=0 \text{και} 1-x = 0 \\ x \in [-1,1] \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} x=-1 \text{και} x = 1 \\ x \in [-1,1] \end{matrix} \quad \text{(Άτοπο)}\right\}$$

Συνεπώς : $x \in [-1,1]$

Άρα: $A = [-1,1]$

$$f(x_1) = f(x_2) \text{ ή } \frac{\sqrt[3]{x_1+1}-\sqrt[3]{1-x_1}}{\sqrt[3]{x_1+1}+\sqrt[3]{1-x_1}} = \frac{\sqrt[3]{x_2+1}-\sqrt[3]{1-x_2}}{\sqrt[3]{x_2+1}+\sqrt[3]{1-x_2}} \text{ ή}$$

$$(\sqrt[3]{x_1+1}-\sqrt[3]{1-x_1})(\sqrt[3]{x_2+1}+\sqrt[3]{1-x_2}) = (\sqrt[3]{x_2+1}-\sqrt[3]{1-x_2})(\sqrt[3]{x_1+1}+\sqrt[3]{1-x_1}) \text{ ή}$$

$$\cancel{\sqrt[3]{x_1+1}\sqrt[3]{x_2+1}}+\sqrt[3]{x_1+1}\sqrt[3]{1-x_2}-\sqrt[3]{1-x_1}\sqrt[3]{x_2+1}-\cancel{\sqrt[3]{1-x_1}\sqrt[3]{1-x_2}}=$$

$$\cancel{\sqrt[3]{x_2+1}\sqrt[3]{x_1+1}}+\sqrt[3]{x_2+1}\sqrt[3]{1-x_1}-\sqrt[3]{1-x_2}\sqrt[3]{x_1+1}-\cancel{\sqrt[3]{1-x_2}\sqrt[3]{1-x_1}} \text{ ή}$$

$$\sqrt[3]{(x_1+1)(1-x_2)}-\sqrt[3]{(1-x_1)(x_2+1)}=\sqrt[3]{(x_2+1)(1-x_1)}-\sqrt[3]{(1-x_2)(x_1+1)} \text{ ή}$$

$$\sqrt[3]{(x_1+1)(1-x_2)}+\sqrt[3]{(x_1+1)(1-x_2)}=\sqrt[3]{(x_2+1)(1-x_1)}+\sqrt[3]{(x_2+1)(1-x_1)} \text{ ή}$$

$$2\sqrt[3]{(x_1+1)(1-x_2)}=2\sqrt[3]{(x_2+1)(1-x_1)} \text{ ή}$$

$$\sqrt[3]{(x_1+1)(1-x_2)}=\sqrt[3]{(x_2+1)(1-x_1)} \text{ ή}$$

$$(x_1+1)(1-x_2)=(x_2+1)(1-x_1) \text{ ή}$$

$$x_1\bullet 1+x_1(-x_2)+1\bullet 1+1(-x_2)=x_2\bullet 1+x_2(-x_1)+1\bullet 1+1(-x_1) \text{ ή}$$

$$x_1-x_1x_2+1-x_2=x_2-x_1x_2+1-x_1 \text{ ή } x_1-x_2=x_2+-x_1 \text{ ή}$$

$$x_1+x_1=x_2+x_2 \text{ ή } 2x_1=2x_2 \text{ ή } x_1=x_2$$

Άρα συνάρτηση f είναι «1-1» Οπότε υπάρχει η f^{-1}

$$\left.\begin{array}{l} y=f(x) \\ \\ x\in[-1,1] \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} y=\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{1-x}} \\ \\ x\in[-1,1] \end{array}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} y(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{1-x})=\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{1-x} \\ \\ x\in[-1,1] \end{array}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} y\sqrt[3]{x+1}+y\sqrt[3]{1-x}=\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{1-x} \\ \\ x\in[-1,1] \end{array}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} & y\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x+1} = -y\sqrt[3]{1-x} - \sqrt[3]{1-x} \\ & x \in [-1,1] \end{aligned}\right\} \iff$$

$$\left.\begin{aligned} & \sqrt[3]{x+1}\,(y-1) = (-y-1)\sqrt[3]{1-x} \\ & x \in [-1,1] \end{aligned}\right\} \iff$$

$$\left.\begin{aligned} & -(1-y)\sqrt[3]{x+1} = -(y+1)\sqrt[3]{1-x} \\ & x \in [-1,1] \end{aligned}\right\} \iff$$

$$\left.\begin{aligned} & (1-y)\sqrt[3]{x+1} = (y+1)\sqrt[3]{1-x} \\ & x \in [-1,1] \end{aligned}\right\} \iff$$

$$\left.\begin{aligned} & [(1-y)\sqrt[3]{x+1}\,]^3 = [(y+1)\sqrt[3]{1-x}\,]^3 \\ & x \in [-1,1] \end{aligned}\right\} \iff$$

$$\left.\begin{aligned} & (1-y)^3(\sqrt[3]{x+1})\,]^3 = (y+1)^3(\sqrt[3]{1-x}\,)^3 \\ & x \in [-1,1] \end{aligned}\right\} \iff$$

$$\left.\begin{aligned} & (1-y)^3(x+1) = (y+1)^3(1-x) \\ & x \in [-1,1] \end{aligned}\right\} \iff$$

$$\left.\begin{aligned} & x(1-y)^3+(1-y)^3 = x(y+1)^3-(y+1)^3 \\ & x \in [-1,1] \end{aligned}\right\} \iff$$

$$\left.\begin{aligned} & x(1-y)^3 - x(y+1)^3 = -(y-1)^3 - (y+1)^3 \\ & x \in [-1,1] \end{aligned}\right\} \iff$$

$$\left.\begin{array}{l} -x\,[(y+1)^3 - (1-y)^3] = -[(1-y)^3+(y+1)^3\,] \\ x \in [-1,1] \end{array}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x\,[(y+1)^3 - (1-y)^3] = (1-y)^3+(y+1)^3 \\ x \in [-1,1] \end{array}\right\}$$

Θα έχω:

$(y+1)^3 - (1-y)^3 = y^3+3\cdot y^2\cdot 1+3\cdot y\cdot 1^2+1^3-(1^3-3\cdot 1^2\cdot y+3\cdot 1\cdot y^2-y^3) =$

$=y^3+3y^2+3y+1-(1-3y+3y^2-y^3)= y^3+3y^2+3y+1-1+3y-3y^2+y^3=$
$2y^3+6y=2y(y^2+3)$

$(y+1)^3 + (1-y)^3 = y^3+3\cdot y^2\cdot 1+3\cdot y\cdot 1^2+1^3+1^3-3\cdot 1^2\cdot y+3\cdot 1\cdot y^2-y^3 =$

$=y^3+3y^2+3y+1+1-3y+3y^2-y^3= 6y^2+2 = 2(3y^2+2)$

$(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 + 3\cdot\alpha^2\cdot\beta + 3\cdot\alpha\cdot\beta^2 + \beta^3$
$(\alpha-\beta)^3 = \alpha^3 - 3\cdot\alpha^2\cdot\beta + 3\cdot\alpha\cdot\beta^2 - \beta^3$

Οπότε :

$$\left.\begin{array}{l} 2(3y^2+1)x = 2y(y^2+3) \\ x \in [-1,1] \end{array}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} 2(3y^2+1)x = 2y(y^2+3) \\ x \in [-1,1] \end{array}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{(3y^2+1)x}{3y^2+1} = \dfrac{2y(y^2+3)}{3y^2+1} \quad (\text{Γιατι}\,3y^2\geq 0\,\text{ή}\,3y^2+1>0\,\text{ή}\,3y^2+1\neq 0) \\ x \in [-1,1] \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{y(y^2+3)}{3y^2+1} \\ x \in [-1,1] \end{array}\right\}$$

Έχω : $x \in [-1,1] \Longleftrightarrow -1 \le x \le 1 \Longleftrightarrow -1 \le \dfrac{y(y^2+3)}{3y^2+1} \le 1 \Longleftrightarrow$

$-1(3y^2+1) \le \dfrac{y^3+3y}{3y^2+1} \le 1(3y^2+1) \Longleftrightarrow$

$-3y^2-1 \le y^3+3y \le 3y^2+1 \Longleftrightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} y^3+3y \ge -3y^2-1 \\ y^3+3y \le 3y^2+1 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} y^3+3y^2+3y+1 \ge 0 \\ y^3-3y^2+3y-1 \le 0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} y^3+3y^2+3y+1 \ge 0 \\ y^3-3y^2+3y-1 \le 0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} (y+1)^3 \ge 0 \\ (y-1)^3 \le 0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} y+1 \ge 0 \\ y-1 \le 0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} y \ge -1 \\ y \le 1 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow y \in [-1,1]$$

Άρα : $f([-1,1]) = [-1,1]$

Το σύνολο τιμών της f είναι πεδίο ορισμού της f^{-1} Άρα είναι πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το $[-1,1]$

$$f^{-1}(x) = \frac{x(x^2+3)}{3x^2+1}, \; x \in [-1,1]$$

II) $f^{-1}(\alpha) = 0 \Longleftrightarrow \alpha = f(0) \Longleftrightarrow \alpha = \dfrac{\sqrt[3]{0+1}-\sqrt[3]{1-0}}{\sqrt[3]{0+1}+\sqrt[3]{1-0}} \Longleftrightarrow \alpha = 0$