ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΝΩ ΣΤΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Μια καμπύλη (C) είναι γραφική παράσταση μιας συνάρτησης όταν κάθε ευθεία παράλληλη με τον άξονα Y΄Y την τέμνει το πολύ σε ένα σημείο
Το πεδίο ορισμού της f είναι η προβολή της C_f πάνω στον άξονα X΄X
Αν f•g=0 δεν ισχύει οπωσδήποτε ότι (f=0ήg=0)
Αν |f|=θ,θ>0 δεν ισχύει οπωσδήποτε ότι (f=θήf=–θ)
Δεν ισχύει πάντα fog= gof
Ισχύει πάντα (fog)oh=fo(go)h
Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στα σύνολα A_1,A_2 δεν έπεται αναγκαστικά ότι θα είναι γνησίως αύξουσα στο A_1UA_2
Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στα σύνολα A_1,A_2 δεν έπεται αναγκαστικά ότι θα είναι γνησίως φθίνουσα στο A_1UA_2
Όταν μια συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα η γραφική της παράταση ανεβαίνει προς τα πάνω
Όταν μια συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα η γραφική της παράταση κατεβαίνει προς τα πάνω
Μια γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι «1-1»
Μια συνάρτηση f είναι «1-1» όταν κάθε ευθεία παράλληλη με τον άξονα X΄X τέμνει την της C_f το πολύ σε ένα σημείο
Για να υπάρχει η f^{-1}θα πρέπει η f να είναι «1-1»
$f^{-1}(f(x))$ =x , για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της f
$f(f^{-1}(y))$ =y , για κάθε y που ανήκει στο σύνολο τιμών της f
Η C_f και C_{f-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y=x

1.

Μια γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι «1-1»

Επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη θα είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα

<u>Έστω η f:A→IR είναι γνησίως αύξουσα</u>

Αν x_1,,x_2ϵA με $x_1 \neq x_2$ τότε $x_1<x_2$ ή $x_1>x_2$

Έστω $x_1<x_2$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα θα έχω $f(x_1)<f(x_2)$
Οποτε $f(x_1)\neq f(x_2)$

Έστω $x_1>x_2$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα θα έχω $f(x_1)>f(x_2)$
Οποτε $f(x_1)\neq f(x_2)$

Άρα για κάθε x_1,,x_2ϵA με $x_1\neq x_2$ έχω $f(x_1)\neq f(x_2)$Συνεπώς η f είναι «1-1»

<u>Έστω η f:A→IR είναι γνησίως φθίνουσα</u>

Αν x_1,,x_2ϵA με $x_1\neq x_2$ τότε $x_1<x_2$ ή $x_1>x_2$

Έστω $x_1<x_2$ και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα θα έχω $f(x_1)>f(x_2)$. Οποτε $f(x_1)\neq f(x_2)$

Έστω $x_1>x_2$ και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα θα έχω $f(x_1)<f(x_2)$

Οποτε $f(x_1)\neq f(x_2)$

Άρα για κάθε $x_1,,x_2$єA με $x_1\neq x_2$ έχω $f(x_1)\neq f(x_2)$Συνεπώς η f είναι «1-1»

2.

$f^{-1}(f(x))=x$,y=f(x)

$$y=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$$
$$x=f^{-1}(y)\Leftrightarrow x=f^{-1}(f(x))$$

3.

$f(f^{-1}(y))=y$,y=f(x)

$$y=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$$
$$y=f(x)\Leftrightarrow y=f(f^{-1}(y))$$

4.

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως (Σ) ή (Λ) I) Αν f•g=0 τότε : (f=0ήg=0) II) Αν |f|=2 τότε : (f(x)=2ήf(x)=–2) III)Για δυο τυχαίες συναρτήσεις f,g ισχύει : fog= gof IV)Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα τότε και η συνάρτηση $g=f^2$ είναι γνησίως αύξουσα V) Αν η συνάρτηση f:[0,+∞)→IR με f(0)=0 είναι γνησίως αύξουσα τότε η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα X΄X

I)

$$f(x)=\begin{cases}0, x\le 1\\ 1, x>1\end{cases}, g(x)=\begin{cases}1, x\le 1\\ 0, x>1\end{cases}$$

$$D_f=\mathbb{R}, D_g=\mathbb{R}, D_{fg}=\left\{x\in\mathbb{R}: x\in D_f, x\in D_g\right\}=\mathbb{R}$$

$$f(x)g(x)=\begin{cases}f(x)g(x), x\le 1\\ f(x)g(x), x>1\end{cases}=\begin{cases}0\bullet 1, x\le 1\\ 1\bullet 0, x>1\end{cases}=\begin{cases}0, x\le 1\\ 0, x>1\end{cases}=0$$

$$f(x)\bullet g(x)=0,\ f\neq 0, g\neq 0$$

Οπότε (I)→(Λ)

II)

$$f(x)=\begin{cases}2, x\le 0\\ -2, x>0\end{cases}, |f(x)|=\begin{cases}|f(x)|, x\le 0\\ |f(x)|, x>0\end{cases}=\begin{cases}|2|, x\le 0\\ |-2|, x>0\end{cases}=\begin{cases}2, x\le 0\\ 2, x>0\end{cases}=2$$

$Οπότε: |f(x)|=2, f(x)\neq \pm 2$

Οπότε (II)→(Λ)

III)

$f(x)=2, x\in\mathbb{R}$

$g(x)=1, x\in\mathbb{R}$

$D_f=\mathbb{R}, D_g=\mathbb{R}, D_{fog}=\left\{x\in\mathbb{R}: x\in D_g, g(x)\in D_f\right\}=\mathbb{R}$

$D_{gof}=\left\{x\in\mathbb{R}: x\in D_f, f(x)\in D_g\right\}=\mathbb{R}$

$(fog)(x)=f(g(x))=f(1)=2$

$(gof)(x)=g(f(x))=g(2)=1$

$Οπότε: fog\neq gof$

Οπότε (III)→(Λ)

IV)

$f(x)=x, D(f)=\mathbb{R}$

$x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2) Οπότε: f\uparrow$

$g(x)=f^2(x). D(g)=\left\{x\in\mathbb{R}: x\in D(f)\right\}=\mathbb{R}$

$Αν\ x_3=-2, x_4=-1, x_3<x_4 και g(x_3)=(-2)^2=4\ \ g(x_4)=(-1)^2=1$

$Οπότε\ x_3<x_4\ και\ g(x_3)>g(x_4) Συνεπώς\ η\ g\ δεν\ είναι\ γνησίως$

$αύξουσα$

Οπότε (IV)→(Λ)

V)

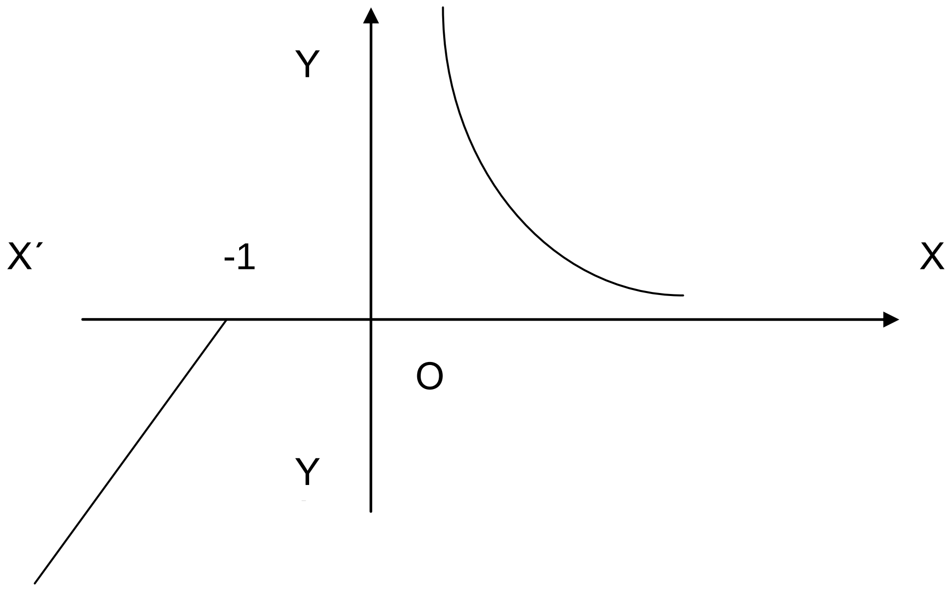
$x\ge 0 \overset{f[0,+\infty)\uparrow}{\Longrightarrow} f(x)\ge f(0)\Rightarrow f(x)\ge 0$

$Άρα\ η\ C_f\ βρίσκεται\ πάνω\ απο\ τον\ άξονα\ X'X$

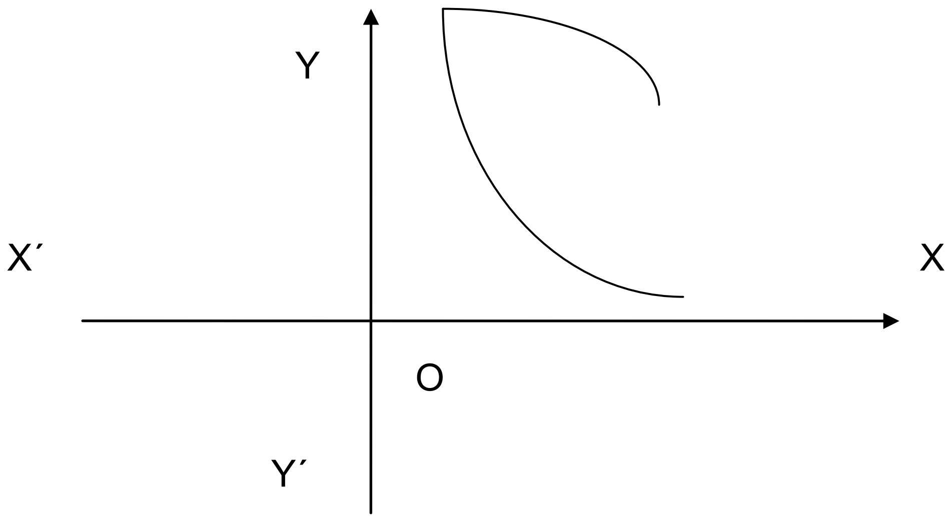
Οπότε (V)→(Σ)

5.

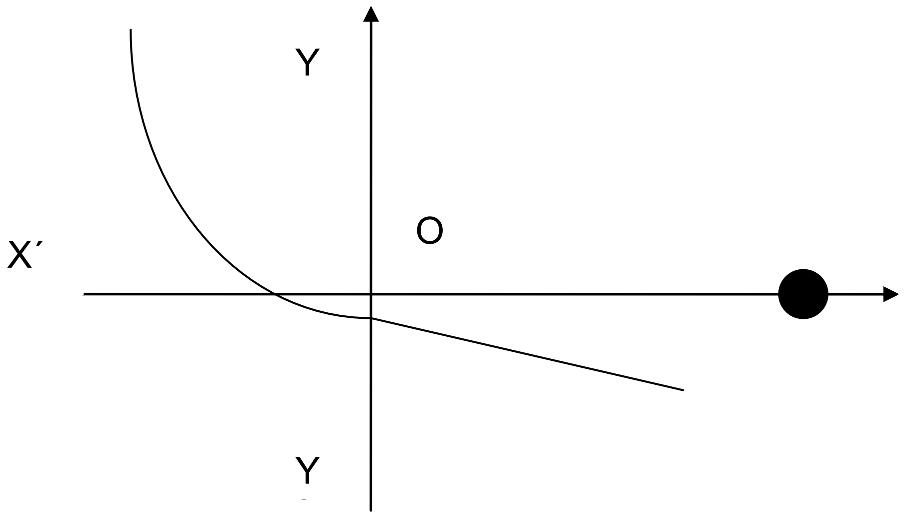
Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως (Σ) ή (Λ) I)Το πεδίο ορισμού της παρακάτω συνάρτησης είναι το (–∞,–1]U(0,+ ∞)



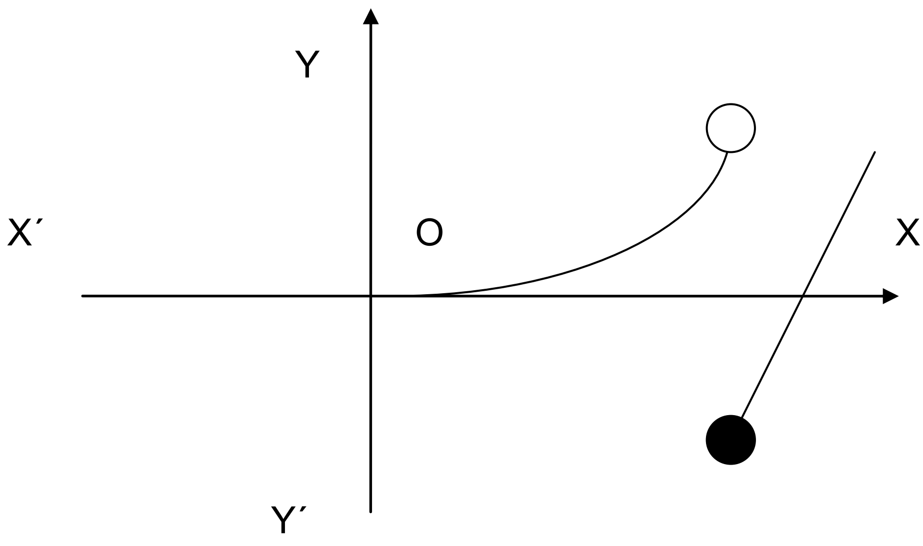
II)Η παρακάτω καμπύλη δεν είναι γραφική παράσταση μιάς συνάρτησης



III)Η συνάρτηση f είναι «1-1»



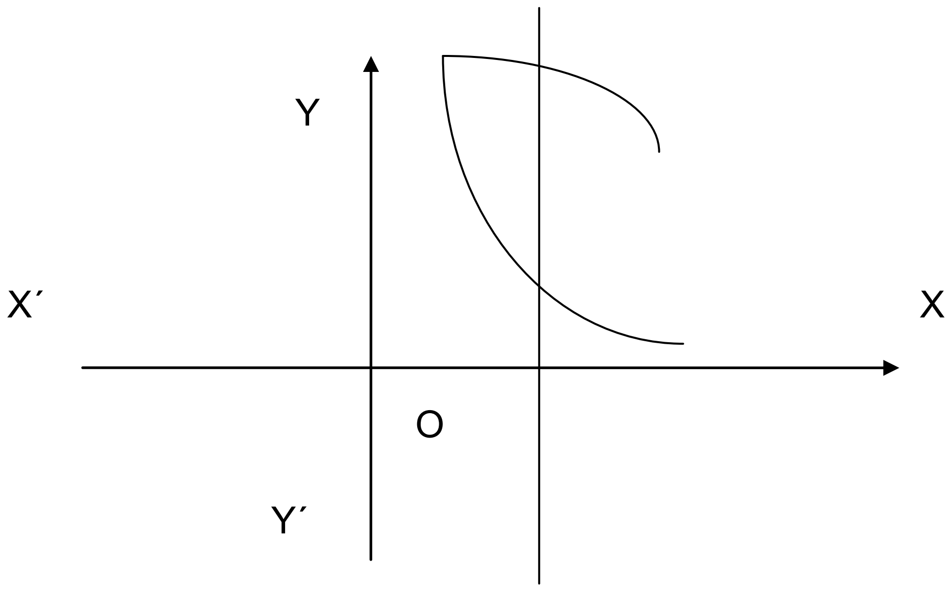
IV) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα



V)
Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στα σύνολα A_1,A_2 δεν έπεται αναγκαστικά ότι θα είναι γνησίως αύξουσα στο $A_1 U A_2$

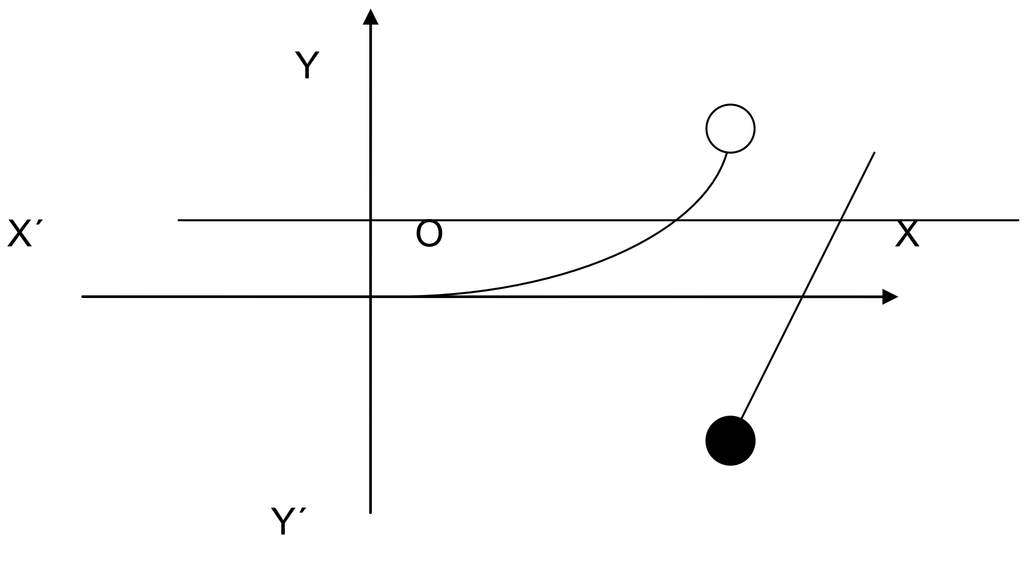
I)Το D_f είναι η προβολή της C_f πάνω στοον άξονα Χ΄Χ.Οπότε
$D_f=(-\infty,-1]U(0,+\infty)$
Οπότε (I)→(Σ)

II) Η καμπύλη δεν είναι γραφική παράσταση μιάς συνάρτησης γιατί ευθείες παράλληλες με τον άξονα Υ΄Υ που τέμνουν την καμπύλη σε δυο σημεία.Οπότε (II)→(Σ)



III)Η συνάρτηση f δεν είναι «1-1» γιατί ο άξονας Χ΄Χ τέμνει την C_f σε δυο σημεία. Οπότε (ΙΙΙ)→(Λ)

IV) Έστω η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα τότε η f δεν είναι «1-1».Άτοπο γιατί υπάρχει ευθεία παράλληλη με τον άξονα Χ΄Χ τέμνει την C_f σε δυο σημεία.Άρα συνάρτηση f δεν είναι γνησίως αύξουσα Οπότε (ΙV)→(Λ)



V)

$$f(x)=\begin{cases} x, x\le 0 \\ x-1, x>0 \end{cases}$$

$\text{Αν } x_1, x_2 \in (-\infty, 0] \text{ με } x_1 < x_2$

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \text{Οπότε} : f \uparrow (-\infty, 0]$

$\text{Αν } x_1, x_2 \in (0, +\infty) \text{ με } x_1 < x_2$

$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \text{Οπότε} : f \uparrow (0, +\infty)$

$\text{Αν } x_3 = 0, x_4 = \frac{1}{2}, x_3 < x_4 \text{και } f(x_3) = f(0) = 0 \ , g(x_4) = g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$

$\text{Οπότε } x_3 < x_4 \text{ και } f(x_3) > f(x_4) \text{Συνεπώς η } f \text{ δεν είναι γνησίως}$

$\text{αύξουσα στο } (-\infty, 0] \cup (0, +\infty)$

Οπότε (V)→(Σ)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως (Σ) ή (Λ)

I) Αν (f–1)(g–2)=0 τότε : (f=1ήg=2)

II) Αν |f|=3 τότε : (f(x)=3ήf(x)=–3)

III)Για δυο τυχαίες συναρτήσεις f,g ισχύει : (2f)og= go(2f)

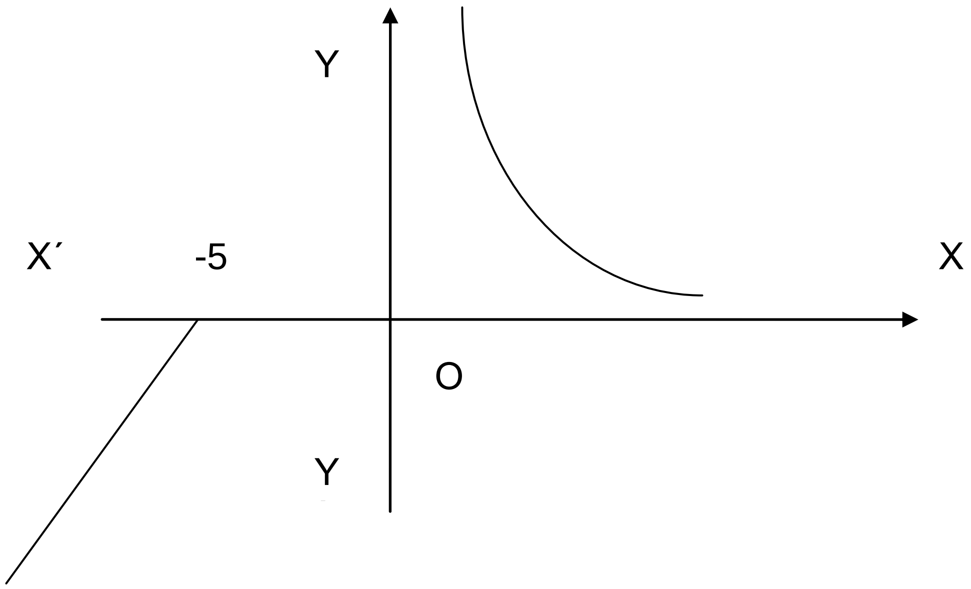
IV)Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα τότε και η συνάρτηση $g=f^4$ είναι γνησίως αύξουσα

V) Αν η συνάρτηση f:[2,+∞)→IR με f(2)=0 είναι γνησίως αύξουσα τότε η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα X΄X

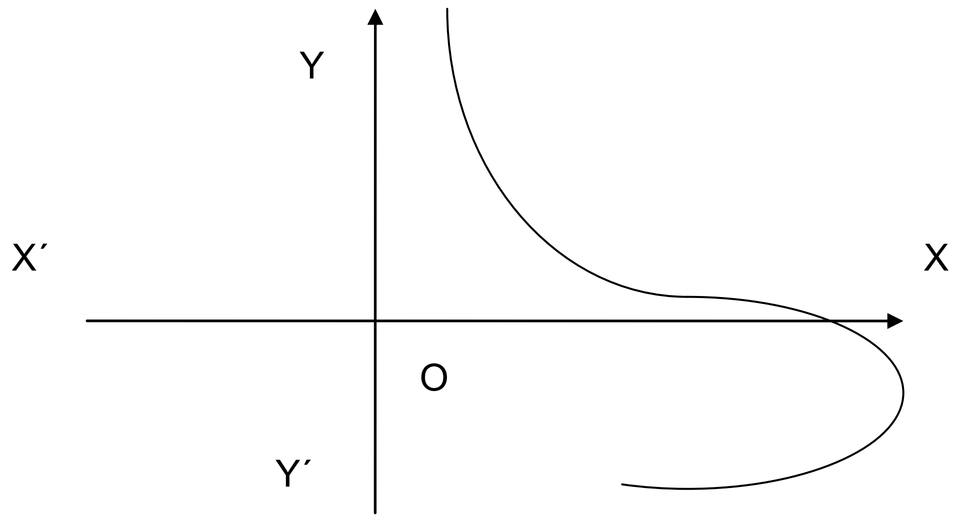
2.

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως (Σ) ή (Λ)

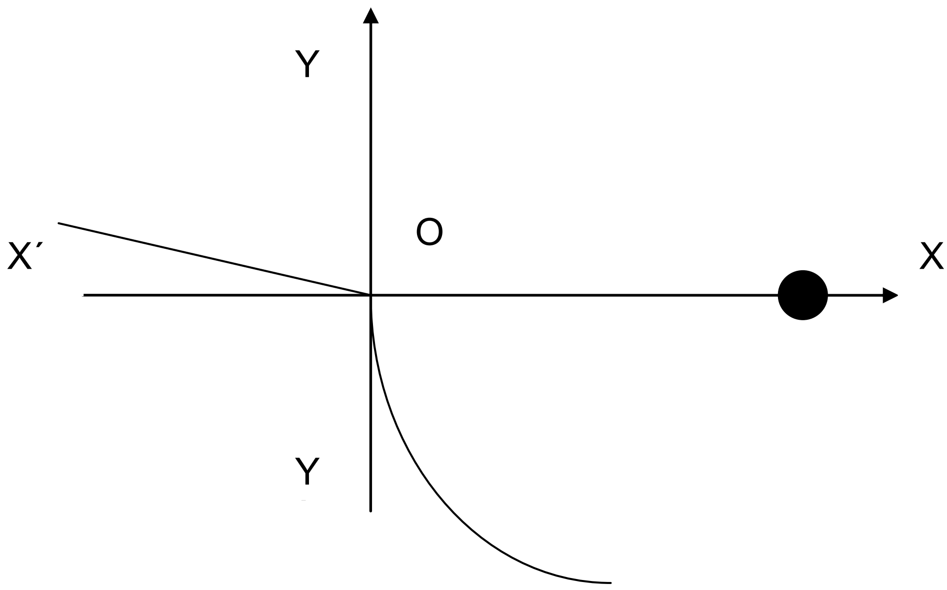
I)Το πεδίο ορισμού της παρακάτω συνάρτησης είναι το (–∞,–5]U(0,+ ∞)



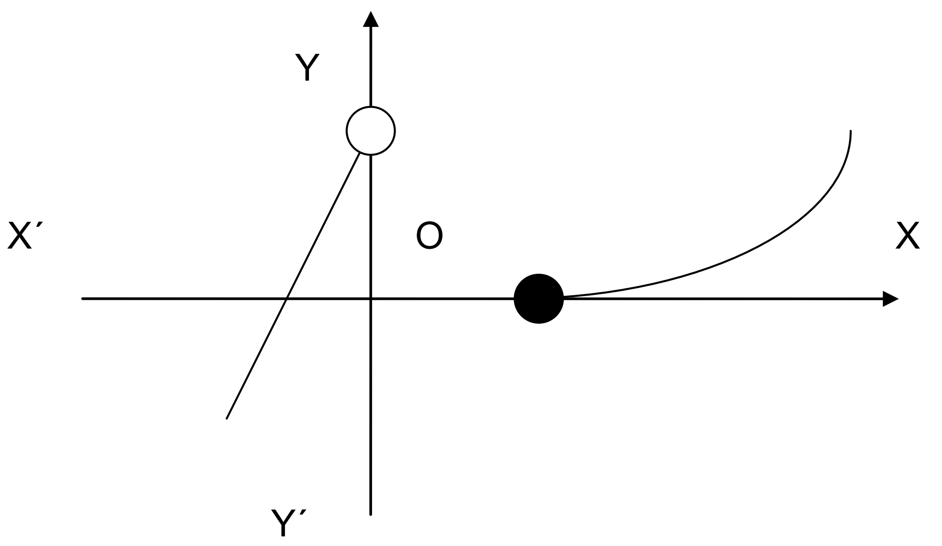
II)Η παρακάτω καμπύλη δεν είναι γραφική παράσταση μιάς συνάρτησης



III)Η συνάρτηση f είναι «1-1»



IV) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα



V)
Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στα σύνολα A_1,A_2 δεν έπεται αναγκαστικά ότι θα είναι γνησίως φθίνουσα στο $A_1 U A_2$

3.

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως (Σ) ή (Λ)
I) Αν (f–3)(g–4)=0 τότε : (f=3ήg=4)
II) Αν |f|=4 τότε : (f(x)=4ήf(x)=–4)
III)Για δυο τυχαίες συναρτήσεις f,g ισχύει : (3f)og= go(3f)
IV)Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα τότε και η συνάρτηση $g=f^8$ είναι γνησίως αύξουσα
V) Αν η συνάρτηση f:[3,+∞)→IR με f(3)=0 είναι γνησίως αύξουσα τότε η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα Χ΄Χ