ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ

$\Pi\omega\varsigma\ \theta\alpha\ \beta\rho\acute{\omega}\ \tau o\ \sigma\acute{\upsilon}\nu o\lambda o\ \tau\iota\mu\acute{\omega}\nu\ \tau\eta\varsigma\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\varsigma\ f$

$\downarrow$

$\Theta\alpha\ \beta\rho\acute{\omega}\ \tau o\ \pi\varepsilon\delta\acute{\iota}o\ o\rho\iota\sigma\mu o\acute{\upsilon}\ D_f\ \tau\eta\varsigma\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\varsigma\ f$

$\downarrow$

$\Lambda\acute{\upsilon}\nu\omega\ \tau\eta\nu\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\eta\ y=f(x)\ \omega\varsigma\ \pi\rho o\varsigma\ x.\acute{E}\sigma\tau\omega\ x=g(y)$

$\downarrow$

$x\in D_f \Leftrightarrow g(y)\in D_f \Leftrightarrow (\Pi\rho o\sigma\delta\iota o\rho\acute{\iota}\zeta\omega\ \pi o\upsilon\ \alpha\nu\acute{\eta}\kappa\varepsilon\iota\ \tau o\ y)\Leftrightarrow$
$(\mathrm{T}o\ \sigma\acute{\upsilon}\nu o\lambda o\ \pi o\upsilon\ \alpha\nu\acute{\eta}\kappa\varepsilon\iota\ \tau o\ y\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \tau o\ \sigma\acute{\upsilon}\nu o\lambda o\ \tau\iota\mu\acute{\omega}\nu\ \tau\eta\varsigma\ f)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1.

$\mathrm{N}\alpha\ \beta\rho\varepsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\ \tau o\ \sigma\acute{\upsilon}\nu o\lambda o\ \tau\iota\mu\acute{\omega}\nu\ \tau\eta\varsigma\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\varsigma\ f(x)=\dfrac{5x-7}{x+1}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}: x+1\neq 0\}$

$\Theta\varepsilon\omega\rho\acute{\omega}\ \tau\eta\nu\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta\ x+1=0$

$x+1=0\Leftrightarrow x=-1$

$x\in D_f \Leftrightarrow x+1\neq 0\Leftrightarrow x\neq -1\Leftrightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$

$D_f=(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$

$$y=f(x)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} y=\dfrac{2x-3}{x-1}\\ x\neq 1\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} y(x-1)=2x-3\\ x\neq 1\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} yx-y=2x-3\\ x\neq 1\end{array}\right\}\overset{\substack{\text{Μεταφέρω όλα}\\ \text{τα x στο πρώτο}\\ \text{μέλος και όλα}\\ \text{τα y στο δεύτερο}\\ \text{μέλος}}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} yx-2x=y-3\\ x\neq 1\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} x(y-2)=y-3\,(1)\\ x\neq 1\end{array}\right\}$$

$\acute{E}\sigma\tau\omega\ y-2=0.\mathrm{T}\acute{o}\tau\varepsilon\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$y-2=0\Leftrightarrow y=2$

$\Theta\acute{\varepsilon}\tau\omega\ y=2\ \sigma\tau\eta\nu\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\eta\ (1):$

$x(y-2)=y-3\overset{y=2}{\Leftrightarrow}x(2-2)=2-3\Leftrightarrow 0x=-1(\mathrm{A}\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau\eta)$

$\Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma\ y-2\neq 0\Leftrightarrow y\neq 2$

$Οπότε\ θα\ έχω:$

$$\begin{Bmatrix} x(y-2)=y-3 \\ x\neq 1 \\ y\neq 2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x=\dfrac{y-3}{y-2} \\ x\neq 1 \\ y\neq 2 \end{Bmatrix}$$

$$Θεωρώ\ την\ εξίσωση: \begin{Bmatrix} \dfrac{y-3}{y-2}=1 \\ y\neq 2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y-2=y-3 \\ y\neq 2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 0y=-1(\text{Αδύνατη}) \\ y\neq 2 \end{Bmatrix}$$

$$Οπότε: \begin{Bmatrix} x=\dfrac{y-3}{y-2} \\ y\neq 2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x=\dfrac{y-3}{y-2} \\ y\in(-\infty,2)\cup(2,+\infty) \end{Bmatrix}$$

$Άρα: f(D_f)=(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$

2.

$$\boxed{Να\ βρεθεί\ το\ σύνολο\ τιμών\ της\ συνάρτησης\ f(x)=\frac{x^2+4}{x^2+x+1}}$$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}: x^2+x+1\neq 0\}$

$Θεωρώ\ την\ δευτεροβάθμια\ εξίσωση: x^2+x+1=0\ (1)$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=1^2-4\cdot1\cdot1=1-4=-3<0$

$Επειδή\ \Delta<0\ η\ δευτεροβάθμια\ εξίσωση\ (1)\ δεν\ έχει\ πραγματικές\ ρίζες.$

$Οπότε\ x^2+x+1\neq 0\ για\ κάθε\ x\in\mathbb{R}.\ Συνεπώς\ D_f=\mathbb{R}$

$$f(x)=\frac{x^2+4}{x^2+x+1}\Leftrightarrow y=\frac{x^2+4}{x^2+x+1}\Leftrightarrow y\left(x^2+x+1\right)=x^2+4\Leftrightarrow$$

$$yx^2+yx+y-x^2-4=0$$

$$\Leftrightarrow (y-1)x^2+yx+y-4=0\ (2)$$

$$Διακρίνω\ τις\ περιπτώσεις: \begin{Bmatrix} (\text{I})\ y-1=0 \\ (\text{II})\ y-1\neq 0 \end{Bmatrix}$$

$Περίπτωση\ (\text{I}): y-1=0\Leftrightarrow y=1$

$Αν\ y=1\ τότε\ η\ εξίσωση\ (2)\ γίνεται:$

$\left(y-1\right)x^2+yx+y-4=0\overset{y=1}{\Longleftrightarrow}\left(1-1\right)x^2+x+1-4=0\Leftrightarrow x=3$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon:1\in f\left(D_f\right)$

$\Pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\pi\tau\omega\sigma\eta\left(\mathrm{II}\right):y-1\neq 0\Leftrightarrow y\neq 1$

Τότε *η δευτεροβάθμια εξίσωση* $\left(2\right)$ *έχει λύση στο* $\mathbb{R}$. Ο*πότε θα ισχυει* :

$$\begin{Bmatrix}\Delta\geq 0\\ y\neq 1\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}\beta^2-4\alpha\gamma\geq 0\\ y\neq 1\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}y^2-4\left(y-1\right)\left(y-4\right)\geq 0\\ y\neq 1\end{Bmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}y^2-4\left(y^2-5y+4\right)\geq 0\\ y\neq 1\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}y^2-4y^2+20y-16\geq 0\\ y\neq 1\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}-3y^2+20y-16\geq 0\\ y\neq 1\end{Bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}-\left(3y^2-20y+16\right)\geq 0\\ y\neq 1\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}3y^2-20y+16\leq 0\\ y\neq 1\end{Bmatrix}$$

Θ*εωρώ την δευτεροβάθμια εξίσωση* : $y^2-20y+16=0\left(3\right)$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=\left(-20\right)^2-4\bullet 3\bullet 16=400-12\bullet 16=4\bullet 100-4\bullet 3\bullet 16=4\left(100-3\bullet 16\right)=$

$4\left(100-48\right)=4\bullet 52=4\bullet 4\bullet 13=4^2\bullet 13>0$

Ε*πειδή* $\Delta>0$ *η δευτεροβάθμια εξίσωση* $\left(3\right)$ *έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες* :

$$y_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-\left(-20\right)\pm\sqrt{4^2\bullet 13}}{2\bullet 3}=\frac{20\pm 4\sqrt{13}}{2\bullet 3}=\frac{\cancel{2}\left(10\pm 2\sqrt{13}\right)}{\cancel{2}\bullet 3}=$$

$$\frac{10\pm 2\sqrt{13}}{3}=\begin{matrix}\nearrow\frac{10+2\sqrt{13}}{3}\\ \searrow\frac{10-2\sqrt{13}}{3}\end{matrix}$$

y	$-\infty$	$\frac{10-2\sqrt{13}}{3}$		$\frac{10+2\sqrt{13}}{3}$	$+\infty$
$3y^2-10y+16$	$+$	0	$-$	0	$-$

$$-2\sqrt{13}<2\sqrt{13}\Rightarrow 10-2\sqrt{13}<10+2\sqrt{13}\Rightarrow\frac{10-2\sqrt{13}}{2}<\frac{10+2\sqrt{13}}{2}$$

$$\begin{Bmatrix} 3y^2-20y+16\le 0 \\ y\neq 1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \dfrac{10-2\sqrt{13}}{3}\le y\le \dfrac{10+2\sqrt{13}}{3} \\ y\neq 1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$y\in\left[\frac{10-2\sqrt{13}}{3},1\right)\cup\left(1,\frac{10+2\sqrt{13}}{3}\right]$$

$$\left(\begin{array}{l} \dfrac{10-2\sqrt{13}}{3}\le 1\Leftrightarrow 10-2\sqrt{13}\le 3\Leftrightarrow -2\sqrt{13}\le -7\Leftrightarrow 2\sqrt{13}\ge 7\Leftrightarrow \left(2\sqrt{13}\right)^2\ge 7^2\Leftrightarrow \\ 4\bullet 13\ge 49\Leftrightarrow 52\ge 49(\text{Ισχύει}) \\ 1\le \dfrac{10+2\sqrt{13}}{3}\Leftrightarrow 3\le 10+2\sqrt{13}\Leftrightarrow 10+2\sqrt{13}\ge 3\Leftrightarrow 2\sqrt{13}\ge -7(\text{Ισχύει}) \end{array}\right)$$

Οπότε απο τις $(\mathrm{I}),(\mathrm{II})$ περιπτώσεις θα έχω:

$$y=1 \text{ ή } y\in\left[\frac{10-2\sqrt{13}}{3},1\right)\cup\left(1,\frac{10+2\sqrt{13}}{3}\right]\Leftrightarrow y\in\left[\frac{10-2\sqrt{13}}{3},\frac{10+2\sqrt{13}}{3}\right]$$

3.

Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f:[2,3]\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x^2-4x+7$

$D_f=[2,3]$

$$\begin{Bmatrix} y=f(x) \\ x\in[2,3] \end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix} y=x^2-4x+7 \\ x\in[2,3] \end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix} x^2-4x+7-y=0(1) \\ x\in[2,3] \end{Bmatrix}$$

Επειδή η δευθτεροβάθμια εξίσωση (1) έχει λύση στο $\mathbb{R}$ θα πρέπει να ισχύει:

$$\Delta\ge 0\Leftrightarrow \beta^2-4\alpha\gamma\ge 0\Leftrightarrow(-4)^2-4(7-y)\ge 0\Leftrightarrow 16-4(7-y)\ge 0\Leftrightarrow$$

$$4\left[4-(7-y)\right]\ge 0\ge 0\Leftrightarrow 4(y-3)\Leftrightarrow y-3\ge 0\Leftrightarrow y\ge 3$$

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{4\pm\sqrt{4(y-3)}}{2}=\frac{4\pm 2\sqrt{y-3}}{2}=\frac{\cancel{2}\left(2\pm\sqrt{y-3}\right)}{\cancel{2}}=$$

$$=2\pm\sqrt{y-3}=\begin{matrix}\nearrow 2-\sqrt{y-3} \\ \searrow 2+\sqrt{y-3}\end{matrix}$$

Αν $x=2-\sqrt{y-3}$:

$$\left\{\begin{array}{l} x=2-\sqrt{y-3} \\ 2\le x\le 3 \\ y\ge 3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2-\sqrt{y-3} \\ 2\le 2-\sqrt{y-3}\le 3 \\ y\ge 3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2-\sqrt{y-3} \\ 0\le -\sqrt{y-3}\le 1 \\ y\ge 3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} x=2-\sqrt{y-3} \\ -1\le \sqrt{y-3}\le 0 \\ y\ge 3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2-\sqrt{y-3} \\ \sqrt{y-3}\le 0 \\ \sqrt{y-3}\ge 0 \\ y\ge 3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2-\sqrt{y-3} \\ \sqrt{y-3}=0 \\ y\ge 3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2-\sqrt{y-3} \\ y-3=0 \\ y\ge 3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} x=2-\sqrt{y-3} \\ y=3 \\ y\ge 3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2-\sqrt{3-3} \\ y=3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2 \\ y=3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow f(2)=3 \Leftrightarrow 3\in f\left(D_f\right)$$

$\text{Αν } x=2+\sqrt{y-3}:$

$$\left\{\begin{array}{l} x=2+\sqrt{y-3} \\ 2\le x\le 3 \\ y\ge 3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2+\sqrt{y-3} \\ 2\le 2+\sqrt{y-3}\le 3 \\ y\ge 3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2+\sqrt{y-3} \\ 0\le \sqrt{y-3}\le 1 \\ y\ge 3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2+\sqrt{y-3} \\ 0^2\le \left(\sqrt{y-3}\right)^2\le 1^2 \\ y\ge 3 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2+\sqrt{y-3} \\ 0\le y-3\le 1 \\ y\ge 3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2+\sqrt{y-3} \\ 3\le y\le 4 \\ y\ge 3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2+\sqrt{y-3} \\ y\in[3,4] \end{array}\right\}$$

$\text{Οπότε}: y\in[3,4] \text{ ή } y=3 \Leftrightarrow y\in[3,4]$

$\text{Άρα}: f\left(D_f\right)=[3,4]$

4.

Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}: x^2+1\ge 0, \sqrt{x^2+1}+x>0\right\}$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ θα έχω:

$x^2\ge 0 \Rightarrow x^2+1\ge 1>0 \Rightarrow x^2+1>0$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ θα έχω:

$$1>0 \Rightarrow x^2+1>x^2 \Rightarrow \sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2} \overset{\sqrt{\alpha^2}=|\alpha|}{\Longrightarrow} \sqrt{x^2+1}>|x| \overset{|\alpha|=|-\alpha|}{\Longrightarrow} \sqrt{x^2+1}>|-x| \overset{|\alpha|\geq\alpha}{\Longrightarrow}$$

$$\sqrt{x^2+1}>|-x|\geq -x \Rightarrow \sqrt{x^2+1}>-x \Rightarrow \sqrt{x^2+1}+x>0$$

$\text{Οπότε}: D_f=\mathbb{R}$

$$y=f(x) \Leftrightarrow y=\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}+x=e^y \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\sqrt{x^2+1}=e^y-x\\ e^y-x\geq 0\end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2=\left(e^y-x\right)^2\\ e^y-x\geq 0\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\cancel{x^2}+1=\left(e^y\right)^2-2e^yx+\cancel{x^2}\\ e^y-x\geq 0\end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}2e^yx=e^{2y}-1\\ e^y-x\geq 0\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=\dfrac{e^{2y}-1}{2e^y}\\ e^y-x\geq 0\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=\dfrac{e^{2y}-1}{2e^y}\\ e^y-\dfrac{e^{2y}-1}{2e^y}\geq 0\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=\dfrac{e^{2y}-1}{2e^y}\\ \dfrac{2e^ye^y}{2e^y}-\dfrac{e^{2y}-1}{2e^y}\geq 0\end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}x=\dfrac{e^{2y}-1}{2e^y}\\ \dfrac{2e^{2y}-e^{2y}+1}{2e^y}\geq 0\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=\dfrac{e^{2y}-1}{2e^y}\\ \dfrac{2e^{2y}+1}{2e^y}\geq 0\end{array}\right\} \Leftrightarrow x=\frac{e^{2y}-1}{2e^y}$$

$\text{Οπότε}: f\left(D_f\right)=\mathbb{R}$

5.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x+\lambda}{x^2+1}$.*Να βρεθεί ο* $\lambda\in\mathbb{R}$ *ώστε το σύνολο τιμών της* f *να είναι το διάστημα* $\left[-\dfrac{1}{4},1\right]$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}: x^2+1\neq 0\right\}$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ *θα έχω*:

$$x^2\geq 0 \Rightarrow x^2+1\geq 1>0 \Rightarrow x^2+1>0 \Rightarrow x^2+1\neq 0$$

$\text{Οπότε}: D_f=\mathbb{R}$

$$y=f(x) \Leftrightarrow y=\frac{x+\lambda}{x^2+1} \Leftrightarrow y\left(x^2+1\right)-x-\lambda=0 \Leftrightarrow yx^2-x+y-\lambda=0\,(1)$$

Διακρίνω τις περιπτώσεις: $\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\ y=0\\ (\mathrm{II})\ y\neq 0\end{array}\right\}$

$\Pi\varepsilon\rho i\pi\tau\omega\sigma\eta\left(\mathrm{I}\right): y=0$

$\mathrm{A}\nu\ y=0\ \eta\ \varepsilon\xi i\sigma\omega\sigma\eta\ \left(1\right)\ \gamma i\nu\varepsilon\tau\alpha\iota:$

$$yx^2-x+y-\lambda=0\overset{y=0}{\Longleftrightarrow}0x^2-x+0-\lambda=0\Leftrightarrow-\left(x+\lambda\right)=0\Leftrightarrow x+\lambda=0\Leftrightarrow x=-\lambda$$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon: 0\in f\left(D_f\right)$

$\Pi\varepsilon\rho i\pi\tau\omega\sigma\eta\left(\mathrm{II}\right): y\neq 0$

$\mathrm{T}\acute{o}\tau\varepsilon\ \eta\ \delta\varepsilon\upsilon\tau\varepsilon\rho o\beta\acute{\alpha}\theta\mu\iota\alpha\ \varepsilon\xi i\sigma\omega\sigma\eta\ \left(1\right)\ \acute{\varepsilon}\chi\varepsilon\iota\ \lambda\acute{\upsilon}\sigma\eta\ \sigma\tau o\ \mathbb{R}.\ \mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \theta\alpha\ \iota\sigma\chi\upsilon\varepsilon\iota:$

$$\begin{Bmatrix}\Delta\geq 0\\ y\neq 1\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}\beta^2-4\alpha\gamma\geq 0\\ y\neq 1\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}\left(-1\right)^2-4y\left(y-\lambda\right)\geq 0\\ y\neq 1\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}-4y^2+4y\lambda+1\geq 0\\ y\neq 1\end{Bmatrix}$$

$\Theta\varepsilon\omega\rho\acute{\omega}\ \tau\eta\nu\ \delta\varepsilon\upsilon\tau\varepsilon\rho o\beta\acute{\alpha}\theta\mu\iota\alpha\ \varepsilon\xi i\sigma\omega\sigma\eta: -4y^2+4\lambda y+1=0\left(2\right)$

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=\left(4\lambda\right)^2-4\bullet\left(-4\right)\bullet 1=16\lambda^2+16=16\left(\lambda^2+1\right)$$

$$\lambda^2\geq 0\Rightarrow\lambda^2+1\geq 1>0\Rightarrow\lambda^2+1>0\Rightarrow 16\left(\lambda^2+1\right)>0\Rightarrow\Delta>0$$

$\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \Delta>0\ \eta\ \delta\varepsilon\upsilon\tau\varepsilon\rho o\beta\acute{\alpha}\theta\mu\iota\alpha\ \varepsilon\xi i\sigma\omega\sigma\eta\ \left(2\right)\ \acute{\varepsilon}\chi\varepsilon\iota\ \delta\upsilon o\ \rho i\zeta\varepsilon\varsigma\ \pi\rho\alpha\gamma\mu\alpha\tau\iota\kappa\acute{\varepsilon}\varsigma$ $\kappa\alpha\iota\ \acute{\alpha}\nu\iota\sigma\varepsilon\varsigma:$

$$y_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-4\lambda\pm\sqrt{16\left(\lambda^2+1\right)}}{2\left(-4\right)}=\frac{-4\lambda\pm 4\sqrt{\lambda^2+1}}{2\left(-4\right)}=\frac{\cancel{-4}\left(\lambda\mp\sqrt{\lambda^2+1}\right)}{2\left(\cancel{-4}\right)}=$$

$$=\frac{\lambda\mp\sqrt{\lambda^2+1}}{2}=\frac{\lambda\pm\sqrt{\lambda^2+1}}{2}=\begin{matrix}\nearrow\frac{\lambda+\sqrt{\lambda^2+1}}{2}\\ \searrow\frac{\lambda-\sqrt{\lambda^2+1}}{2}\end{matrix}$$

$$\sqrt{\lambda^2+1}>0\Rightarrow\begin{Bmatrix}-\sqrt{\lambda^2+1}<0\\ \sqrt{\lambda^2+1}>0\end{Bmatrix}\Rightarrow-\sqrt{\lambda^2+1}<\sqrt{\lambda^2+1}\Rightarrow\lambda-\sqrt{\lambda^2+1}<\lambda+\sqrt{\lambda^2+1}\Rightarrow$$

$$\frac{\lambda-\sqrt{\lambda^2+1}}{2}<\frac{\lambda+\sqrt{\lambda^2+1}}{2}$$

y	$-\infty$		$\frac{\lambda-\sqrt{\lambda^2+1}}{2}$		$\frac{\lambda+\sqrt{\lambda^2+1}}{2}$		$+\infty$
$-4y^2+4y\lambda+1$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$\left\{\begin{matrix} -4y^2+4y\lambda+1\ge 0 \\ y\ne 1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \dfrac{\lambda-\sqrt{\lambda^2+1}}{2}\le y\le \dfrac{\lambda+\sqrt{\lambda^2+1}}{2} \\ y\ne 1 \end{matrix}\right\}$$

$\text{Απο τις περιπτώσεις } (1),(\text{II}) \text{ θα έχω}:$

$$\left\{\left(\begin{matrix} \dfrac{\lambda-\sqrt{\lambda^2+1}}{2}\le y\le \dfrac{\lambda+\sqrt{\lambda^2+1}}{2} \\ y\ne 1 \end{matrix}\right) \acute{\eta} (y=1)\right\} \Leftrightarrow y\in\left[\dfrac{\lambda-\sqrt{\lambda^2+1}}{2},\dfrac{\lambda+\sqrt{\lambda^2+1}}{2}\right]$$

$$\text{Συνεπώς } f\left(D_f\right)=\left[\dfrac{\lambda-\sqrt{\lambda^2+1}}{2},\dfrac{\lambda+\sqrt{\lambda^2+1}}{2}\right]$$

Επειδή το σύνολο τιμών της τιμών της f να είναι το διάστημα $\left[-\dfrac{1}{4},1\right]$

θα έχω:

$$\left\{\begin{matrix} \dfrac{\lambda-\sqrt{\lambda^2+1}}{2}=-\dfrac{1}{4} \\ \dfrac{\lambda+\sqrt{\lambda^2+1}}{2}=1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \lambda-\sqrt{\lambda^2+1}=-\dfrac{2}{4}=-\dfrac{1}{2} \\ \lambda+\sqrt{\lambda^2+1}=2 \end{matrix}\right\} \overset{(+)}{\Leftrightarrow}$$

$$\left\{\begin{matrix} \lambda-\sqrt{\lambda^2+1}+\lambda+\sqrt{\lambda^2+1}=-\dfrac{1}{2}+2 \\ \lambda+\sqrt{\lambda^2+1}=2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} 2\lambda=\dfrac{3}{2} \\ \lambda+\sqrt{\lambda^2+1}=2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix} \lambda=\dfrac{3}{4} \\ \lambda+\sqrt{\lambda^2+1}=2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \lambda=\dfrac{3}{4}$$

$$\text{Γιατι αν } \lambda=\frac{3}{4} \text{ θα έχω}: \lambda+\sqrt{\lambda^2+1}=\frac{3}{4}+\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2+1}=\frac{3}{4}+\sqrt{\frac{25}{16}}=\frac{3}{4}+\frac{5}{4}=\frac{8}{4}=2$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{2x-3}{x-2}$

2.

Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x^2-2x+4}$

3.

Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f:[1,2]\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x^2+4x+5$

4.

Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

5.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-\kappa x+\lambda}{x^2+1}$, $\lambda\in\mathbb{R},\kappa\in\mathbb{R}^*$. Να βρεθούν τα κ,λ όταν $f\left(D_f\right)=[-2,3]$