ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

ΕΥΡΕΣΗ ΤΗΣ C_f ΟΤΑΝ ΙΣΧΥΕΙ $f(x)=g(x)+c$

(I) *Για να βρω την* C_f *όταν* $f(x)=g(x)+c, c>0$ *μεταφέρω την* C_g *παράλληλα με τον εαυτό της πάνω στο άξονα* $y'y$ *κατα* $|c|$ *μονάδες προς τα πάνω*

(I) *Για να βρω την* C_f *όταν* $f(x)=g(x)+c, c<0$ *μεταφέρω την* C_g *παράλληλα με τον εαυτό της πάνω στο άξονα* $y'y$ *κατα* $|c|$ *μονάδες προς τα κάτω*

ΜΕ ΑΠΛΑ ΛΟΓΙΑ

Για να βρώ την C_f *όταν* $f(x)=g(x)+c$ *μεταφέρω την* C_g *παράλληλα με τον εαυτό της πάνω στο άξονα* $y'y$ *κατα* $|c|$ *μονάδες "σύμφωνα με το πρόσημο της* c*"*

Σύμφωνα με το πρόσημο της c *δηλ. αν το* $c>0$ *μεταφέρω την* C_g *παράλληλα με τον εαυτό της πάνω στο άξονα* $y'y$ *προς τα πάνω ενω αν* $c<0$ *μεταφέρω την* C_g *παράλληλα με τον εαυτό της πάνω στο άξονα* $y'y$ *προς τα κάτω*

ΕΥΡΕΣΗ ΤΗΣ C_f ΟΤΑΝ ΙΣΧΥΕΙ $f(x)=g(x+c)$

(I) *Για να βρω την* C_f *όταν* $f(x)=g(x+c), c>0$ *μεταφέρω την* C_g *παράλληλα με τον εαυτό της πάνω στο άξονα* $x'x$ *κατα* $|c|$ *μονάδες προς τα αριστερά*

(I) *Για να βρω την* C_f *όταν* $f(x)=g(x+c), c<0$ *μεταφέρω την* C_g *παράλληλα με τον εαυτό της πάνω στο άξονα* $x'x$ *κατα* $|c|$ *μονάδες προς τα δεξιά*

ΜΕ ΑΠΛΑ ΛΟΓΙΑ

$\Gamma\iota\alpha\ \nu\alpha\ \beta\rho\acute{\omega}\ \tau\eta\nu\ C_f\ \acute{o}\tau\alpha\nu\ f(x)=g(x+c)\ \mu\varepsilon\tau\alpha\varphi\acute{\varepsilon}\rho\omega\ \tau\eta\nu\ C_g\ \pi\alpha\rho\acute{\alpha}\lambda\lambda\eta\lambda\alpha$
$\mu\varepsilon\ \tau o\nu\ \varepsilon\alpha\upsilon\tau\acute{o}\ \tau\eta\varsigma\ \pi\acute{\alpha}\nu\omega\ \sigma\tau o\ \acute{\alpha}\xi o\nu\alpha\ x'x\ \kappa\alpha\tau\alpha\ |c|\ \mu o\nu\acute{\alpha}\delta\varepsilon\varsigma$ "$\alpha\nu\tau\acute{\iota}\theta\varepsilon\tau\alpha\ \mu\varepsilon$
$\tau o\ \pi\rho\acute{o}\sigma\eta\mu o\ \tau\eta\varsigma\ c$"
$\mathrm{A}\nu\tau\acute{\iota}\theta\varepsilon\tau\alpha\ \mu\varepsilon\ \tau o\ \pi\rho\acute{o}\sigma\eta\mu o\ \tau\eta\varsigma\ c\ \delta\eta\lambda.\ \alpha\nu\ \tau o\ c>0\ \mu\varepsilon\tau\alpha\varphi\acute{\varepsilon}\rho\omega\ \tau\eta\nu\ C_g$
$\pi\alpha\rho\acute{\alpha}\lambda\lambda\eta\lambda\alpha\ \mu\varepsilon\ \tau o\nu\ \varepsilon\alpha\upsilon\tau\acute{o}\ \tau\eta\varsigma\ \pi\acute{\alpha}\nu\omega\ \sigma\tau o\ \acute{\alpha}\xi o\nu\alpha\ x'x\ \pi\rho o\varsigma\ \tau\alpha\ \alpha\rho\iota\sigma\tau\varepsilon\rho\acute{\alpha}\ \varepsilon\nu\omega$
$\alpha\nu\ c<0\ \mu\varepsilon\tau\alpha\varphi\acute{\varepsilon}\rho\omega\ \tau\eta\nu\ C_g\ \pi\alpha\rho\acute{\alpha}\lambda\lambda\eta\lambda\alpha\ \mu\varepsilon\ \tau o\nu\ \varepsilon\alpha\upsilon\tau\acute{o}\ \tau\eta\varsigma\ \pi\acute{\alpha}\nu\omega\ \sigma\tau o\ \acute{\alpha}\xi o\nu\alpha$
$x'x\ \pi\rho o\varsigma\ \tau\alpha\ \delta\varepsilon\xi\iota\acute{\alpha}$

ΕΥΡΕΣΗ ΤΗΣ C_f ΟΤΑΝ $f(x)=-g(x)$

$\mathrm{A}\nu\ f(x)=-g(x)\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ C_f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \eta\ \sigma\upsilon\mu\mu\varepsilon\tau\rho\iota\kappa\acute{\eta}\ \tau\eta\varsigma\ C_g\ \omega\varsigma\ \pi\rho o\varsigma\ \tau o\nu\ \acute{\alpha}\xi o\nu\alpha\ x'x$

ΕΥΡΕΣΗ ΤΗΣ C_f ΟΤΑΝ $f(x)=|g(x)|$

$\Gamma\iota\alpha\ \nu\alpha\ \beta\rho\omega\ \tau\eta\nu\ C_f\ \acute{o}\tau\alpha\nu\ f(x)=|g(x)|\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon:$

$$\begin{Bmatrix} (\mathrm{I})\ \mathrm{A}\nu\ g(x)\geq 0\ \eta\ C_f\ \kappa\alpha\iota\ \eta\ C_g\ \tau\alpha\upsilon\tau\acute{\iota}\zeta o\nu\tau\alpha\iota \\ (\mathrm{I})\ \mathrm{A}\nu\ g(x)<0\ \eta\ C_f\ \kappa\alpha\iota\ \eta\ \sigma\upsilon\mu\mu\varepsilon\tau\rho\iota\kappa\acute{\eta}\ \tau\eta\varsigma\ C_g\ \omega\varsigma\ \tau o\nu\ \acute{\alpha}\xi o\nu\alpha\ x'x \end{Bmatrix}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1.

$\mathrm{A}\nu\ f(x)=x^3-2x^2-5x+6\ \nu\alpha\ \beta\rho\varepsilon\theta o\acute{\upsilon}\nu\ \tau\alpha\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}\alpha\ \tau o\mu\acute{\eta}\varsigma\ \tau\eta\varsigma\ C_f$
$\mu\varepsilon\ \tau o\upsilon\varsigma\ \acute{\alpha}\xi o\nu\varepsilon\varsigma\ x'x\ \kappa\alpha\iota\ y'y$

$D_f=\mathbb{R}$

$\mathrm{A}\nu\ \mathrm{A}(x,y)\in x'x\cap C_f.\ \mathrm{T}\acute{o}\tau\varepsilon\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\mathrm{A}(x,y)\in x'x\cap C_f \Leftrightarrow \begin{Bmatrix}\mathrm{A}(x,y)\in x'x \\ \mathrm{A}(x,y)\in C_f\end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y=0 \\ y=f(x)\end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y=0 \\ f(x)=0\end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} y=0 \\ x^3-2x^2-5x+6=0(1)\end{Bmatrix}$$

Έστω ρ ακέραια ρίζα την πολυωνυμικής εξίσωσης (1).Ε*πειδή ρ ακέραια ρίζα μιας πολυωνυμικής εξίσωσης με ακεραίους συντελεστές θα πρέπει να διαιρεί το σταθερό όρο του πολυωνύμου.*Σ*υνεπώς οι πιθανές τιμές του ρ είναι* $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$. Α*ν* $\rho = 1$ *απο το σχήμα του Hörner θα έχω*:

1	-2	-5	6	$\rho = 1$
	$1 \bullet 1 = 1$	$-1 \bullet 1 = -1$	$-6 \bullet 1 = -6$	
1	$-2+1=-1$	$-1-5=-6$	$-6+6=0$	

Έχω: $\pi(x) = x^2 - x - 6, \upsilon(x) = 0$

Α*πο την ταυτότητη της* Ε*υκλείδειας διαίρεσης θα έχω*:

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x-\rho)\pi(x) + \upsilon(x) \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x-1)(x^2 - x - 6)(2)$$

Α*πο τις σχέσεις* $(1),(2)$ *θα έχω*:

$$(1) \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0 \overset{(2)}{\Longleftrightarrow} (x-1)(x^2 - x - 6) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x - 1 = 0 \\ \acute{\eta} \\ x^2 - x - 6 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 1 \\ \acute{\eta} \\ x^2 - x - 6 = 0 (3) \end{array} \right\}$$

Έχω: $x^2 - x - 6 = 0 (3)$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \bullet (-6) \bullet 1 = 1 + 24 = 25 > 0$

Ε*πειδή* $\Delta > 0$ *η δευτεροβάθμια εξίσωση* (3) *έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες*:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{array}{l} \nearrow \frac{1+5}{2} = 3 \\ \searrow \frac{1-5}{2} = -2 \end{array}$$

Σ*υνεπώς η* C_f *τέμνει τον άξονα* $x'x$ *στα σημεία* $\mathrm{A}_1(-2,0), \mathrm{A}_2(1,0), \mathrm{A}_3(3,0)$

Α*ν* $\mathrm{B}(x,y) \in y'y \cap C_f$.Τ*ότε θα έχω*:

$$\mathrm{B}(x,y)\in y'y\cap C_f \Leftrightarrow \begin{Bmatrix}\mathrm{B}(x,y)\in y'y\\ \mathrm{B}(x,y)\in C_f\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}x=0\\ y=f(0)\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}x=0\\ y=6\end{Bmatrix}$$

Συνεπώς η C_f *τέμνει τον άξονα* $y'y$ *στο σημείο* $\mathrm{B}(0,6)$

2.

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *για την οποία ισχύει*
$f^3(x)-3f^2(x)+7f(x)=x^2-5x+8$
Να δείξετε οτι η C_f *βρίσκεται πάνω απο τον άξονα* $x'x$ *για κάθε* $x\in\mathbb{R}$

$$f^3(x)-3f^2(x)+7f(x)=x^2-5x+8 \Leftrightarrow f(x)\left[f^2(x)-3f(x)+7\right]=x^2-5x+8$$

Θεωρώ το τριώνυμο t^2-3t+7

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-3)^2-4\bullet 1\bullet 7=9-28=-17$

Επειδή $\alpha=1>0$ *και* $\Delta<0$ *το τριώνυμο* t^2-3t+7 *είναι παντού θετικό*

Οπότε θα έχω $f^2(x)-3f(x)+7>0$ *για κάθε* $x\in\mathbb{R}$

Θεωρώ το τριώνυμο x^2-5x+8

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-5)^2-4\bullet 1\bullet 8=25-32=-7$

Επειδή $\alpha=1>0$ *και* $\Delta<0$ *το τριώνυμο* x^2-5x+8 *είναι παντού θετικό*

$$\begin{Bmatrix}f(x)\left[f^2(x)-3f(x)+7\right]=x^2-5x+8\\ f^2(x)-3f(x)+7>0\\ x^2-5x+8>0\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}f(x)=\dfrac{x^2-5x+8}{f^2(x)-3f(x)+7}\\ f^2(x)-3f(x)+7>0\\ x^2-5x+8>0\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$f(x)>0$

Συνεπώς η C_f *βρίσκεται πάνω απο τον άξονα* $x'x$ *για κάθε* $x\in\mathbb{R}$

3.

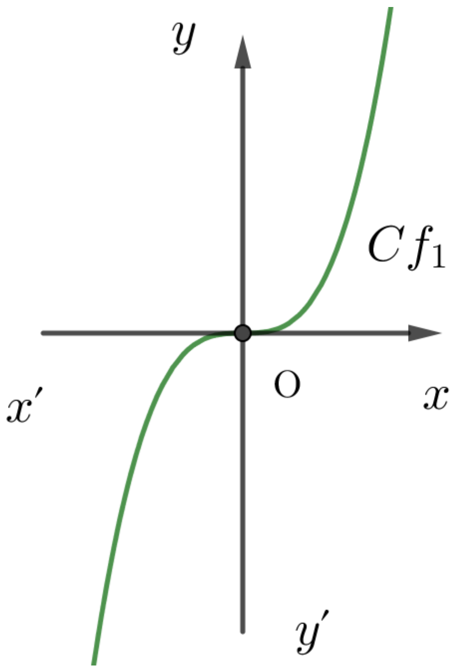
Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτηση $f(x)=x^3+3x^2+3x$

Έχω: $D_f=\mathbb{R}$

$$f(x)=x^3+3x^2+3x=x^3+3x^2+3x+1-1=x^3+3\bullet x^2\bullet 1+3\bullet x\bullet 1^2+1^3-1$$

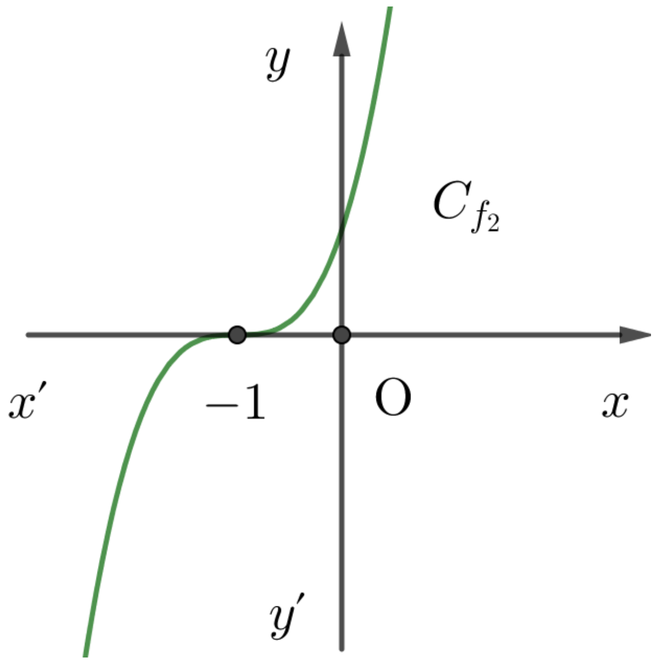
$$\overset{a^3+3\bullet a^2\bullet\beta+3\bullet\alpha\bullet\beta^2+\beta^3=(\alpha+\beta)^3}{=}(x+1)^3+1$$

Θεωρώ την συνάρτηση $f_1(x)=x^3$



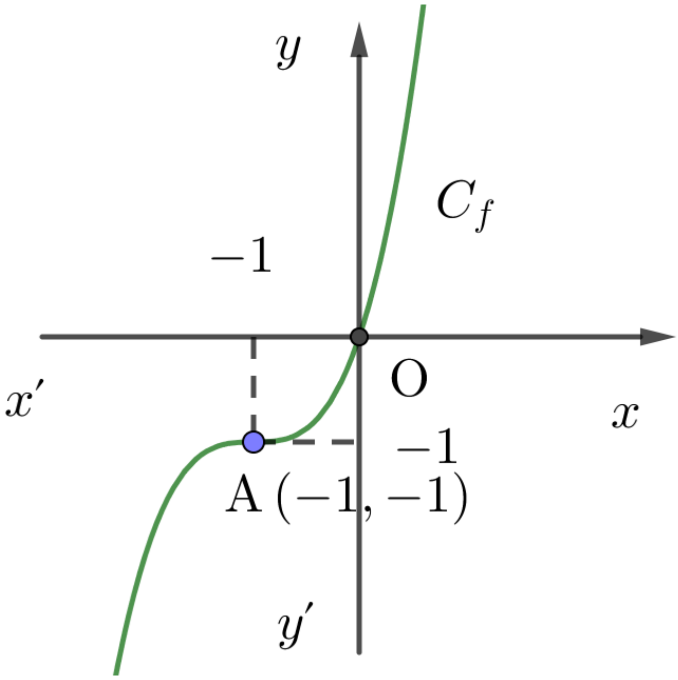
$\Theta\varepsilon\omega\rho\acute{\omega}\ \tau\eta\nu\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f_2(x) = f_1(x+1) = (x+1)^3$

$\Gamma\iota\alpha\ \nu\alpha\ \beta\rho\omega\ \tau\eta\nu\ C_{f_2}\ \mu\varepsilon\tau\alpha\varphi\acute{\varepsilon}\rho\omega\ \tau\eta\nu\ C_{f_1}\ \pi\acute{\alpha}\nu\omega\ \sigma\tau o\ \acute{\alpha}\xi o\nu\alpha\ x'x\ \kappa\alpha\tau\alpha\ 1-\mu o\nu\acute{\alpha}\delta\alpha$
$\pi\rho o\varsigma\ \tau\alpha\ \alpha\rho\iota\sigma\tau\varepsilon\rho\acute{\alpha}.$



$\acute{E}\chi\omega: f(x) = f_2(x) - 1 = (x+1)^3 - 1$

$\Gamma\iota\alpha\ \nu\alpha\ \beta\rho\omega\ \tau\eta\nu\ C_f\ \mu\varepsilon\tau\alpha\varphi\acute{\varepsilon}\rho\omega\ \tau\eta\nu\ C_{f_2}\ \pi\acute{\alpha}\nu\omega\ \sigma\tau o\ \acute{\alpha}\xi o\nu\alpha\ y'y\ \kappa\alpha\tau\alpha\ 1-\mu o\nu\acute{\alpha}\delta\alpha$
$\pi\rho o\varsigma\ \tau\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\tau\omega.$



4.

$Δίνεται\ η\ συνάρτηση\ f\ με\ τύπο\ f\left(x\right)=\lambda^2x^2-\lambda\left(\lambda-2\right)x+1-2\lambda,\lambda\in\mathbb{R}$
$Να\ αποδείξετε\ οτι\ η\ C_f\ διέρχεται\ απο\ ένα\ σταθερό\ σημείο$

$\left(\text{I}\right)$ Γράφω τον τύπο της f ως ένα πολυώνυμο δευτέρου με μεταβλητή το λ δηλ. $f\left(x\right)=\alpha\lambda^2+\beta\lambda+\gamma,\alpha,\beta,\gamma$: Παραστάσεις του x
$\left(\text{II}\right)$ Επειδή θέλω η C_f να περνάει απο σταθερό σημείο για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ θα πρέπει να ισχύει $\alpha=\beta=0$
$\left(\text{III}\right)$ Απο την σχέση $\alpha=\beta=0$ προσδιορίζω τα σταθερό σημείο

$$f\left(x\right)=\lambda^2x^2-\lambda\left(\lambda-2\right)x+1-2\lambda=\lambda^2x^2+\left(-\lambda^2+2\lambda\right)x+1-2\lambda=$$

$$\lambda^2x^2-\lambda^2x+2\lambda x+1-2\lambda=\lambda^2\left(x^2-x\right)+2\lambda\left(x-1\right)+1$$

Η C_f για να περνάει απο σταθερό σημείο για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ θα πρέπει οι συντελεστές του λ και λ^2 να είναι μηδέν.Συνεπώς θα ισχύει :

$$\begin{Bmatrix} x^2-x=0 \\ x-1=0 \end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix} x\left(x-1\right)=0 \\ x=1 \end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix} x=0\ ή\ x-1=0 \\ x=1 \end{Bmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} \begin{pmatrix} x=0 \\ x=1 \\ \left(Άτοπο\right) \end{pmatrix} ή\left(x=1\right) \end{Bmatrix}\Leftrightarrow x=1$$

$\text{Τότε } \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ f(1)=1. \text{Οπότε } \mathrm{A}(1,1)\in C_f\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ \lambda\in\mathbb{R}$

5.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x-x^2, x\in\mathbb{R}$

(I) *Να βρείτε τις τιμές του* $x\in\mathbb{R}$ *για τις οποίες η* C_f *βρίσκεται πάνω απο τον άξονα* $x'x$

(II) *Αν η* C_f *βρίσκεται κάτω απο την ευθεία* $y=-x+\kappa$ *για κάθε* $x\in\mathbb{R}$ *να αποδείξετε οτι* $\kappa>1$

(I) *Η* C_f *βρίσκεται πάνω απο τον άξονα* $x'x$ *όταν ισχύει:*

$f(x)>0 \Leftrightarrow x-x^2>0$

Θωρώ την δευτεροβάθμια εξίσωση: $x-x^2=0$

$$x-x^2=0 \Leftrightarrow x(1-x)=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x=0 \\ \acute{\eta} \\ 1-x=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x=0 \\ \acute{\eta} \\ x=1 \end{matrix}\right\}$$

x	$-\infty$	0		1		$+\infty$
$x-x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$	

$x-x^2>0 \Leftrightarrow x\in(0,1)$

(II) *Αν η* C_f *βρίσκεται κάτω απο την ευθεία* $y=-x+\kappa$ *για κάθε* $x\in\mathbb{R}$ *όταν ισχύει:*

$$\left\{\begin{matrix} f(x)<-x+\kappa \\ \Gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in\mathbb{R} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x-x^2<-x+\kappa \\ \Gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in\mathbb{R} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x-x^2+x-\kappa<0 \\ \Gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in\mathbb{R} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix} -x^2+2x-\kappa<0 \\ \Gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in\mathbb{R} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} -\left(x^2-2x+\kappa\right)<0 \\ \Gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in\mathbb{R} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x^2-2x+\kappa>0 \\ \Gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in\mathbb{R} \end{matrix}\right\}$$

Γνωρίζω οτι το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ *είναι παντού θετικό όταν* $\alpha>0$ *και* $\Delta<0$. *Οπότε θα πρέπει να ισχύει:*

$\left.\begin{cases}\alpha = 1 > 0 \\ \Delta < 0\end{cases}\right\} \Leftrightarrow \beta^2 - 4\alpha\gamma < 0 \Leftrightarrow (-2)^2 - 4\kappa < 0 \Leftrightarrow 4(1-\kappa) < 0 \Leftrightarrow$

Όταν διαιρώ και τα δυο μέλη μιας ανίσωσης με ένα αρνητικό αριθμό προκύπτει ετερόστροφη ανίσωση

$1-\kappa < 0 \Leftrightarrow -\kappa < -1 \Leftrightarrow \frac{-\kappa}{-1} > \frac{-1}{-1} \Leftrightarrow \kappa > 1$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Αν $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ *να βρεθούν τα σημεία τομής της* C_f *με τους άξονες* $x'x$ *και* $y'y$

2.

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *για την οποία ισχύει*

$f^3(x) - 2f^2(x) + 5f(x) = x^2 - 3x + 3$

Ν*α δείξετε οτι η* C_f *βρίσκεται πάνω απο τον άξονα* $x'x$ *για κάθε* $x\in\mathbb{R}$

3.

Ν*α γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτηση* $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$

4.

Δίνεται η συνάρτηση f *με τύπο* $f(x) = \lambda x^3 - 3\lambda x + 2\lambda + 1, \lambda\in\mathbb{R}$

Ν*α αποδείξετε οτι η* C_f *διέρχεται απο δυο σταθερά σημεία*

5.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - 2x^2, x\in\mathbb{R}$

(Ι) Ν*α βρείτε τις τιμές του* $x\in\mathbb{R}$ *για τις οποίες η* C_f *βρίσκεται πάνω απο τον άξονα* $x'x$

(ΙΙ) Αν *η* C_f *βρίσκεται κάτω απο την ευθεία* $y = -3x + \kappa$ *για κάθε* $x\in\mathbb{R}$ *να αποδείξετε οτι* $\kappa > 2$

6.

Δίνονται οι συναρτήσει $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *που ικανοποιούν την σχέση*

$2f(x) + 3f(1-x) = 5g(x)$ *για κάθε* $x\in\mathbb{R}$

Ν*α αποδείξετε οτι η* C_f *και η* C_g *έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο*

Υ*πόδειξη*: $1 - x = x \Leftrightarrow \cdots x = \frac{1}{2}$. Θ*έτω* $x = \frac{1}{2}$ *στην σχέση*

$2f(x) + 3f(1-x) = 5g(x)$