ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1.

$\Delta\acute{\iota}\nu o\nu\tau\alpha\iota\ o\iota\ \sigma\upsilon\nu\alpha\rho\tau\acute{\eta}\sigma\varepsilon\iota\varsigma\ f,g\ \mu\varepsilon\ \tau\acute{\upsilon}\pi o\upsilon\varsigma$

$$f\left(x\right)=\frac{1}{x\left(x+1\right)},g\left(x\right)=\frac{1}{\left(x+1\right)\left(x+2\right)}$$

(I) Να βρεθεί η συνάρτηση $f-g$

(II) Να βρεθεί το άθροισμα $S=\frac{1}{1\bullet2\bullet3}+\frac{1}{2\bullet3\bullet4}+\frac{1}{3\bullet4\bullet5}+\frac{1}{4\bullet5\bullet6}$

$$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}:x\left(x+1\right)\neq0\right\}$$

Θεωρώ την εξίσωση: $x\left(x+1\right)=0$

$$x\left(x+1\right)=0\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}x=0\\ \acute{\eta}\\ x+1=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}x=0\\ \acute{\eta}\\ x=-1\end{matrix}\right\}$$

$$x\in D_f\Leftrightarrow x\left(x+1\right)\neq0\Leftrightarrow x\in\left(-\infty,-1\right)\cup\left(-1,0\right)\cup\left(0,+\infty\right)$$

$$D_f=\left(-\infty,-1\right)\cup\left(-1,0\right)\cup\left(0,+\infty\right)$$

$$D_g=\left\{x\in\mathbb{R}:\left(x+1\right)\left(x+2\right)\neq0\right\}$$

Θεωρώ την εξίσωση: $\left(x+1\right)\left(x+2\right)=0$

$$\left(x+1\right)\left(x+2\right)=0\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}x+1=0\\ \acute{\eta}\\ x+2=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}x=-1\\ \acute{\eta}\\ x=-2\end{matrix}\right\}$$

$$x\in D_g\Leftrightarrow\left(x+1\right)\left(x+2\right)\neq0\Leftrightarrow x\in\left(-\infty,-2\right)\cup\left(-2,-1\right)\cup\left(-1,+\infty\right)$$

$$D_g=\left(-\infty,-2\right)\cup\left(-2,-1\right)\cup\left(-1,+\infty\right)$$

$$D_{f-g}=\left\{x\in\mathbb{R}:x\in D_f,x\in D_g\right\}$$

$$x\in D_{f-g}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}x\in D_f\\ x\in D_g\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}x\neq0\ \kappa\alpha\iota\ x\neq-1\\ x\neq-1\ \kappa\alpha\iota\ x\neq-2\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow$$

$$x\in\left(-\infty,-2\right)\cup\left(-2,-1\right)\cup\left(-1,0\right)\cup\left(0,+\infty\right)$$

Οπότε: $D_{f-g}=\left(-\infty,-2\right)\cup\left(-2,-1\right)\cup\left(-1,0\right)\cup\left(0,+\infty\right)$

$\Gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in D_{f-g}\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\frac{1}{x(x+1)}-\frac{1}{(x+1)(x+2)}=$$

$$\frac{x+2}{x(x+1)(x+2)}-\frac{x}{x(x+1)(x+2)}=\frac{x+2-x}{x(x+1)(x+2)}=\frac{2}{x(x+1)(x+2)}$$

$$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon:\left\{\begin{array}{l} f-g:D_{f-g}\to\mathbb{R} \\ (f-g)(x)=\dfrac{2}{x(x+1)(x+2)}\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in D_{f-g}\end{array}\right\}$$

$$(f-g)(1)=\frac{2}{1\bullet2\bullet3}\Rightarrow\frac{2}{1\bullet2\bullet3}=f(1)-g(1)\Rightarrow\frac{2}{1\bullet2\bullet3}=\frac{1}{1\bullet2}-\frac{1}{2\bullet3}\Rightarrow(1)$$

$$(f-g)(2)=\frac{2}{2\bullet3\bullet4}\Rightarrow\frac{2}{2\bullet3\bullet4}=f(2)-g(2)\Rightarrow\frac{2}{2\bullet3\bullet4}=\frac{1}{2\bullet3}-\frac{1}{3\bullet4}(2)$$

$$(f-g)(3)=\frac{2}{3\bullet4\bullet5}\Rightarrow\frac{2}{3\bullet4\bullet5}=f(3)-g(3)\Rightarrow\frac{2}{3\bullet4\bullet5}=\frac{1}{3\bullet4}-\frac{1}{4\bullet5}(3)$$

$$(f-g)(4)=\frac{2}{4\bullet5\bullet6}\Rightarrow\frac{2}{4\bullet5\bullet6}=f(4)-g(4)\Rightarrow\frac{2}{4\bullet5\bullet6}=\frac{1}{4\bullet5}-\frac{2}{5\bullet6}(4)$$

$\mathrm{A}\pi o\ \tau\iota\varsigma\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\varepsilon\iota\varsigma\ (1),(2),(3),(4)\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\underline{\left\{\begin{array}{l}\dfrac{2}{1\bullet2\bullet3}=\dfrac{1}{1\bullet2}-\dfrac{1}{2\bullet3}\\ \dfrac{2}{2\bullet3\bullet4}=\dfrac{1}{2\bullet3}-\dfrac{1}{3\bullet4}\\ \dfrac{2}{3\bullet4\bullet5}=\dfrac{1}{3\bullet4}-\dfrac{1}{4\bullet5}\\ \dfrac{2}{4\bullet5\bullet6}=\dfrac{1}{4\bullet5}-\dfrac{2}{5\bullet6}\end{array}\right\}}(+)$$

$$\frac{2}{1\bullet2\bullet3}+\frac{2}{2\bullet3\bullet4}+\frac{2}{4\bullet5\bullet6}\frac{2}{4\bullet5\bullet6}=\frac{1}{1\bullet2}-\cancel{\frac{1}{2\bullet3}}+\cancel{\frac{1}{2\bullet3}}-\cancel{\frac{1}{3\bullet4}}+\cancel{\frac{1}{3\bullet4}}-\cancel{\frac{1}{4\bullet5}}+\cancel{\frac{1}{4\bullet5}}-\frac{2}{5\bullet6}$$

$$\Leftrightarrow 2S=\frac{1}{2}-\frac{1}{15}\Leftrightarrow 2S=\frac{15}{30}-\frac{2}{30}\Leftrightarrow 2S=\frac{13}{30}\Leftrightarrow S=\frac{\frac{13}{30}}{2}\Leftrightarrow S=\frac{13}{60}$$

2.

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους

$$f(x)=\frac{1}{x-1}, g(x)=x^{x-2}$$

Να βρεθεί η συνάρτηση fg

$D_f=\{x\in\mathbb{R}: x-1\neq 0\}$

Θεωρώ την εξίσωση $: x-1=0$

$x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

$x\in D_f \Leftrightarrow x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

Οπότε $: D_f=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

Θα βρώ το πεδίο ορισμού της g. Διακρίνω τις περιπτώσεις :

$$\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\, x>0\\ (\mathrm{II})\, x=0\,, x-2>0\\ (\mathrm{III})\, x<0, x-2\in\mathbb{Z}\end{array}\right\}$$

Περίπτωση $(\mathrm{I}): x>0 \Leftrightarrow x\in(0,+\infty)$

Περίπτωση $(\mathrm{II}): x=0\,, x-2>0$

$$\left\{\begin{array}{l}x=0\\ x-2>0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=0\\ x>2\\ (\text{Άτοπο})\end{array}\right\}$$

Περίπτωση $(\mathrm{III}): x<0, x-2\in\mathbb{Z}$

$$\left\{\begin{array}{l}x<0\\ x-2\in\mathbb{Z}\end{array}\right\}\overset{\substack{\text{Το } x-2 \text{ είναι ακέραιος}\\ \text{αν και μόνο αν το } x \text{ είναι}\\ \text{ακέραιος}}}{\Longleftrightarrow}\left\{\begin{array}{l}x<0\\ x\in\mathbb{Z}\end{array}\right\}\Leftrightarrow x\in\mathbb{Z}-\mathbb{N}$$

Οπότε $: x\in D_g \Leftrightarrow x\in(\mathbb{Z}-\mathbb{N})\cup(0,+\infty)$

Άρα $: D_g \Leftrightarrow x\in(\mathbb{Z}-\mathbb{N})\cup(0,+\infty)$

$D_{fg}=\{x\in\mathbb{R}: x\in D_f, x\in D_g\}$

$$x\in D_{fg}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x\in D_f\\ x\in D_g\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x\neq 1\\ x\in(0,+\infty)\cup(\mathbb{Z}-\mathbb{N})\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$x\in(\mathbb{Z}-\mathbb{N})\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$

$$\text{Οπότε}: D_{fg}=(\mathbb{Z}-\mathbb{N})\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$$

$$\text{Αν } x\in D_{fg} \text{ θα έχω}:$$

$$(fg)(x)=f(x)g(x)=\frac{1}{x-1}x^{x-2}=\frac{x^{x-2}}{x-1}$$

$$\text{Οπότε}:\left\{\begin{array}{l} fg: D_{fg}\to\mathbb{R} \\ (fg)(x)=\dfrac{x^{x-2}}{x-1} \text{ για κάθε } x\in D_{fg}\end{array}\right\}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ!!!
Η συνάρτηση $f(x)=a(x)^{\beta(x)}$, όπου $a(x),\beta(x)$ παραστάσεις του x ορίζεται όταν ορίζονται οι παραστάσεις $a(x),\beta(x)$ και ισχύουν οι περιπτώσεις: $\left\{\begin{array}{l}\text{(I) Η βάση είναι θετικός αριθμός} \\ \text{(II) Η βάση είναι μηδέν και ο εκθέτης θετικός αριθμός} \\ \text{(III) Η βάση είναι αρνητικός αριθμός και ο εκθέτης ακέραιος}\end{array}\right\}$

3.

Δίνονται οι συναρτήσεις f,g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ που ικανοποιούν τις σχέσεις: $\left\{\begin{array}{l}(2f-g)(x)=-3x \\ (7f+2g)(x)=-5x\end{array}\right\}$ Να βρεθούν οι τύποι των συναρτήσεων f,g

$$\left\{\begin{array}{l}(2f-g)(x)=-3x \\ (7f+2g)(x)=-5x\end{array}\right\} \overset{\substack{(F+G)(x)=F(x)+G(x)\\(F-G)(x)=F(x)-G(x)\\(\lambda F)(x)}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{l}(2f)(x)-g(x)=-3x \\ (7f)(x)+(2g)(x)=-5x\end{array}\right\} \overset{\substack{(\lambda F)(x)=\lambda F(x)\\ \lambda:\text{Σταθερά}}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left\{\begin{array}{l}2f(x)-g(x)=-3x \\ 7f(x)+2g(x)=-5x\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}2(2f(x)-g(x))=2(-3x) \\ 7f(x)+2g(x)=-5x\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}4f(x)-2g(x)=-6x \\ 7f(x)+2g(x)=-5x\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{cases} 4f(x)-2g(x)=-6x \\ 7f(x)+2g(x)=-5x \end{cases}\right\}(+)$$

$$4f(x)-2g(x)+7f(x)+2g(x)=-5x-6x \Leftrightarrow 11f(x)=-11x$$

Αν $\alpha \neq 0$ τότε ισχύει η ισοδυναμία $\alpha\beta=\alpha\gamma \Leftrightarrow \beta=\gamma$

$$\Leftrightarrow \quad f(x)=-x$$

$$2f(x)-g(x)=-3x \Leftrightarrow g(x)=2f(x)+3x$$

$$g(x)=2f(x)+3x \overset{f(x)=-x}{=} 2\left(-x^{`}\right)+3x=-2x+3x=x$$

4.

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους $f(x)=\begin{cases} -5x, x<0 \\ x^2, x\geq 1 \end{cases}$ $g(x)=\begin{cases} x^2, x<-1 \\ 2x+3, x\geq 4 \end{cases}$ Να βρεθεί το άθροισμα $f+g$

x	$-\infty$	-1		0		1		4	$+\infty$
$f(x)$	$-5x$	5	$-5x$			1	x^2	16	x^2
$g(x)$	x^2							11	$2x+3$
$(f+g)(x)$	x^2-5x							27	x^2+2x+3

$D_{f+g}=(-\infty,-1)\cup[4,+\infty)$

$$(f+g)(x)=\begin{cases}x^2-5x, x\in(-\infty,-1)\\ 27, x=4\\ x^2+2x+3, x\in(4,+\infty)\end{cases}$$

$\mathrm{A}\nu\ x=4\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$x^2+2x+3=4^2+2\bullet 4+3=16+8+3=27$

Οπότε αν θεωρήσω τον τύπο $(f+g)(x)=x^2+2x+3, x\in[4,+\infty)$ το 27 μπορεί να προκύψει απο αυτόν τον τύπο για $x=4$.Άρα ο τύπος της συνάρτησης $f+g$ γίνεται:

$$(f+g)(x)=\begin{cases}x^2-5x, x\in(-\infty,-1)\\ x^2+2x+3, x\in[4,+\infty)\end{cases}$$

5.

Δίνονται οι συναρτήσεις f,g με ορισμού το $\mathbb{R}$ που ικανοποιούν την σχέση:

$(f+g)^2(x)-2(fg)(x)+4f(x)-2g(x)+5=0$

Να βρεθούν οι τύποι των συναρτήσεων f,g

$$(f+g)^2(x)-2(fg)(x)+4f(x)-2g(x)+5=0 \overset{\substack{(F+G)(x)=F(x)+G(x)\\ (FG)(x)=F(x)G(x)}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left[f(x)+g(x)\right]^2-2f(x)g(x)+4f(x)-2g(x)+5=0\Leftrightarrow$$

$$f^2(x)+\cancel{2f(x)g(x)}+g^2(x)-\cancel{2f(x)g(x)}+4f(x)-2g(x)+5=0 \overset{5=4+1}{\Longleftrightarrow}$$

$$f^2(x)+4f(x)+4+g^2(x)-2g(x)+1=0\Leftrightarrow$$

$$f^2(x)+2\bullet f(x)\bullet 2+2^2+g^2(x)-2\bullet g(x)\bullet 1+1^2=0 \overset{\substack{a^2+2\bullet a\bullet\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2\\ a^2-2\bullet a\bullet\beta+\beta^2=(\alpha-\beta)^2}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left[f(x)+2\right]^2+\left[g(x)-1\right]^2=0 \overset{\alpha^2+\beta^2=0\Leftrightarrow\alpha=\beta=0}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left\{\begin{matrix}f(x)+2=0\\ g(x)-1=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}f(x)=-2\\ g(x)=1\end{matrix}\right\}$$

6.

$$\Delta \acute{\iota}\nu o\nu\tau\alpha\iota\ o\iota\ \sigma\upsilon\nu\alpha\rho\tau\acute{\eta}\sigma\varepsilon\iota\varsigma\ f,g\ \mu\varepsilon\ \tau\acute{\upsilon}\pi o\upsilon\varsigma\ f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}, g(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}.$$

(I) Nα $\alpha\pi o\delta\varepsilon\acute{\iota}\xi\varepsilon\tau\varepsilon\ o\tau\iota\ (f+g)(x)=2\dfrac{e^{4x}+1}{e^{4x}-1}, x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

(II) Nα $\lambda\upsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\ \eta\ \alpha\nu\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta : (f+g)(x)>2, x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

$(\mathrm{I})\, D_f=\{x\in\mathbb{R}: e^x-e^{-x}\neq 0\}$

$\Theta\varepsilon\omega\rho\acute{\omega}\ \tau\eta\nu\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta : e^x-e^{-x}=0 \Leftrightarrow e^x=e^{-x} \Leftrightarrow x=-x \Leftrightarrow 2x=0 \Leftrightarrow x=0$

$x\in D_f \Leftrightarrow e^x-e^{-x}\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon : D_f=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

$D_g=\{x\in\mathbb{R}: e^x+e^{-x}\neq 0\}$

$$\left.\begin{cases} e^x>0 \\ e^{-x}>0 \end{cases}\right\}(+)$$

$e^x+e^{-x}>0 \Rightarrow e^x+e^{-x}\neq 0$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in\mathbb{R}\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\ e^x+e^{-x}\neq 0. \acute{A}\rho\alpha\ D_g=\mathbb{R}$

$D_{f+g}=\{x\in\mathbb{R}: x\in D_f, x\in D_g\}$

$$x\in D_{f+g} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x\in D_f \\ x\in D_g \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty) \\ x\in\mathbb{R} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon : D_{f+g}=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}+\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \overset{e^{-x}=\frac{1}{e^x}}{=} \frac{e^x+\frac{1}{e^x}}{e^x-\frac{1}{e^x}}+\frac{e^x-\frac{1}{e^x}}{e^x+\frac{1}{e^x}}=$$

$$\frac{\frac{e^xe^x}{e^x}+\frac{1}{e^x}}{\frac{e^xe^x}{e^x}-\frac{1}{e^x}}+\frac{\frac{e^xe^x}{e^x}-\frac{1}{e^x}}{\frac{e^xe^x}{e^x}+\frac{1}{e^x}}=\frac{\frac{e^{2x}+1}{\cancel{e^x}}}{\frac{e^{2x}-1}{\cancel{e^x}}}+\frac{\frac{e^{2x}-1}{\cancel{e^x}}}{\frac{e^{2x}+1}{\cancel{e^x}}}=\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}+\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=$$

$$\frac{\left(e^{2x}+1\right)\left(e^{2x}+1\right)}{\left(e^{2x}-1\right)\left(e^{2x}+1\right)}+\frac{\left(e^{2x}-1\right)\left(e^{2x}-1\right)}{\left(e^{2x}+1\right)\left(e^{2x}-1\right)}=\frac{\left(e^{2x}\right)^{2}+2e^{2x}+1}{\left(e^{2x}\right)^{2}-1}+\frac{\left(e^{2x}\right)^{2}+2e^{2x}+1}{e^{4x}-1}=$$

$$\frac{e^{4x}+\cancel{2e^{2x}}+1+e^{4x}-\cancel{2e^{2x}}+1}{e^{4x}-1}=\frac{2e^{4x}+2}{e^{4x}-1}=2\frac{e^{4x}+1}{e^{4x}-1}$$

$$(\mathrm{II})\left\{\begin{array}{l}(f+g)(x)>2\\ x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\cancel{2}\bullet\dfrac{e^{4x}+1}{e^{4x}-1}>\cancel{2}\bullet 1\\ x\neq 0\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{Αν } \gamma>0 \textit{ ισχύει η ισοδυναμία:}\\ \gamma\alpha>\gamma\beta\Leftrightarrow\alpha>\beta\\ \Leftrightarrow\end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{e^{4x}+1}{e^{4x}-1}>1\\ x\neq 0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\dfrac{e^{4x}+1}{e^{4x}-1}-1>\\ x\neq 0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\dfrac{e^{4x}+1}{e^{4x}-1}-\dfrac{e^{4x}-1}{e^{4x}-1}>0\\ x\neq 0\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{e^{4x}+1-\left(e^{4x}-1\right)}{e^{4x}-1}>0\\ x\neq 0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\dfrac{e^{4x}+1-e^{4x}+1}{e^{4x}-1}>0\\ x\neq 0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\dfrac{2}{e^{4x}-1}>0\\ x\neq 0\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}e^{4x}-1>0\\ x\neq 0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}e^{4x}>e^{0}\\ x\neq 0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}4x>0\\ x\neq 0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x>0\\ x\neq 0\end{array}\right\}\Leftrightarrow x>0\Leftrightarrow x\in(0,+\infty)$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Δίνονται οι συναρτήσεις f,g *με τύπους*

$$f(x)=\frac{1}{x(x+1)(x+2)},\ g(x)=\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

(I) Ν*α βρεθεί η συνάρτηση* $f-g$

(II) Ν*α βρεθεί το άθροισμα* $S=\dfrac{1}{1\bullet 2\bullet 3\bullet 4}+\dfrac{1}{2\bullet 3\bullet 4\bullet 5}+\dfrac{1}{3\bullet 4\bullet 5\bullet 6}+\dfrac{1}{4\bullet 5\bullet 6\bullet 7}$

2.

Δίνονται οι συναρτήσεις f,g *με τύπους*

$$f(x)=\frac{1}{x-8},\ g(x)=(x-3)^{x+3}$$

Ν*α βρεθεί η συνάρτηση* fg

3.

Δ*ίνονται οι συναρτήσεις* f, g *με πεδίο ορισμού το* $\mathbb{R}$ *που ικανοποιούν τις σχέσεις*:

$$\begin{cases} (4f+3g)(x) = -8x \\ (3f+2g)(x) = -2x \end{cases}$$

Ν*α βρεθούν οι τύποι των συναρτήσεων* f, g

4.

Δ*ίνονται οι συναρτήσεις* f, g *με τύπους*

$$f(x) = \begin{cases} -5x, x<0 \\ x^3, x \geq 2 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x^3, x<-2 \\ 2x+8, x \geq 1 \end{cases}$$

Ν*α βρεθεί το άθροισμα* $f+g$

5.

Δ*ίνονται οι συναρτήσεις* f, g *με ορισμού το* $\mathbb{R}$ *που ικανοποιούν την σχέση*:

$$(f+3g)^2(x) - 6(fg)(x) + 2f(x) - 12g(x) + 5 = 0$$

Ν*α βρεθούν οι τύποι των συναρτήσεων* f, g

6.

Δ*ίνονται οι συναρτήσεις* f, g *με τύπους* $f(x) = \dfrac{2^x + 2^{-x}}{2^x - 2^{-x}}, g(x) = \dfrac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}}$.

(I)Ν*α αποδείξετε οτι* $(f+g)(x) = 2\dfrac{2^{4x}+1}{2^{4x}-1}, x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

(II)Ν*α λυθεί η ανίσωση*: $(f+g)(x) > 2, x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

7.

Δ*ίνεται η συνάρτηση* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *με* $f(\mathbb{R}) = \left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$ *που ικανοποιει την σχέση* $f^2(x) - f(x) = x^2(x^2+2) + \dfrac{3}{4}$.Ν*α βρεθεί ο τύπος της* f

Υ*ποδειξη*: $f^2(x) - f(x) = x^2(x^2+2) + \dfrac{3}{4} \overset{\substack{\text{Προσθέτω στα} \\ \text{δυο μέλη το } \frac{1}{4}}}{\Longleftrightarrow} \cdots \Leftrightarrow \left[f(x) - \dfrac{1}{2}\right]^2 = (x^2+1)^2$

ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ
Αν $f : D_f \to \mathbb{R}, g : D_g \to \mathbb{R}$ *με* D_f *το πεδίο ορισμού της* f *και* D_g *το πεδίο ορισμού της* g *τότε το άθροισμα των συναρτήσεων* f, g *είναι*: $f+g : D_{f+g} \to \mathbb{R}, D_{f+g} = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \in D_f, x \in D_g \right\}$ $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, *για κάθε* $x \in D_{f+g}$

ΔΙΑΦΟΡΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ
Αν $f : D_f \to \mathbb{R}, g : D_g \to \mathbb{R}$ *με* D_f *το πεδίο ορισμού της* f *και* D_g *το πεδίο ορισμού της* g *τότε η διαφορά των συναρτήσεων* f, g *είναι*: $f-g : D_{f+g} \to \mathbb{R}, D_{f-g} = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \in D_f, x \in D_g \right\}$ $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$, *για κάθε* $x \in D_{f-g}$

ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ
Αν $f : D_f \to \mathbb{R}, g : D_g \to \mathbb{R}$ *με* D_f *το πεδίο ορισμού της* f *και* D_g *το πεδίο ορισμού της* g *τότε το γινόμενο των συναρτήσεων* f, g *είναι*: $fg : D_{f+g} \to \mathbb{R}, D_{fg} = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \in D_f, x \in D_g \right\}$ $(fg)(x) = f(x)g(x)$, *για κάθε* $x \in D_{fg}$

ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ ΕΠΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ
Αν $f : D_f \to \mathbb{R}$, *με* D_f *το πεδίο ορισμού της* f *και* $\lambda \in \mathbb{R}$ *το γινόμενο του* λ *και συνάρτησης* f *είναι*: $\lambda g : D_{\lambda f} \to \mathbb{R}, D_{\lambda f} = D_f, (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$, *για κάθε* $x \in D_{\lambda f}$

ΠΗΛΙΚΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ
Αν $f : D_f \to \mathbb{R}, g : D_g \to \mathbb{R}$ *με* D_f *το πεδίο ορισμού της* f *και* D_g *το πεδίο ορισμού της* g *τότε το πηλίκο των συναρτήσεων* f, g *είναι*: $\frac{f}{g} : D_{\frac{f}{g}} \to \mathbb{R}, D_{\frac{f}{g}} = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \in D_f, x \in D_g, g(x) \neq 0 \right\}$ $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, *για κάθε* $x \in D_{\frac{f}{g}}$