ΙΣΟΤΗΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Οι συναρτήσεις $f:A\rightarrow IR$ και $g:B\rightarrow IR$ με πεδία ορισμού A,B αντίστοιχα είναι ίσες όταν ισχύει :

$$\left.\begin{array}{l} \text{I) } A=B \\ \\ \text{II) Για κάθε } x\in A \text{ έχω : } f(x)=g(x) \end{array}\right\}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1.

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους :

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} \qquad \text{και} \quad g(x) = x - 3$$

Να αποδειχθεί ότι $f \neq g$ και στη συνέχεια να βρείτε το μεγαλύτερο υποσύνολο του συνόλου των πραγματικών αριθμών για το οποίο ισχύει $f(x) = g(x)$

$D_f = \{x\in IR: x - 2\neq 0\}$

Θεωρώ την εξίσωση : $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

$x\in D_f \Longleftrightarrow x - 2\neq 0 \Longleftrightarrow x \neq 2 \Longleftrightarrow x\in(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$

Οπότε : $D_f = (-\infty,2)\cup(2,+\infty)$

$D_g = \mathbb{R}$

Επειδή $D_f \neq D_g$ θα έχω $f \neq g$

Αν $x \neq 2$ θα έχω:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = \frac{x^2 - 2x - 3x + 6}{x - 2} = \frac{x(x-2) - 3(x-2)}{x - 2}$$

$$= \frac{(x-2)(x-3)}{x - 2} = x - 3 = g(x)$$

Άρα το μεγαλύτερο υποσύνολο του συνόλου των πραγματικών αριθμών για το οποίο ισχύει $f(x) = g(x)$ είναι το $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$

2.

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 7x + 12}}{\sqrt{x - 3}} \quad \text{και} \quad g(x) = \sqrt{x - 4}$$

Να αποδειχθεί ότι f = g

$D_f = \{ x \in IR : x^2 - 7x + 12 \geq 0 ,\ x - 3 > 0\}$

Θεωρώ την δευτεροβάθμια εξίσωση :

$\boxed{1}\ x^2 \boxed{-7}\ x\ \boxed{+12} = 0 \quad (1)$

α = 1   β = – 7   γ = 12

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 49 - 48 = 1 > 0$

Επειδή Δ > 0 η δευτεροβάθμια εξίσωση (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες :

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\boldsymbol{\Delta}}}{2\alpha} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = \frac{7+1}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$x_2 = \frac{7-1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

x	– ∞		3		4		+ ∞
$x^2 - 7x + 12$		+	0	–	0	+	

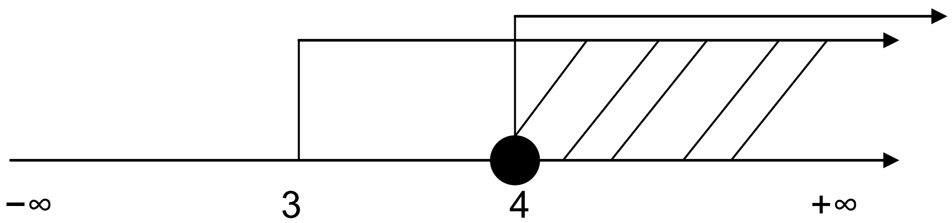
$x^2 - 7x + 12 \geq 0 \iff x \in (-\infty,3]\cup[4,+\infty)$.

$x - 3 > 0 \iff x > 3$

$$x \in D_f \iff \left.\begin{matrix} x^2 - 7x + 12 \geq 0 \\ x - 3 > 0 \end{matrix}\right\} \iff \left.\begin{matrix} x \in (-\infty,3]\cup[4,+\infty) \\ x > 3 \end{matrix}\right\}$$

$$\left.\begin{matrix} x \leq 3 \text{ ή } x \geq 4 \\ x > 3 \end{matrix}\right\} \iff \left\{ \begin{pmatrix} x \leq 3 \\ x > 3 \\ \text{(Άτοπο)} \end{pmatrix} \text{ ή } \begin{pmatrix} x \geq 4 \\ x > 3 \end{pmatrix} \right\} \iff$$

$(x \geq 4 ,\ x > 3) \iff x \in [4,+\infty)$



$D_f = [4,+\infty)$

$D_g = \{ x \in IR :\ x - 4 \geq 0 \}$

$x \in D_g \iff x - 4 \geq 0 \iff x \geq 4 \iff x \in [4,+\infty)$

$D_g = [4,+\infty)$

Άρα : $D_f = D_g$

Για κάθε $x \in [4,+\infty)$ θα έχω:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 7x + 12}}{\sqrt{x - 3}} = \frac{\sqrt{x^2 - 3x - 4x + 12}}{\sqrt{x - 3}} =$$

$$= \frac{\sqrt{x(x-3) - 4(x-3)}}{\sqrt{x - 3}} = \frac{\sqrt{(x-4)(x-3}}{\sqrt{x - 3}} =$$

$$= \frac{\sqrt{x-3}\;\sqrt{x-4}}{\sqrt{x-3}} = \sqrt{x-4} = g(x)$$

Συνεπώς : f = g

3.

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}{\sqrt{x+1}} \quad \text{και} \quad g(x) = \sqrt{\frac{x^2-4x+3}{x+1}}$$

Να αποδειχθεί ότι f = g

D_f = { $x \in IR$: $x^2 - 4x + 3 \geq 0$, $x + 1 > 0$}

Θεωρώ την δευτεροβάθμια εξίσωση :

$$\boxed{1}\, x^2 \,\boxed{-4}\, x \,\boxed{+3} = 0 \quad (1)$$

$\alpha = 1 \quad \beta = -4 \quad \gamma = 3$

$$\Delta = \beta^2 - 4\,\alpha\,\gamma = (-4)^2 - 4 \bullet 1 \bullet 3 = 16 - 12 = 4 > 0$$

Επειδή Δ > 0 η δευτεροβάθμια εξίσωση (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες :

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\mathbf{\Delta}}}{2\,\alpha} = \frac{-\mathbf{(}-4) \pm \sqrt{4}}{2 \bullet 1} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

$$x_1 = \frac{4+2}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{4-2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

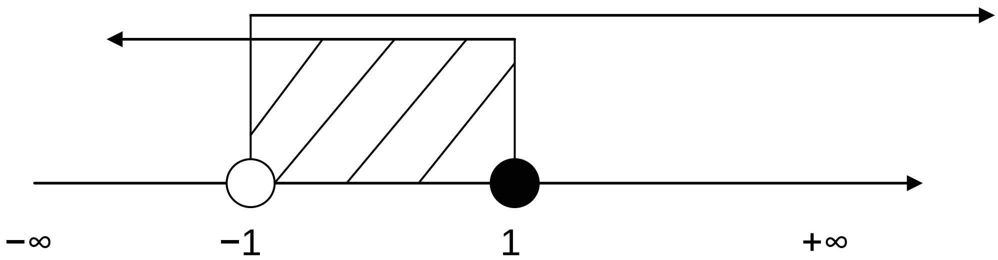
x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
x^2-4x+3		+	0	$-$	0	+	

$x^2 - 4x + 3 \geq 0 \Longleftrightarrow x \in (-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$.

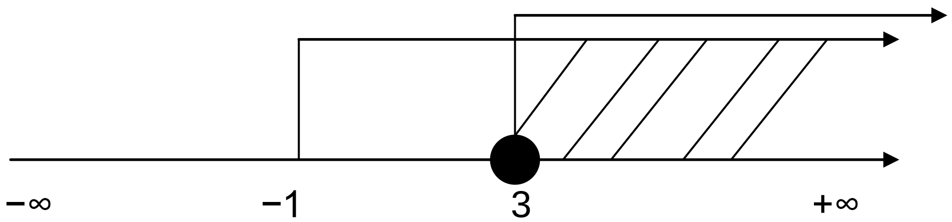
$x + 1 > 0 \Longleftrightarrow x > -1$

$$x \in D_f \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} x^2 - 4x + 3 \geq 0 \\ x + 1 > 0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} x \in (-\infty, 1] \cup [3, +\infty) \\ x > -1 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x \leq 1 \text{ ή } x \geq 3 \\ x > 3 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} x \leq 1 \\ x > -1 \end{pmatrix} \text{ ή } \begin{pmatrix} x \geq 3 \\ x > -1 \end{pmatrix} \right\} \Longleftrightarrow$$



$x \in (-1, 1]$



$x \in [4, +\infty)$

$(x \in (-1, 1]$ ή $x \in [3, +\infty)) \Longleftrightarrow x \in (-1, 1] \cup [3, +\infty)$

$D_f = (-1, 1] \cup [3, +\infty)$

$$D_g = \{ x \in IR : \frac{x^2 - 4x + 3}{x+1} \geq 0 \ , x+1 \neq 0\}$$

$x+1 > 0 \Longleftrightarrow x > -1$
$x+1 = 0 \Longleftrightarrow x = -1$
$x+1 < 0 \Longleftrightarrow x < -1$

$x+1 \neq 0 \Longleftrightarrow x \neq -1$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
x +1	—	||	+

$$x \in D_g \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x+1} \geq 0 \\ x+1 \neq 0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x+1} \geq 0 \\ x \neq -1 \end{array}\right\}$$

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$x^2 - 4x + 3$	+	|| +	—	+	
x +1	—	|| +	+	+	
$\dfrac{x^2 - 4x + 3}{x+1}$	—	|| +	—	+	

$\Longleftrightarrow x \in (-1.1]U[3,+\infty)$

$D_g = (-1.1]U[3,+\infty)$

Οπότε : $D_f = D_g$

Για κάθε $x \in (-1.1]U[3,+\infty)$ θα έχω :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{\frac{x^2-4x+3}{x+1}} = g(x)$$

Άρα : f=g

4.

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους :
$f(x) = \ln \dfrac{x^2 - x - 12}{x + 3}$ και $g(x) = \ln(x - 4)$
Να αποδειχθεί ότι f = g

$$D_f = \{ x \in IR : \frac{x^2 - x - 12}{x + 3} > 0, x + 3 \neq 0\}$$

Θεωρώ την δευτεροβάθμια εξίσωση :

$\boxed{1}\ x^2\ \boxed{-1}\ x\ \boxed{-12} = 0 \quad (1)$

$\alpha = 1 \quad \beta = -1 \quad \gamma = -12$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 1 + 48 = 49 > 0$

Επειδή Δ > 0 η δευτεροβάθμια εξίσωση (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες :

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 7}{2}$$

$$x_1 = \frac{1+7}{3} = \frac{8}{2} = 4$$

$$x_2 = \frac{1-7}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

x	$-\infty$		-3		4		$+\infty$
$x^2 - x - 12$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$x + 3 > 0 \Longleftrightarrow x > -3$
$x + 3 = 0 \Longleftrightarrow x = -3$
$x + 3 < 0 \Longleftrightarrow x < -3$

$x + 3 \neq 0 \Longleftrightarrow x \neq -3$

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$x + 3$		$-$	$\Vert$	$+$	

$$x \in D_f \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{x^2 - x - 12}{x+3} > 0 \\ x + 3 \neq 0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{x^2 - x - 12}{x+3} > 0 \\ x \neq -3 \end{array}\right\}$$

x	$-\infty$	-3	4	$+\infty$
x^2-x-12	+	‖ —	+	
$x+3$	—	‖ +	+	
$\dfrac{x^2-x-12}{x+3}$	—	‖ —	+	

$\Longleftrightarrow x \in (4,+\infty)$

$D_f = (4,+\infty)$

$D_g = \{ x \in IR : x - 4 > 0\}$

$x \in D_g \Longleftrightarrow x - 4 > 0 \Longleftrightarrow x > 4 \Longleftrightarrow x \in (4,+\infty)$

$D_g = (4,+\infty)$

Άρα : $D_f = D_g$

Για κάθε $x \in (4,+\infty)$ θα έχω :

$$f(x) = \ln \frac{x^2 - x - 12}{x+3} = \ln \frac{x^2 + 3x - 4x - 12}{x+3} =$$

$$= \ln \frac{x(x+3) - 4(x+3)}{x+3} = \ln \frac{(x+3)(x-4)}{x+3} = \ln(x-4) = g(x)$$

Οπότε : f=g

5.

Δίνονται οι συναρτήσεις f,g *με πεδίο ορισμού το* $\mathbb{R}$ *που ικανοποιούν τις σχέσεις*

$$\left\{\begin{array}{l} f^2(x)+g^2(x)=1 \\ f(x)g(x)=\dfrac{1}{2} \end{array}\right\}$$

Ν*α αποδείξετε οτι* $f=g$

$$\left\{\begin{array}{l} f^2(x)+g^2(x)=1 \\ f(x)g(x)=\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f^2(x)+g^2(x)=1 \\ 2f(x)g(x)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f^2(x)+g^2(x)=1 \\ -2f(x)g(x)=-1 \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Longrightarrow}$$

$$f^2(x)+g^2(x)-2f(x)g(x)=0 \Rightarrow \left(f(x)-g(x)\right)^2=0 \Rightarrow f(x)-g(x)=0 \Rightarrow$$

$$f(x)=g(x)$$

Ε*πειδή οι συναρτήσεις* f,g *έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού και το ίδιο τύπο θα είναι ίσες*

6.

Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{\lambda x^2+x-\lambda+1}{x-\lambda+1}$ *και* $g(x)=\dfrac{2\lambda x^2+2x+\lambda}{2x+\lambda}$

Ν*α βρείτε το* $\lambda\in\mathbb{R}$ *ώστε να είναι* $f=g$

$$D_f=\{x\in\mathbb{R}: x-\lambda+1\neq 0\}$$

Θ*εωρώ την εξίσωση* $: x-\lambda+1=0 \Leftrightarrow x=\lambda-1$

$$x\in D_f \Leftrightarrow x-\lambda+1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq \lambda-1 \Leftrightarrow x\in(-\infty,\lambda-1)\cup(\lambda-1,+\infty)$$

Ο*πότε* $: D_f=(-\infty,\lambda-1)\cup(\lambda-1,+\infty)$

$$D_g=\{x\in\mathbb{R}: 2x+\lambda\neq 0\}$$

Θ*εωρώ την εξίσωση* $: 2x+\lambda=0 \Leftrightarrow 2x=-\lambda \Leftrightarrow x=-\dfrac{\lambda}{2}$

$x \in D_g \Leftrightarrow 2x+\lambda \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{\lambda}{2} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty,-\frac{\lambda}{2}\right) \cup \left(-\frac{\lambda}{2},+\infty\right)$

$\text{Ο}\pi ó\tau\varepsilon : D_g = \left(-\infty,-\frac{\lambda}{2}\right) \cup \left(-\frac{\lambda}{2},+\infty\right)$

$\text{Ε}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ f = g\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega : D_f = D_g \Leftrightarrow \lambda - 1 = -\frac{\lambda}{2} \Leftrightarrow 2\lambda - 2 = -\lambda \Leftrightarrow$

$3\lambda = 2 \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{3}$

$\Theta\alpha\ \alpha\pi o\delta\varepsilon\acute{\iota}\xi\omega\ \gamma\iota\alpha\ \lambda = \frac{2}{3}\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ f = g.\ \text{Α}\nu\ \lambda = \frac{2}{3}\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\ D_f = D_g =$

$\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3},+\infty\right)$.$\text{Ο}\pi ó\tau\varepsilon\ \gamma\iota\alpha\ \nu\alpha\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\ f = g\ \alpha\rho\kappa\varepsilon\acute{\iota}\ \nu\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ f(x) = g(x)$

$\gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x \neq -\frac{1}{3}$

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{\frac{2}{3}x^2 + x - \frac{2}{3} + 1}{x - \frac{2}{3} + 1} = \frac{2\frac{2}{3}x^2 + 2x + \frac{2}{3}}{2x + \frac{2}{3}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\frac{2}{3}x^2 + x - \frac{2}{3} + 1}{x + \frac{1}{3}} = \frac{\cancel{2}\left(\frac{2x^2}{3} + x + \frac{1}{3}\right)}{\cancel{2}\left(x + \frac{2}{3}\right)} \Leftrightarrow \frac{\frac{2x^2+3x+1}{\cancel{3}}}{\frac{3x+1}{\cancel{3}}} = \frac{\frac{2x^2+3x+1}{\cancel{3}}}{\frac{3x+1}{\cancel{3}}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{2x^2+3x+1}{3x+1} = \frac{2x^2+x+1}{3x+1} \left(\text{Ι}\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\right)$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

$\acute{\text{Ε}}\sigma\tau\omega\ o\iota\ \sigma\upsilon\nu\alpha\rho\tau\acute{\eta}\sigma\varepsilon\iota\varsigma\ f(x) = \frac{\lambda x^2 + 3x + 1 + \lambda}{x - 1 + \lambda}\ \kappa\alpha\iota\ g(x) = \frac{x^2 + 6x + 2(\lambda+1)}{2(x-\lambda)}$
$\text{Ν}\alpha\ \beta\rho\varepsilon\acute{\iota}\tau\varepsilon\ \tau o\ \lambda \in \mathbb{R}\ \acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon\ \nu\alpha\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ f = g$

2.

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους :

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} \quad \text{και} \quad g(x) = x - 1$$

Να αποδειχθεί ότι $f \neq g$ και στη συνέχεια να βρείτε το μεγαλύτερο υποσύνολο του συνόλου των πραγματικών αριθμών για το οποίο ισχύει $f(x) = g(x)$

3.

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 7x + 10}}{\sqrt{x - 2}} \quad \text{και} \quad g(x) = \sqrt{x - 5}$$

Να αποδειχθεί ότι $f = g$

4.

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 4}}{\sqrt{x + 2}}, \quad g(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 5x + 4}{x + 2}}$$

Να αποδείξετε οτι $f = g$

5.

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους :

$$f(x) = \ln \frac{x^2 - 3x - 10}{x + 2} \quad \text{και} \quad g(x) = \ln(x - 5)$$

Να αποδειχθεί ότι $f = g$

6.

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ που ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\left\{ \begin{array}{l} f^2(x) + g^2(x) = 4 \\ f(x)g(x) = 2 \end{array} \right\}$$

Να αποδείξετε οτι $f = g$