ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1.

> Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους:
> $f(x)=\sqrt{x-1}$ και $g(x)=\sqrt{x^2-9}$
> Να οριστεί η $g\circ f$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}: x-1\}$

$x\in D_f \Leftrightarrow x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1 \Leftrightarrow x\in[1,+\infty)$

Οπότε: $D_f=[1,+\infty)$

$D_g=\{x\in\mathbb{R}: x^2-9\geq 0\}$

Θεωρώ την εξίσωση: $x^2-9=0$

$x^2-9=0 \Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{9} \Leftrightarrow x=\pm 3$

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
x^2-9		$+$	0	$-$	0	$+$	

$x\in D_g \Leftrightarrow x^2-9\geq 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-3]\cup[3,+\infty)$

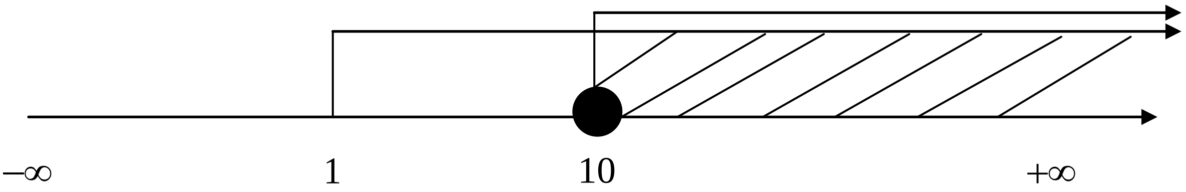
Οπότε: $D_g=(-\infty,-3]\cup[3,+\infty)$

$D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}: x\in D_f,\ f(x)\in D_g\}$

$$x\in D_{g\circ f} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x\in D_f \\ f(x)\in D_g \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x\in[1,+\infty) \\ \sqrt{x-1}\in(-\infty,-3]\cup[3,+\infty) \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} x\geq 1 \\ \sqrt{x-1}\leq -3 \text{ ή } \sqrt{x-1}\geq 1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} x\geq 1 \\ \sqrt{x-1}\leq -3 \\ (\text{Άτοπο}) \end{pmatrix} \text{ ή } \begin{pmatrix} x\geq 1 \\ \sqrt{x-1}\geq 3 \end{pmatrix} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} x\geq 1 \\ \left(\sqrt{x-1}\right)^2\geq 3^2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x\geq 1 \\ x-1\geq 9 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x\geq 1 \\ x\geq 10 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow x\geq 10 \Leftrightarrow x\in[10,+\infty)$$



$Oπότε : D_{g\circ f} = [10,+\infty)$

$Aν\ x \in [10,+\infty)\ θα\ έχω:$

$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{f^2(x)-9} = \sqrt{\left(\sqrt{x-1}\right)^2 - 9} = \sqrt{x-1-9} = \sqrt{x-10}$

2.

$Δίνονται\ οι\ συναρτήσεις\ f, g\ με\ τύπους:$
$f(x) = \sqrt{x^2-1}\ και\ g(x) = \ln x$
$Nα\ οριστεί\ η\ g\circ f$

$D_f = \{x\in\mathbb{R} : x^2 - 1 \geq 0\}$

$Θεωρώ\ την\ δευτεροβάθμια\ εξίσωση: x^2 - 1 = 0$

$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1} \Leftrightarrow x = \pm 1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

$x \in D_f \Leftrightarrow x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

$Oπότε : D_f = (-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

$D_g = \{x\in\mathbb{R} : x > 0\} = (0,+\infty)$

$D_{g\circ f} = \{x\in\mathbb{R} : x\in D_f,\ f(x)\in D_g\}$

$x\in D_{g\circ f} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x\in D_f \\ f(x)\in D_g \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x^2-1\geq 0 \\ \sqrt{x^2-1} > 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x^2-1\geq 0 \\ x^2-1 > 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0$

$\Leftrightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

$Oπότε : D_{g\circ f} = (-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

$Aν\ x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\ θα\ έχω:$

$$(g\circ f)(x)=g\left(f(x)\right)=\ln\left(\sqrt{x^2-1}\right)\overset{\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}},a\geq 0}{=}\ln\left[\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}\right]\overset{\ln\theta^{\kappa}=\kappa\ln\theta,\theta>0}{=}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(x^2-1\right)=\frac{\ln\left(x^2-1\right)}{2}$$

3.

Δίνονται οι συναρτήσεις f,g *με τύπους*:
$f(x)=3x-4, g(x)=\begin{cases}x-3, x\leq -2\\ 3x+2, x>-2\end{cases}$
Να βρεθεί η συνάρτηση $f\circ g$

Έχω: $D_f=\mathbb{R}, D_g=\mathbb{R}$

$$D_{f\circ g}=\left\{x\in\mathbb{R}: x\in D_g, g(x)\in D_f\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}: x\in\mathbb{R}, g(x)\in\mathbb{R}\right\}=\mathbb{R}$$

$$(f\circ g)(x)=f\left(g(x)\right)=3g(x)-4=\begin{cases}3g(x)-4, x\leq -2\\ 3g(x)-4, x>-2\end{cases}\overset{g(x)=\begin{cases}x-3,x\leq -2\\ 3x+2,x>-2\end{cases}}{=}$$

$$=\begin{cases}3(x-3)-4, x\leq -2\\ 3(3x+2)-4, x>-2\end{cases}=\begin{cases}3x-13, x\leq -2\\ 9x+2, x>-2\end{cases}$$

4.

Δίνονται οι συναρτήσεις f,g *με τύπους*:
$f(x)=\begin{cases}2x, x>0\\ x^2, x\leq 0\end{cases}, g(x)=\begin{cases}x-3, x<4\\ 2x, x\geq 4\end{cases}$
Να βρεθεί η συνάρτηση $g\circ f$

$$\text{Διακρίνω τις περιπτώσεις}:\begin{cases}(\mathrm{I})\, x>0, f(x)<4\\ (\mathrm{II})\, x>0, f(x)\geq 4\\ (\mathrm{III})\, x\leq 0, f(x)<4\\ (\mathrm{IV})\, x\leq 0, f(x)\geq 4\end{cases}$$

Περίπτωση (I):

$$\left\{\begin{matrix}x>0\\ f(x)<4\end{matrix}\right\}\overset{f(x)=2x,x>0}{\Longleftrightarrow}\left\{\begin{matrix}x>0\\ f(x)<4\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}x>0\\ 2x<4\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}x>0\\ x<2\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow 0<x<2$$

Αν $0<x<2$ *θα έχω*:

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))\overset{\substack{\text{Επειδή } f(x)<4 \text{ θα βρώ το } g(f(x))\\ \text{απο τον τύπο } g(x)=x-3,x<4 \text{ απλά}\\ \text{όπου } x \text{ θα βάλω το } f(x)}}{=}f(x)-3\overset{f(x)=2x,x>0}{=}2x-3$$

$\text{Οπότε}: \boxed{(g\circ f)(x)=2x-3, 0<x<2}$

Περίπτωση (II)

$$\begin{Bmatrix} x>0 \\ f(x)\geq 4 \end{Bmatrix}\overset{f(x)=2x,x>0}{\Leftrightarrow}\begin{Bmatrix} x>0 \\ 2x\geq 4 \end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix} x>0 \\ x\geq 2 \end{Bmatrix}\Leftrightarrow x\geq 2$$

$\text{Αν } x\geq 2 \text{ θα έχω}:$

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))\overset{\substack{\text{Επειδή } f(x)\geq 4 \text{ θα βρώ το } g(f(x))\\ \text{απο τον τύπο } g(x)=2x,x\geq 4 \text{ απλά}\\ \text{όπου } x \text{ θα βάλω το } f(x)}}{=}2f(x)\overset{f(x)=2x,x>0}{=}2\bullet 2x=4x$$

$\text{Οπότε}: \boxed{(g\circ f)(x)=4x, x\geq 2}$

Περίπτωση (III)

$$\begin{Bmatrix} x\leq 0 \\ f(x)<4 \end{Bmatrix}\overset{f(x)=x^2,x\leq 0}{\Leftrightarrow}\begin{Bmatrix} x\leq 0 \\ x^2-4<0 \end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix} x\leq 0 \\ x^2-4<0 \end{Bmatrix}$$

$\text{Θεωρώ την δευτεροβάθμια εξίσωση}: x^2-4=0$

$$x^2-4=0\Leftrightarrow x^2-2^2=0\Leftrightarrow (x-2)(x+2)=0\Leftrightarrow\begin{Bmatrix} x-2=0 \\ \text{ή} \\ x+2=0 \end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix} x=2 \\ \text{ή} \\ x=-2 \end{Bmatrix}$$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
x^2-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\begin{Bmatrix} x\leq 0 \\ x^2-4<0 \end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix} x\leq 0 \\ -2<x<2 \end{Bmatrix}\Leftrightarrow -2<x\leq 0$$

$\text{Αν } -2<x\leq 0 \text{ θα έχω}:$

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))\overset{\substack{\text{Επειδή } f(x)<4 \text{ θα βρώ το } g(f(x))\\ \text{απο τον τύπο } g(x)=x-3,x<4 \text{ απλά}\\ \text{όπου } x \text{ θα βάλω το } f(x)}}{=}f(x)-3\overset{f(x)=x^2,x\leq 0}{=}x^2-3$$

$\text{Οπότε}: \boxed{(g\circ f)(x)=x^2-3, -2<x\leq 0}$

Περίπτωση (IV)

$$\begin{Bmatrix} x\leq 0 \\ f(x)\geq 4 \end{Bmatrix}\overset{f(x)=x^2,x\leq 0}{\Leftrightarrow}\begin{Bmatrix} x\leq 0 \\ x^2\geq 4 \end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix} x\leq 0 \\ x^2-4\geq 0 \end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix} x\leq 0 \\ x\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty) \end{Bmatrix}$$

$x \in (-\infty, -2]$

Αν $x \leq -2$ θα έχω:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \overset{\substack{\text{Επειδή } f(x)\geq 4 \text{ θα βρώ το } g(f(x)) \\ \text{απο τον τύπο } g(x)=2x, x\geq 4 \text{ απλά} \\ \text{όπου } x \text{ θα βάλω το } f(x)}}{=} 2f(x) \overset{f(x)=x^2, x\leq 0}{=} 2x^2$$

Οπότε: $\boxed{(g \circ f)(x) = 2x^2, x \leq -2}$

Το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ θα είναι:

$D_{g \circ f} = (-\infty, -2] \cup (-2, 0] \cup (0, 2) \cup [2, +\infty) = \mathbb{R}$

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 2x^2, x \leq -2 \\ x^2 - 3, -2 < x \leq 0 \\ 2x - 3, 0 < x < 2 \\ 4x, x \geq 2 \end{cases}$$

5.

Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^*$ που ικανοποιεί την σχέση:

$2f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 \ (1)$

Να βρεθεί ο τύπος της f

Στην σχέση (1) όπου x θέτω το $\frac{1}{x}$:

$$2f\left(\frac{1}{x}\right) - f\left(\frac{1}{\frac{1}{x}}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 \Leftrightarrow 2f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 \ (2)$$

Απο τις σχέσεις $(1),(2)$ θα έχω το σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{l} 2f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 \\ -f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2\left[2f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right)\right] = 2x^2 \\ -f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4f(x) - 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 2x^2 \\ -f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{cases} 4f(x)-2f\left(\frac{1}{x}\right)=2x^2 \\ -f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^2} \end{cases}\right\}(+)$$

$$4f(x)-2f\left(\frac{1}{x}\right)-f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=2x^2+\frac{1}{x^2}\Leftrightarrow 3f(x)=\frac{2x^4+1}{x^2}\Leftrightarrow f(x)=\frac{\frac{2x^4+1}{x^2}}{3}$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\frac{2x^4+1}{3x^2}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

$\Delta\acute{\iota}\nu o\nu\tau\alpha\iota\ o\iota\ \sigma\upsilon\nu\alpha\rho\tau\acute{\eta}\sigma\varepsilon\iota\varsigma\ f,g\ \mu\varepsilon\ \tau\acute{\upsilon}\pi o\upsilon\varsigma:$

$f(x)=\sqrt{2x-1}\ \kappa\alpha\iota\ g(x)=\sqrt{9-x^2}$

$\mathrm{N}\alpha\ o\rho\iota\sigma\tau\varepsilon\acute{\iota}\ \eta\ g\circ f$

2.

$\Delta\acute{\iota}\nu o\nu\tau\alpha\iota\ o\iota\ \sigma\upsilon\nu\alpha\rho\tau\acute{\eta}\sigma\varepsilon\iota\varsigma\ f,g\ \mu\varepsilon\ \tau\acute{\upsilon}\pi o\upsilon\varsigma:$

$f(x)=\sqrt{x^3-4x^2+3}\ \kappa\alpha\iota\ g(x)=\ln x$

$\mathrm{N}\alpha\ o\rho\iota\sigma\tau\varepsilon\acute{\iota}\ \eta\ g\circ f$

3.

$\Delta\acute{\iota}\nu o\nu\tau\alpha\iota\ o\iota\ \sigma\upsilon\nu\alpha\rho\tau\acute{\eta}\sigma\varepsilon\iota\varsigma\ f,g\ \mu\varepsilon\ \tau\acute{\upsilon}\pi o\upsilon\varsigma:$

$$f(x)=x^2-4x+3, g(x)=\begin{cases}3x-1, x<2\\ \sqrt{x}, x\geq 2\end{cases}$$

$\mathrm{N}\alpha\ \beta\rho\varepsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\ \eta\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f\circ g$

4.

$\Delta\acute{\iota}\nu o\nu\tau\alpha\iota\ o\iota\ \sigma\upsilon\nu\alpha\rho\tau\acute{\eta}\sigma\varepsilon\iota\varsigma\ f,g\ \mu\varepsilon\ \tau\acute{\upsilon}\pi o\upsilon\varsigma:$

$$f(x)=\begin{cases}3x, x>0\\ x^2-7, x\leq 0\end{cases}, g(x)=\begin{cases}3x+3, x<9\\ 5x, x\geq 9\end{cases}$$

$\mathrm{N}\alpha\ \beta\rho\varepsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\ \eta\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ g\circ f$

5.

$\Delta\acute{\iota}\nu\varepsilon\tau\alpha\iota\ \eta\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f\ \mu\varepsilon\ \pi\varepsilon\delta\acute{\iota}o\ o\rho\iota\sigma\mu o\acute{\upsilon}\ \tau o\ \mathbb{R}\ \pi o\upsilon\ \iota\kappa\alpha\nu o\pi o\iota\varepsilon\acute{\iota}$

$\tau\eta\nu\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\eta: f(x-2)+2f(3-x)=11-2x(1)$

$\Upsilon\pi o\delta\varepsilon\iota\xi\eta:\Sigma\tau\eta\nu\ (1)\ \acute{o}\pi o\upsilon\ x\beta\acute{\alpha}\zeta\omega\ \tau o\ x+2\Rightarrow f(x)+2f(1-x)=7-2x(2)$

$\Sigma\tau\eta\nu\ (2)\ \acute{o}\pi o\upsilon\ x\beta\acute{\alpha}\zeta\omega\ \tau o\ 1-x\Rightarrow f(1-x)+2f(x)=5+2x$