Ο κανόνας του de L'Hospital
$$\text{Αν}\left.\begin{cases}(\mathrm{I})\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0\\ (\mathrm{II})\ \text{Το} \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}\ \text{υπάρχει δηλ.είναι}\\ \text{πραγματικός αριθμός ή} \pm\infty\end{cases}\right\}\ \text{τότε}\ \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$ Το x_0 είναι πραγματικός αριθμός ή $+\infty$ ή $-\infty$
$$\text{Αν}\left.\begin{cases}(\mathrm{I})\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty, \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty\\ (\mathrm{II})\ \text{Το} \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}\ \text{υπάρχει δηλ. είναι}\\ \text{πραγματικός αριθμός ή} \pm\infty\end{cases}\right\}\ \text{τότε}\ \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$ Το x_0 είναι πραγματικός αριθμός ή $+\infty$ ή $-\infty$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1

Να βρεθεί το όριο : $$\lim_{x\to 0}\frac{x-\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0}(1-\eta\mu x)=\lim\limits_{x\to 0}(1-\sigma\upsilon\nu x)=0$ απο τον κανόνα του de L'Hospital θα έχω:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\eta\mu x)'}{(1-\sigma\upsilon\nu x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{(x)'-(\eta\mu x)'}{(1)'-(\sigma\upsilon\nu x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{-(-\eta\mu x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$$

.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sigma\upsilon\nu x)=\lim\limits_{x\to 0}\eta\mu x=0$ απο τον κανόνα του de L'Hospital θα έχω:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\sigma\upsilon\nu x)'}{(\eta\mu x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{(1)'-(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-(-\eta\mu x)}{\sigma\upsilon\nu x}=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=\lim_{x\to 0}\varepsilon\phi x=\varepsilon\phi 0=0$$

2

Να βρεθεί το όριο :

$$\lim_{x\to 0} x^2 \ln x$$

. $x^{x^2} = e^{\ln x^{x^2}} = e^{x^2 \ln x}$

$$\lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}$$

$\text{Επειδή } \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty, \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$ *απο τον κανόνα του de L'Hospital θα έχω*:

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)'}{(\frac{1}{x^2})'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{(x^{-2})'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-2x^{-3}} =$$

$$= -\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{2}{x^3}} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+} \frac{x^3}{x} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+} x^2 = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^{x^2} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln x^{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 \ln x} = e^0 = 1$$

3.

Να βρεθεί το όριο :

$$\lim_{x\to 0} x^{x^2}$$

$x^{x^2} = e^{\ln x^{x^2}} = e^{x^2 \ln x}$

$$\lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}$$

$\text{Επειδή } \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty, \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$ *απο τον κανόνα του de L'Hospital θα έχω*:

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)'}{(\frac{1}{x^2})'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{(x^{-2})'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-2x^{-3}} =$$

$$= -\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{2}{x^3}} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+} \frac{x^3}{x} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+} x^2 = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^{x^2} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln x^{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 \ln x} = e^0 = 1$$

4.

Να βρεθεί το όριο :

$$\lim_{x\to 0}(\eta\mu x)^{x^2}$$

$$(\eta\mu x)^{x^2} = e^{\ln(\eta\mu x)^{x^2}} = e^{x^2\ln(\eta\mu x)}$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^2\ln(\eta\mu x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\eta\mu x)}{\frac{1}{x^2}}$$

$\Theta\acute{\varepsilon}\tau\omega\ t = \eta\mu x$

$x \to 0^+ \Rightarrow t \to 0^+$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(\eta\mu x) = \lim_{t\to 0^+} \ln t = -\infty$$

$\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \lim\limits_{x\to 0^+} \ln(\eta\mu x) = -\infty, \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$ *απο τον κανόνα του de L'Hospital θα έχω*:

$$\lim_{x\to 0^+} x^2\ln(\eta\mu x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\eta\mu x)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln(\eta\mu x))'}{(\frac{1}{x^2})'} =$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{(\eta\mu x)'}{\eta\mu x}}{(x^{-2})'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}}{-2x^{-3}} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}}{\frac{2}{x^3}} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+} x^3 \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} =$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{(\eta\mu x)'}{\eta\mu x}}{(x^{-2})'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}}{-2x^{-3}}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}}{\frac{2}{x^3}}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+}x^3\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}=$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+}x^3\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x\frac{\eta\mu x}{x}}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+}x^2\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\frac{\eta\mu x}{x}}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+}x^2\frac{\lim\limits_{x\to 0^+}\sigma\upsilon\nu x}{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x}{x}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\bullet 0\bullet\frac{1}{1}=0$$

$$\lim_{x\to 0^+}(\eta\mu x)^{x^2}=\lim_{x\to 0^+}e^{\ln(\eta\mu x)^{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}e^{x^2\ln(\eta\mu x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}x^2\ln(\eta\mu x)}=e^0=1$$

5

Να βρεθεί το όριο :

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2}{x}\right)^x$$

.

$$\left(\frac{2}{x}\right)^x=e^{\ln\left(\frac{2}{x}\right)^x}=e^{x\ln\left(\frac{2}{x}\right)}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\ln\left(\frac{2}{x}\right)^x=\lim_{x\to 0^+}x\ln\left(\frac{2}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(\frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=$$

$$\Theta\acute{\varepsilon}\tau\omega\ t=\frac{2}{x}$$

$$x\to 0^+\Rightarrow t\to+\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+}\ln\left(\frac{2}{x}\right)=\lim_{t\to+\infty}\ln t=+\infty$$

$$\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \lim_{x\to 0^+}\ln\left(\frac{2}{x}\right)=+\infty,\ \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}=+\infty\ \alpha\pi o\ \tau o\nu\ \kappa\alpha\nu\acute{o}\nu\alpha\ \tau o\upsilon$$

$$de\ L'Hospital\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$$

$$\lim_{x\to 0^+}\ln(\frac{2}{x})^x=\lim_{x\to 0^+}x\ln(\frac{2}{x})=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\frac{2}{x})}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{[\ln(\frac{2}{x})]'}{(\frac{1}{x})'}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{(\frac{2}{x})'}{\frac{2}{x}}}{(x^{-1})'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{(2x^{-1})'}{\frac{2}{x}}}{-x^{-2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{-2x^{-2}}{2x^{-1}}}{-x^{-2}}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{-2}x^{-2}}{x^{-1}}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{-4}}{x^{-1}}=$$

$$=-\lim_{x\to 0^+}x^{-4-(-1)}=-\lim_{x\to 0^+}x^{-4+1}=-\lim_{x\to 0^+}x^{-3}=-\lim_{x\to 0^+}x^{-3}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+}(\frac{2}{x})^x=\lim_{x\to 0^+}e^{\ln(\frac{2}{x})^x}=e^{\lim_{x\to 0^+}x\ln(\frac{2}{x})}=0$$

6.

$N\alpha\ \beta\rho\varepsilon\acute{\iota}\tau\varepsilon\ \tau\eta\nu\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ \gamma\iota\alpha\ \tau\eta\nu\ o\pi o\acute{\iota}\alpha\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\ \eta$ $\sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\eta:$

$$xf(x)+e^{\eta\mu x}=f(x)\eta\mu x+e^x$$

$$xf(x)+e^{\eta\mu x}=f(x)\eta\mu x+e^x\Leftrightarrow xf(x)-f(x)\eta\mu x=e^x-e^{\eta\mu x}\Leftrightarrow$$

$$(x-\eta\mu x)f(x)=e^x-e^{\eta\mu x}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}|\eta\mu x|=|x|\Leftrightarrow x=0\\ |\eta\mu x|<|x|\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\neq 0\end{array}}$$

$$x-\eta\mu x=0\Leftrightarrow \eta\mu x=x\Rightarrow|\eta\mu x|=|x|\Leftrightarrow x=0$$

$A\nu\ x=0\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$x-\eta\mu x=0-\eta\mu 0=0-0=0$$

$O\pi\acute{o}\tau\varepsilon: x-\eta\mu x=0\Leftrightarrow x=0$

$\acute{A}\rho\alpha: x-\eta\mu x\neq 0\Leftrightarrow x\neq 0$

$A\nu\ x\neq 0\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega: f(x)=\dfrac{e^x-e^{\eta\mu x}}{x-\eta\mu x}$

$E\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \eta\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ 0\ \theta\alpha\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\ f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)$

$$f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{\eta\mu x}}{x-\eta\mu x}\overset{\substack{\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{x}-e^{\eta\mu x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x-\eta\mu x\right)=0\\ \text{Κανόνας του de L'Hospital}}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{x}-e^{\eta\mu x}\right)'}{\left(x-\eta\mu x\right)'}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{\eta\mu x}\left(\eta\mu x\right)'}{1-\sigma\upsilon\nu x}=\overset{\substack{\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{x}-e^{\eta\mu x}\sigma\upsilon\nu x\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\sigma\upsilon\nu x\right)=0\\ \text{Κανόνας του de L'Hospita}}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{x}-e^{\eta\mu x}\sigma\upsilon\nu x\right)'}{\left(1-\sigma\upsilon\nu x\right)'}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{\eta\mu x}\sigma\upsilon\nu^{2}x+\eta\mu x e^{\eta\mu x}}{\eta\mu x}\overset{\substack{\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{x}-e^{\eta\mu x}\sigma\upsilon\nu^{2}x+\eta\mu x e^{\eta\mu x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\eta\mu x=0\\ \text{Κανόνας του de L'Hospita}}}{=}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{x}-e^{\eta\mu x}\sigma\upsilon\nu^{2}x+\eta\mu x e^{\eta\mu x}\right)'}{\left(\eta\mu x\right)'}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{\eta\mu x}\sigma\upsilon\nu^{3}x+2e^{\eta\mu x}\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu x e^{\eta\mu x}+e^{\eta\mu x}\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x}=\frac{1}{1}=1$$

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

1.

Να βρεθεί το όριο :

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x-\eta\mu 2x}{1-\sigma\upsilon\nu 2x}$$

2.

Να βρεθεί το όριο :

$$\lim_{x\to 0} x^{3}\ln x$$

3.

Να βρεθεί το όριο :

$$\lim_{x\to 0} x^{x^{3}}$$

4.

Να βρεθεί το όριο :

$$\lim_{x\to 0}(\eta\mu x)^{x^{3}}$$

5.

Να βρεθεί το όριο :

$$\lim_{x\to 0^{+}}\left(\frac{3}{x}\right)^{x}$$

6.

Να βρεθεί το όριο :

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x - \eta\mu 3x}{1 - \sigma\upsilon\nu 3x}$$

7.

Να βρεθεί το όριο :

$$\lim_{x\to 0} x^4 \ln x$$

8.

Να βρεθεί το όριο :

$$\lim_{x\to 0} x^{x^4}$$

9.

Να βρεθεί το όριο :

$$\lim_{x\to 0} (\eta\mu x)^{x^4}$$

11.

Να βρεθεί το όριο :

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{4}{x}\right)^x$$

12.

Να βρεθεί το όριο :

$$\lim_{x\to 0} \frac{4x - \eta\mu 4x}{1 - \sigma\upsilon\nu 4x}$$

13.

Να βρεθεί το όριο :

$$\lim_{x\to 0} x^5 \ln x$$

14.

Να βρεθεί το όριο :

$$\lim_{x\to 0} x^{x^5}$$

15.

Να βρεθεί το όριο :

$$\lim_{x\to 0} (\eta\mu x)^{x^5}$$

16.

Να βρεθεί το όριο :

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{5}{x}\right)^x$$

17.

Να βρεθεί το όριο :

$$\lim_{x \to 0} \frac{5x - \eta\mu 5x}{1 - \sigma\upsilon\nu 5x}$$

18.

Να βρεθεί το όριο :

$$\lim_{x \to 0} x^6 \ln x$$

19.

Να βρεθεί το όριο : $\lim_{x \to 0} x^{x^6}$