ΑΣΥΠΤΩΤΕΣ ΤΗΣ C_f

Η $\textit{ευθεία } x = x_0 \ (x_0 \in \mathbb{R})$ *είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης* f *όταν ισχύει*: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ *ή* $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty$ *ή* $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty$
Η *ευθεία* $y = y_0 \ (y_0 \in \mathbb{R})$ *είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης* f *όταν ισχύει*: $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = y_0$ *ή* $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = y_0$
Η *ευθεία* $y = \lambda x + \mu \ (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$ *είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης* f *όταν ισχύει*: $\lim\limits_{x\to +\infty}[f(x) - (\lambda x + \mu)] = 0$ *ή* $\lim\limits_{x\to -\infty}[f(x) - (\lambda x + \mu)] = 0$
Η *ευθεία* $y = \lambda x + \mu \ (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$ *είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης* f *στο* $-\infty$ *τότε ισχύει*: $\lambda = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ *και* $\mu = \lim\limits_{x\to -\infty}[f(x) - \lambda x]$
Η *ευθεία* $y = \lambda x + \mu \ (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$ *είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης* f *στο* $+\infty$ *τότε ισχύει*: $\lambda = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ *και* $\mu = \lim\limits_{x\to +\infty}[f(x) - \lambda x]$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1.

Να βρεθούν οιασύπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$

$$f(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$$

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Κατακόρυφη ασύπτωτη:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(2x + \frac{1}{x^2}) = 2\lim_{x\to 0} x + \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = 2 \bullet 0 + \infty = +\infty$$

Άρα η C_f εχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x = 0$

Πλάγιες και οριζόντιες ασύμπτωτες

$$\lambda = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x + \frac{1}{x^2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} (\frac{2x}{x} + \frac{\frac{1}{x^2}}{x}) = \lim_{x\to\pm\infty} (2 + \frac{1}{x^3}) =$$

$$= 2 + \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^3} = 2 + 0 = 2$$

$$\mu = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x\to\pm\infty} (2x + \frac{1}{x^2} - 2x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Άρα η C_f εχει ασύμπτωτη την $y = \lambda x + \mu$ δηλ. την ευθεία $y = 2x$

2.

Να βρεθούν οι ασύπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

$Το\ πεδίο\ ορισμού\ της\ f\ είναι\ το\ (0,+\infty)$

$Κατακόρυφη\ ασύπτωτη:$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\ln x = (+\infty)(-\infty) = -\infty$$

$Άρα\ η\ C_f\ εχει\ κατακόρυφη\ ασύμπτωτη\ την\ x = 0$

$Πλάγιες\ και\ οριζόντιες\ ασύμπτωτες:$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\ln x}{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2}$$

$Επειδή\ \lim_{x\to+\infty} \ln x = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty\ απο\ τον\ κανόνα\ του$

$De'Hospital\ θα\ έχω:$

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$$

$$\mu = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x\to+\infty} [\frac{\ln x}{x} - 0 \bullet x] = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}$$

$Επειδή\ \lim_{x\to+\infty} \ln x = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty\ απο\ τον\ κανόνα\ του$

$De'Hospital\ θα\ έχω:$

$$\mu = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$Άρα\ η\ C_f\ εχει\ ασύμπτωτη\ την\ y = \lambda x + \mu\ δηλ.\ την\ ευθεία$

$y = 0$

3.

$Να\ βρεθούν\ οι\ πλάγιες\ ασύπτωτες\ της\ γραφικής$ $παράστασης\ της\ συνάρτησης\ f(x) = \sqrt{x^2+1}$

$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 \geq 0 \right\}$

$x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 1 \geq 1 > 0 \Rightarrow x^2 + 1 > 0$

$\text{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon : D_f = \mathbb{R}$

$\text{A}\nu \;\; x \to +\infty \Rightarrow x > 0 \Rightarrow |x| = x$

$$\lambda = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \sqrt{1+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}} = 1$$

$$f(x) - \lambda x = \sqrt{x^2+1} - x = \sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})} - x = \sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - x =$$

$$= |x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - x = x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - x = x(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - 1)$$

$$\lim_{x\to\infty} x = +\infty, \lim_{x\to\infty}(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - 1) = \sqrt{1+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}} - 1 = 0$$

$$f(x) - \lambda x = \frac{(\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{x^2+1} + x)}{\sqrt{x^2+1} + x} = \frac{(\sqrt{x^2+1})^2 - x^2}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})} + x} =$$

$$= \frac{x^2+1-x^2}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + x} = \frac{1}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + x} = \frac{1}{x(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + 1)} = \frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + 1}$$

$$\mu = \lim_{x\to\infty}[f(x) - \lambda x] = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{1+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}} + 1} = 0$$

Άρα η C_f *εχει ασύμπτωτη την* $y = \lambda x + \mu$ *δηλ. την ευθεία*

$y = x$

$$\text{Αν } x \to -\infty \Rightarrow x > 0 \Rightarrow |x| = -x$$

$$\lambda = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} =$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = -\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = -\sqrt{1+\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}} = -1$$

$$f(x) - \lambda x = \sqrt{x^2+1} + x = \sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})} + x = \sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + x =$$

$$= |x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + x = -x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - x = x(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + 1)$$

$$\lim_{x\to-\infty} x = -\infty,\ \lim_{x\to-\infty}(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + 1) = -\sqrt{1+\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}} + 1 = 0$$

$$f(x) - \lambda x = \frac{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}{\sqrt{x^2+1}-x} = \frac{(\sqrt{x^2+1})^2 - x^2}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})} - x} =$$

$$= \frac{x^2+1-x^2}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - x} = \frac{1}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - x} = \frac{1}{-x(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + 1)} = -\frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + 1}$$

$$\mu = \lim_{x\to\infty}[f(x) - \lambda x] = -\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{1+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}} + 1} = 0$$

Άρα η C_f *εχει ασύμπτωτη την* $y = \lambda x + \mu$ *δηλ. την ευθεία* $y = -x$

4.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{(a-1)x^2 + \beta x + 5}{3x + \gamma}$ *με* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ *Να βρεθούν τα* α, β, γ *ώστε η* C_f *να έχει ασύμπτωτες τις ευθείες* $x = -2$ *και* $y = 3$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 3x+\gamma \neq 0\}$

$\Theta\varepsilon\omega\rho\acute{\omega}\ \tau\eta\nu\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta : 3x+\gamma = 0 \Leftrightarrow 3x = -\gamma \Leftrightarrow \frac{3x}{3} = \frac{-\gamma}{3} \Leftrightarrow x = -\frac{\gamma}{3}$

$x \in D_f \Leftrightarrow 3x+\gamma \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{\gamma}{3} \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\frac{\gamma}{3}) \cup (-\frac{\gamma}{3}, +\infty)$

$D_f = (-\infty, -\frac{\gamma}{3}) \cup (-\frac{\gamma}{3}, +\infty)$

Η $\sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ (-\infty, -\frac{\gamma}{3}) \cup (-\frac{\gamma}{3}, +\infty)$

Η $\sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta f\ \acute{\varepsilon}\chi\varepsilon\iota\ \kappa\alpha\tau\alpha\kappa\acute{o}\rho\upsilon\varphi\eta\ \alpha\sigma\acute{\upsilon}\mu\pi\tau\omega\tau\eta\ \tau\eta\nu\ x = -2$

Ο$\pi\acute{o}\tau\varepsilon \lim\limits_{x\to -2} f(x) = \pm\infty\ \acute{\eta}\ \lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \pm\infty\ \acute{\eta}\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \pm\infty \text{Άρα}:$

$-\frac{\gamma}{3} = -2 \Leftrightarrow \frac{\gamma}{3} = 2 \Leftrightarrow \gamma = 2\bullet 3 \Leftrightarrow \gamma = 6$

Η$\sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta f\ \acute{\varepsilon}\chi\varepsilon\iota\ o\rho\iota\zeta\acute{o}\nu\tau\iota\alpha\ \alpha\sigma\acute{\upsilon}\mu\pi\tau\omega\tau\eta\ \tau\eta\nu\ y = 3. \text{Άρα}\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega :$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 3 \acute{\eta} \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 3$

$\text{Έστω}: a-1 \neq 0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{(a-1)x^2+\beta x+5}{3x+\gamma} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{(a-1)x^2}{3x} = \frac{a-1}{3} \lim\limits_{x\to +\infty} x =$

$= \frac{a-1}{3}(+\infty) = \begin{cases} +\infty, a-1>0 \\ -\infty, a-1<0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{(a-1)x^2+\beta x+5}{3x+\gamma} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{(a-1)x^2}{3x} = \frac{a-1}{3} \lim\limits_{x\to -\infty} x =$

$= \frac{a-1}{3}(-\infty) = \begin{cases} -\infty, a-1>0 \\ +\infty, a-1<0 \end{cases}$

$\text{Άτοπο}\ \gamma\iota\alpha\tau\acute{\iota}\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 3 \acute{\eta} \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 3. \Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma : a-1=0 \Leftrightarrow \alpha = 1$

$f(x) = \frac{(a-1)x^2+\beta x+5}{3x+\gamma} = \frac{(1-1)x^2+\beta x+5}{3x+6} = \frac{\beta x+5}{3x+6}$

$\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = 3 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to \pm\infty} \frac{\beta x+5}{3x+6} = 3 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to \pm\infty} \frac{\beta x}{3x} = 3 \Leftrightarrow \frac{\beta}{3} = 3 \Leftrightarrow \beta = 3\bullet 3$

$\Leftrightarrow \beta = 9$

5.

Αν *για μια συνάρτηση* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *ισχύει ότι*:
$2x+3\le f(x)\le \frac{2x^3+3x^2+1}{x^2}$ *για κάθε* $x\in\mathbb{R}^*$
Να αποδείξετε οτι η f έχει πλάγια ασύμπτωτη

$$2x+3\le f(x)\le \frac{2x^3+3x^2+1}{x^2} \Leftrightarrow 2x+3\le f(x)\le \frac{2x^3}{x^2}+\frac{3x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow 2x+3\le f(x)\le 2x+3+\frac{1}{x^2} \Leftrightarrow 0\le f(x)-2x-3\le \frac{1}{x^2}$$

$$\begin{cases} 0\le f(x)-(2x+3)\le \frac{1}{x^2}, x\ne 0(1) \\ \lim\limits_{x\to\infty} 0=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0 \end{cases}$$

Απο *τις σχέσεις* (1) , (2) *σύμφωνα με το κριτήριο της παρεμβολής θα έχω*: $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(2x+3)]=0$ *Άρα η ευθεία* $y=2x+3$ *είναι πλάγια ασύμπτωτη της* C_f

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

1.

Ν*α βρεθούν οι ασύπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης* $f(x)=3x+\frac{1}{x^2}$

2.

Ν*α βρεθούν οι ασύπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης* $f(x)=\frac{\ln 2x}{x}$

3.

Ν*α βρεθούν οι πλάγιες ασύπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης* $f(x)=\sqrt{x^2+4}$

4.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{(2a-1)x^2+\beta x+5}{x+\gamma}$ με $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$

Να βρεθούν τα α,β,γ ώστε η C_f να έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $x=-2$ και $y=3$

5.

Αν για μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$2x+4\le f(x)\le\frac{2x^3+4x^2+1}{x^2} \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}^*$$

Να αποδείξετε οτι η f έχει πλάγια ασύμπτωτη

6.

Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνεχήςσυνάρτηση για την οποία ισχύει

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{xf(x)+3x^2}{\sqrt{x^2+1}}=2$$

Να βρείτε την ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$

Υποδειξη:

$$\frac{xf(x)+3x^2}{\sqrt{x^2+1}}=g(x),\ \lim_{x\to-\infty}g(x)=2,\ x\to-\infty\Rightarrow x<0$$

$$\frac{xf(x)+3x^2}{\sqrt{x^2+1}}=g(x)\Leftrightarrow f(x)=\frac{g(x)\sqrt{x^2+1}-3x^2}{x}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)\sqrt{x^2+1}-3x^2}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-3x^2}{x^2}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)(-x)\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-3x^2}{x^2}-\frac{3x^2}{x^2}=-\lim_{x\to-\infty}g(x)\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-3=-3$$

$$\mu=\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-\mu x\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)\sqrt{x^2+1}-3x^2+3x^2}{x}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)(-x)\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=-\lim_{x\to-\infty}g(x)\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=-2$$

7.

Να $\beta\rho\varepsilon\theta o\acute{\upsilon}\nu$ $o\iota$ $\alpha\sigma\acute{\upsilon}\pi\tau\omega\tau\varepsilon\varsigma$ $\tau\eta\varsigma$ $\gamma\rho\alpha\varphi\iota\kappa\acute{\eta}\varsigma$ $\pi\alpha\rho\acute{\alpha}\sigma\tau\alpha\sigma\eta\varsigma$ $\tau\eta\varsigma$ $\sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\varsigma$ $f(x)=\dfrac{\ln 3x}{x}$

8.

Να $\beta\rho\varepsilon\theta o\acute{\upsilon}\nu$ $o\iota$ $\pi\lambda\acute{\alpha}\gamma\iota\varepsilon\varsigma$ $\alpha\sigma\acute{\upsilon}\pi\tau\omega\tau\varepsilon\varsigma$ $\tau\eta\varsigma$ $\gamma\rho\alpha\varphi\iota\kappa\acute{\eta}\varsigma$ $\pi\alpha\rho\acute{\alpha}\sigma\tau\alpha\sigma\eta\varsigma$ $\tau\eta\varsigma$ $\sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\varsigma$ $f(x)=\sqrt{x^2+9}$

9.

$\Delta\acute{\iota}\nu\varepsilon\tau\alpha\iota$ η $\sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta$ $f(x)=\dfrac{(a-1)x^2+2\beta x+5}{3x+\gamma}$ $\mu\varepsilon$ $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$

Να $\beta\rho\varepsilon\theta o\acute{\upsilon}\nu$ $\tau\alpha$ α,β,γ $\acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon$ η C_f $\nu\alpha$ $\acute{\varepsilon}\chi\varepsilon\iota$ $\alpha\sigma\acute{\upsilon}\mu\pi\tau\omega\tau\varepsilon\varsigma$ $\tau\iota\varsigma$ $\varepsilon\upsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\varepsilon\varsigma$ $x=-2$ $\kappa\alpha\iota$ $y=3$

10.

Αν $\gamma\iota\alpha$ $\mu\iota\alpha$ $\sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta$ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota$ $\acute{o}\tau\iota$:

$5x+2\le f(x)\le\dfrac{5x^3+2x^2+1}{x^2}$ $\gamma\iota\alpha$ $\kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon$ $x\in\mathbb{R}^*$

Να αποδείξετε οτι η f έχει πλάγια ασύμπτωτη