ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑ ΟΡΙΑ ΚΑΙ ΑΡΡΗΤΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1.

$\Delta\acute{\iota}\nu\varepsilon\tau\alpha\iota\ \eta\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f(x)=\dfrac{\sqrt{\eta\mu x+4}-2}{x^2-4x},\ x\in(-\infty,0)\cup(0,4)\cup(4,+\infty)$

$\text{N}\alpha\ \beta\rho\varepsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\ \tau o\ \acute{o}\rho\iota o\ \tau\eta\varsigma\ f\ \sigma\tau o\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\ x_0=0$

Πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρονομαστή με την παράσταση $\sqrt{\eta\mu x+4}+2$

Παραγοντοποιώ την παράσταση: $x^2-4x=x(x-4)$

$$f(x)=\frac{\sqrt{\eta\mu x+4}-2}{x^2-4x}=\frac{\left(\sqrt{\eta\mu x+4}-2\right)\left(\sqrt{\eta\mu x+4}+2\right)}{x(x-4)\left(\sqrt{\eta\mu x+4}+2\right)}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{\eta\mu x+4}\right)^2-2^2}{x(x-4)\left(\sqrt{\eta\mu x+4}+2\right)}=\frac{\eta\mu x+4-4}{x(x-4)\left(\sqrt{\eta\mu x+4}+2\right)}=\frac{\eta\mu x}{x}\frac{1}{(x-4)\left(\sqrt{\eta\mu x+4}+2\right)}$$

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{(x-4)\left(\sqrt{\eta\mu x+4}+2\right)}=1\bullet\frac{1}{(0-4)\left(\sqrt{\eta\mu 0+4}+2\right)}=-\frac{1}{16}$$

2.

$\Delta\acute{\iota}\nu\varepsilon\tau\alpha\iota\ \eta\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{7+\sigma\upsilon\nu x}-3}{x^2-8x},\ x\in(-\infty,0)\cup(0,8)\cup(8,+\infty)$

$\text{N}\alpha\ \beta\rho\varepsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\ \tau o\ \acute{o}\rho\iota o\ \tau\eta\varsigma\ f\ \sigma\tau o\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\ x_0=0$

Πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρονομαστή με την παράσταση $\left(\sqrt[3]{7+\sigma\upsilon\nu x}\right)^2+\sqrt[3]{7+\sigma\upsilon\nu x}\bullet 2+2^2$

Παραγοντοποιώ την παράσταση: $x^2-8x=x(x-8)$

$$f(x)=\frac{\sqrt[3]{7+\sigma\upsilon\nu x}-2}{x^2-8x}=$$

$$\frac{\left(\sqrt[3]{7+\sigma\upsilon\nu x}-2\right)\left[\left(\sqrt[3]{7+\sigma\upsilon\nu x}\right)^2+\sqrt[3]{7+\sigma\upsilon\nu x}\bullet 2+2^2\right]}{x(x-8)\left[\left(\sqrt[3]{7+\sigma\upsilon\nu x}\right)^2+\sqrt[3]{7+\sigma\upsilon\nu x}\bullet 2+2^2\right]}\overset{\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}{=}$$

$$\frac{\left(\sqrt[3]{7+\sigma\upsilon\nu x}\right)^3-2^3}{x\left(x-8\right)\left[\left(\sqrt[3]{7+\sigma\upsilon\nu x}\right)^2+\sqrt[3]{7+\sigma\upsilon\nu x}\bullet 2+2^2\right]}=$$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x\left(x-8\right)\left[\left(\sqrt[3]{7+\sigma\upsilon\nu x}\right)^2+\sqrt[3]{7+\sigma\upsilon\nu x}\bullet 2+2^2\right]}=$$

$$=\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\frac{1}{\left(x-8\right)\left[\left(\sqrt[3]{7+\sigma\upsilon\nu x}\right)^2+\sqrt[3]{7+\sigma\upsilon\nu x}\bullet 2+2^2\right]}$$

$$\lim_{x\to 0} f\left(x\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(x-8\right)\left[\left(\sqrt[3]{7+\sigma\upsilon\nu x}\right)^2+\sqrt[3]{7+\sigma\upsilon\nu x}\bullet 2+2^2\right]}=$$

$$=0\bullet\frac{1}{\left(0-8\right)\left[\left(\sqrt[3]{7+\sigma\upsilon\nu 0}\right)^2+\sqrt[3]{7+\sigma\upsilon\nu 0}\bullet 2+2^2\right]}=0$$

3.

$\Delta\acute{\iota}\nu\epsilon\tau\alpha\iota\ \eta\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{9+\eta\mu x}-3}{\sqrt{x+1}-1},x\in\left[-1,0\right)\cup\left(0,+\infty\right)$
$\mathrm{N}\alpha\ \beta\rho\epsilon\theta\epsilon\acute{\iota}\ \tau o\ \acute{o}\rho\iota o\ \tau\eta\varsigma\ f\ \sigma\tau o\ \sigma\eta\mu\epsilon\acute{\iota}o\ x_0=0$

$$f\left(x\right)=\frac{\sqrt{9+\eta\mu x}-3}{\sqrt{x+1}-1}\overset{\substack{\Pi o\lambda\lambda\alpha\pi\lambda\alpha\sigma\iota\acute{\alpha}\zeta\omega\ \alpha\rho\iota\theta\mu\eta\tau\acute{\eta}\ \kappa\alpha\iota\ \pi\alpha\rho o\nu o\mu\alpha\sigma\tau\acute{\eta}\\ \mu\epsilon\ \tau\eta\nu\ \pi\alpha\rho\acute{\alpha}\sigma\tau\alpha\sigma\eta:\\ \left(\sqrt{9+\eta\mu x}+3\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}}{=}$$

$$\frac{\left(\sqrt{9+\eta\mu x}-3\right)\left(\sqrt{9+\eta\mu x}+3\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)\left(\sqrt{9+\eta\mu x}+3\right)}\overset{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=\alpha^2-\beta^2}{=}$$

$$\frac{\left[\left(\sqrt{9+\eta\mu x}\right)^2-3^2\right]\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\left[\left(\sqrt{x+1}\right)^2-1\right]\left(\sqrt{9+\eta\mu x}+3\right)}=\frac{\left(9+\eta\mu x-9\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\left(x+1-1\right)\left(\sqrt{9+\eta\mu x}+3\right)}=\frac{\eta\mu x}{x}\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{9+\eta\mu x}+3}$$

$$\lim_{x\to 0} f\left(x\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{9+\eta\mu x}+3}=1\bullet\frac{\sqrt{0+1}+1}{\sqrt{9+\eta\mu 0}+3}=\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\bullet 3}=\frac{1}{3}$$

4.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{8+\eta\mu x}-2}{\sqrt{x+4}-2}, x\in[-4,0)\cup(0,+\infty)$

Να βρεθεί το όριο της f στο σημείο $x_0=0$

Πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρονομαστή με την παράσταση: $\left[\left(\sqrt[3]{8+\eta\mu x}\right)^2+\sqrt[3]{8+\eta\mu x}\bullet 2+2^2\right]\left(\sqrt{x+4}+2\right)$

$$f(x)=\frac{\sqrt[3]{8+\eta\mu x}-2}{\sqrt{x+4}-2}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt[3]{8+\eta\mu x}-2\right)\left[\left(\sqrt[3]{8+\eta\mu x}\right)^2+\sqrt[3]{8+\eta\mu x}\bullet 2+2^2\right]\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(\sqrt{x+4}+2\right)\left[\left(\sqrt[3]{8+\eta\mu x}\right)^2+\sqrt[3]{8+\eta\mu x}\bullet 2+2^2\right]}=$$

$$=\frac{\left[\left(\sqrt[3]{8+\eta\mu x}\right)^3-2^3\right]\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{\left[\left(\sqrt{x+4}\right)^2-2^2\right]\left[\left(\sqrt[3]{8+\eta\mu x}\right)^2+\sqrt[3]{8+\eta\mu x}\bullet 2+2^2\right]}=$$

$$=\frac{\left(8+\eta\mu x-8\right)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{\left(x+4-4\right)\left[\left(\sqrt[3]{8+\eta\mu x}\right)^2+\sqrt[3]{8+\eta\mu x}\bullet 2+2^2\right]}=$$

$$=\frac{\eta\mu x}{x}\,\frac{\sqrt{x+4}+2}{\left(\sqrt[3]{8+\eta\mu x}\right)^2+\sqrt[3]{8+\eta\mu x}\bullet 2+2^2}$$

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}+2}{\left(\sqrt[3]{8+\eta\mu x}\right)^2+\sqrt[3]{8+\eta\mu x}\bullet 2+2^2}=$$

$$=1\bullet\frac{\sqrt{0+4}+2}{\left(\sqrt[3]{8+\eta\mu 0}\right)^2+\sqrt[3]{8+\eta\mu 0}\bullet 2+2^2}=\frac{2\bullet 2}{3\bullet 4}=\frac{1}{3}$$

5.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\sqrt{7+2\sigma\upsilon\nu x}-\sqrt{4\sigma\upsilon\nu x+5}}{\sqrt{x+9}-3}, x\in[-9,0)\cup(0,+\infty)$

Να βρεθεί το όριο της f στο σημείο $x_0=0$

Πολλασιάζω αριθμητή και παρονομαστή με την παράσταση: $\left(\sqrt{7+2\sigma\upsilon\nu x}+\sqrt{4\sigma\upsilon\nu x+5}\right)\left(\sqrt{x+9}+3\right)$

$$f(x)=\frac{\sqrt{7+2\sigma\upsilon\nu x}-\sqrt{4\sigma\upsilon\nu x+5}}{\sqrt{x+9}-3}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{7+2\sigma\upsilon\nu x}-\sqrt{4\sigma\upsilon\nu x+5}\right)\left(\sqrt{7+2\sigma\upsilon\nu x}+\sqrt{4\sigma\upsilon\nu x+5}\right)\left(\sqrt{x+9}+3\right)}{\left(\sqrt{x+9}-3\right)\left(\sqrt{x+9}+3\right)\left(\sqrt{7+2\sigma\upsilon\nu x}+\sqrt{4\sigma\upsilon\nu x+5}\right)}=$$

$$=\frac{\left[\left(\sqrt{7+2\sigma\upsilon\nu x}\right)^2-\left(\sqrt{4\sigma\upsilon\nu x+5}\right)^2\right]\left(\sqrt{x+9}+3\right)}{\left[\left(\sqrt{x+9}\right)^2-3^2\right]\left(\sqrt{7+2\sigma\upsilon\nu x}+\sqrt{4\sigma\upsilon\nu x+5}\right)}=\frac{\left(-2\sigma\upsilon\nu x+2\right)\left(\sqrt{x+9}+3\right)}{x\left(\sqrt{7+2\sigma\upsilon\nu x}+\sqrt{4\sigma\upsilon\nu x+5}\right)}$$

$$=-2\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\frac{\sqrt{x+9}+3}{\sqrt{7+2\sigma\upsilon\nu x}+\sqrt{4\sigma\upsilon\nu x+5}}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=-2\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+9}+3}{\sqrt{7+2\sigma\upsilon\nu x}+\sqrt{4\sigma\upsilon\nu x+5}}=$$

$$-2\bullet 0\bullet\frac{\sqrt{9}+3}{\sqrt{7+2\sigma\upsilon\nu 0}+\sqrt{4\sigma\upsilon\nu 0+5}}=0$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\sqrt{2\eta\mu^2 x+25}-5}{x^3-x^2}, x\in(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$

Να βρεθεί το όριο της f στο σημείο $x_0=0$

2.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{27+\eta\mu^3 x}-3}{x^5+x^3}, x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

Να βρεθεί το όριο της f στο σημείο $x_0=0$

3.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\sqrt{13+3\sigma\upsilon\nu^2 x}-4}{\sqrt{x+9}-3}, x\in[-9,0)\cup(0,+\infty)$

Να βρεθεί το όριο της f στο σημείο $x_0=0$

4.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{5+3\sigma\upsilon\nu x}-2}{\sqrt{|x|+4}-2}, x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

Να βρεθεί το όριο της f στο σημείο $x_0=0$

5.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\sqrt{8+|1+\eta\mu x|}-\sqrt{8+|\eta\mu x-1|}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}, x\in[-3,0)\cup(0,+\infty)$

Να βρεθεί το όριο της f στο σημείο $x_0=0$ (Υπόδειξη: $-1\le\eta\mu x\le 1$)