ΤΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΤΗΣ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ

ΤΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΤΗΣ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ
$\text{Αν}: \left\{ \begin{array}{l} (\text{I})\, h(x) \le f(x) \le g(x) \ \textit{κοντά στο}\ x_0 \\ (\text{II}) \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l \end{array} \right\}$ $\text{Τότε} \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1.

$\textit{Έστω η συνάρτηση } f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \textit{ για την οποία ισχύει}:$ $f^3(x)+f(x)=x$ $\textit{Να βρεθεί το} \lim\limits_{x\to 0} f(x)$

$$f^3(x)+f(x)=x \Leftrightarrow f(x)\left[f^2(x)+1\right]=x$$

$$f^2(x)\ge 0 \Rightarrow f^2(x)+1\ge 1>0 \Rightarrow f^2(x)+1>0 \Rightarrow f^2(x)+1\ne 0$$

$$f(x)\left[f^2(x)+1\right]=x \overset{f^2(x)+1\ne 0}{\Longleftrightarrow} f(x)=\frac{x}{f^2(x)+1} \Rightarrow \left|f(x)\right| = \left|\frac{x}{f^2(x)+1}\right| \Rightarrow$$

$$\left|f(x)\right| = \frac{|x|}{\left|f^2(x)+1\right|} \xRightarrow{f^2(x)+1>0 \Rightarrow \left|f^2(x)+1\right| = f^2(x)+1} \left|f(x)\right| = \frac{|x|}{f^2(x)+1}$$

$$f^2(x)\ge 0 \Rightarrow f^2(x)+1\ge 1 \xRightarrow{\substack{\text{Αν } \alpha,\beta \textit{ ομόσημοι αριθμοί τότε} \\ \textit{ισχύει η ισοδυναμία}: \\ \alpha\ge\beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}\le\frac{1}{\beta}}} \frac{1}{f^2(x)+1} \le \frac{1}{1} \Rightarrow \frac{1}{f^2(x)+1} \le 1$$

$$\xRightarrow{|x|\ge 0} \frac{1}{f^2(x)+1}\bullet|x| \le 1\bullet|x| \Rightarrow \frac{|x|}{f^2(x)+1} \le |x| \xRightarrow{\left|f(x)\right| = \frac{|x|}{f^2(x)+1}} \left|f(x)\right| \le |x| \xRightarrow{|x|\le\theta \Leftrightarrow -\theta\le x\le\theta,\ \theta\ge 0}$$

$$-|x| \le f(x) \le |x|$$

$$\textit{Έχω}: \left\{ \begin{array}{l} (\text{I}) -|x| \le f(x) \le |x| \ \textit{για κάθε}\ x\in\mathbb{R} \\ (\text{II}) \lim\limits_{x\to 0}\left(-|x|\right) = \lim\limits_{x\to 0}|x| = 0 \end{array} \right\}$$

$\textit{Οπότε απο το κριτήριο της παρεμβολής θα έχω}:$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

2.

> $Έστω\ η\ συνάρτηση\ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ για\ την\ οποία\ ισχύει:$
> $f^2(x)-12xf(x)+12f(x)-12x+36\le 0$
> $Να\ βρεθεί\ το\ \lim\limits_{x\to 0}f(x)$

$$f^2(x)-12xf(x)+12f(x)-12x+36\le 0\Leftrightarrow$$

$$\underbrace{f^2(x)+6^2+2\bullet f(x)\bullet 6+2\bullet 6\bullet(-x)+2\bullet f(x)\bullet(-x)}_{\alpha^2+\beta^2+2\bullet\alpha\bullet\beta+2\bullet\beta\bullet\gamma+2\bullet\alpha\bullet\gamma}\le 0$$

$Θα\ παρατηρήσω\ οτι\ εμφανίζεται\ η\ παράσταση$

$\alpha^2+\beta^2+2\bullet\alpha\bullet\beta+2\bullet\beta\bullet\gamma+2\bullet\alpha\bullet\gamma\ με\ \alpha=f(x),\beta=6,\gamma=-x.Για\ να\ εμφανιστεί$

$η\ ταυτότητα\ (\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\bullet\alpha\bullet\beta+2\bullet\beta\bullet\gamma+2\bullet\alpha\bullet\gamma\ χρειάζομαι$

$ένα\ \gamma^2\ δηλ.\ ένα\ (-x)^2.Οπότε\ προσθέτω\ και\ στα\ δυο\ μέλη\ το\ (-x)^2$

$$f^2(x)+6^2+2\bullet f(x)\bullet 6+2\bullet 6\bullet(-x)+2\bullet f(x)\bullet(-x)\le 0\Leftrightarrow$$

$$\underbrace{f^2(x)+6^2+(-x)^2+2\bullet f(x)\bullet 6+2\bullet 6\bullet(-x)+2\bullet f(x)\bullet(-x)}_{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\bullet\alpha\bullet\beta+2\bullet\beta\bullet\gamma+2\bullet\alpha\bullet\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)^2}\le(-x)^2\Leftrightarrow$$

$$(f(x)+6-x)^2\le x^2\Leftrightarrow\sqrt{(f(x)+6-x)^2}\le\sqrt{x^2}\overset{\sqrt{a^2}=|a|}{\Longleftrightarrow}|f(x)+6-x|\le|x|\overset{|x|\le\theta\Leftrightarrow-\theta\le x\le\theta,\theta\ge 0}{\Longleftrightarrow}$$

$$-|x|\le f(x)+6-x\le|x|\Leftrightarrow -6+x-|x|\le f(x)\le|x|-6+x$$

$$Έχω:\begin{cases}(\mathrm{I})-6+x-|x|\le f(x)\le|x|-6-x\ για\ κάθε\ x\in\mathbb{R}\\(\mathrm{II})\lim\limits_{x\to 0}(-6+x-|x|)=\lim\limits_{x\to 0}(|x|-6+x\ )=-6\end{cases}$$

$Οπότε\ απο\ το\ κριτήριο\ της\ παρεμβολής\ θα\ έχω:$

$$\lim_{x\to 0}f(x)=-6$$

3

> $Έστω\ η\ συνάρτηση\ f(x)=\dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x^2-4x+4}ημ\dfrac{1}{x-2},x\in(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$
> $Να\ βρεθεί\ το\ \lim\limits_{x\to 2}f(x)$

$Αν\ x\in(-\infty,2)\cup(2,+\infty)\ θα\ έχω:$

$$f(x)=\frac{x^3-6x^2+12x-8}{x^2-4x+4}ημ\frac{1}{x-2}=\frac{\underbrace{x^3-3\bullet x^2\bullet 2+3\bullet x\bullet 2^2-2^3}_{\alpha^3-3\bullet\alpha^2\bullet\beta+3\bullet\alpha\bullet\beta^2-\beta^3=(\alpha-\beta)^3}}{\underbrace{x^2-2\bullet x\bullet 2+2^2}_{\alpha^2-2\bullet\alpha\bullet\beta+\beta^2=(\alpha-\beta)^2}}ημ\frac{1}{x-2}=$$

.

$$=\frac{(x-2)^3}{(x-2)^2}\eta\mu\frac{1}{x-2}=(x-2)\eta\mu\frac{1}{x-2}$$

$$\left|\eta\mu\frac{1}{x-2}\right|\le 1\xRightarrow{x\ne 2\Leftrightarrow x-2\ne 0\Leftrightarrow |x-2|>0}|x-2|\left|\eta\mu\frac{1}{x-2}\right|\le|x-2|\bullet 1\Rightarrow\left|(x-2)\eta\mu\frac{1}{x-2}\right|\le|x-2|\Rightarrow$$

$$|f(x)|\le|x-2|\xRightarrow{|x|\le\theta\Leftrightarrow-\theta\le x\le\theta,\theta\ge 0}-|x-2|\le f(x)\le|x-2|$$

$$\acute{E}\chi\omega:\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})-|x-2|\le f(x)\le|x-2|,\ x\in(-\infty,2)\cup(2,+\infty)\\(\mathrm{II})\lim\limits_{x\to 2}(-|x-2|)=\lim\limits_{x\to 2}(|x-2|)=0\end{array}\right\}$$

Οπότε απο το κριτήριο της παρεμβολής θα έχω:

$$\lim_{x\to 2}f(x)=0$$

4.

Για την συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει: $x+1\le f(x)\le x^2+x+1\,(1)$ Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$

Θέτω $x=0$ στην σχέση (1):

$$x+1\le f(x)\le x^2+x+1\xRightarrow{x=0}0+1\le f(0)\le 0^2+0+1\xRightarrow{x=0}1\le f(0)\le 1\Rightarrow f(0)=1$$

$$x+1\le f(x)\le x^2+x+1\Leftrightarrow x\le f(x)-1\le x^2+x\xLeftrightarrow{f(0)=1}x\le f(x)-f(0)\le x(x+1)$$

Αν $x<0$:

$$\left\{\begin{array}{c}x\le f(x)-f(0)\le x(x+1)\\x<0\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}\frac{x}{x}\ge\frac{f(x)-f(0)}{x}\ge\frac{x(x+1)}{x}\\x<0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{c}x+1\le\frac{f(x)-f(0)}{x}\le 1\\x<0\end{array}\right\}$$

$$\acute{E}\chi\omega:\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\,x+1\le\frac{f(x)-f(0)}{x}\le 1,\ x\in(-\infty,0)\\(\mathrm{II})\lim\limits_{x\to 0^-}(x+1)=\lim\limits_{x\to 0^-}1=1\end{array}\right\}$$

Οπότε απο το κριτήριο της παρεμβολής θα έχω:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=1$$

$\text{Αν } x>0:$

$$\left\{\begin{matrix} x \le f(x)-f(0) \le x(x+1) \\ x>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \dfrac{x}{x} \le \dfrac{f(x)-f(0)}{x} \le \dfrac{x(x+1)}{x} \\ x>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} 1 \le \dfrac{f(x)-f(0)}{x} \le x+1 \\ x>0 \end{matrix}\right\}$$

$$\acute{E}\chi\omega: \left\{\begin{matrix} (\mathrm{I})\, 1 \le \dfrac{f(x)-f(0)}{x} \le x+1,\ x\in(0,+\infty) \\ (\mathrm{II})\, \lim\limits_{x\to 0^+} 1 = \lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)=1 \end{matrix}\right\}$$

$\text{Ο}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \alpha\pi o\ \tau o\ \kappa\rho\iota\tau\acute{\eta}\rho\iota o\ \tau\eta\varsigma\ \pi\alpha\rho\varepsilon\mu\beta o\lambda\acute{\eta}\varsigma\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 1$$

$\text{Ε}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-1}{x} = 1\ \upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota\ \acute{o}\rho\iota o\ \tau\eta\varsigma\ f\ \sigma\tau o\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\ x_0=0\ \kappa\alpha\iota$ $\iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota:$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-1}{x} = 1$$

5.

$\Gamma\iota\alpha\ \tau\eta\nu\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota:$

$$\eta\mu^2 x + 2xf(x) \le f^2(x) \le 2xf(x) + x^2 + \eta\mu^2 x$$

$\text{Ν}\alpha\ \beta\rho\varepsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\ \tau o\ \lim\limits_{x\to 0} f(x)$

$$\eta\mu^2 x + 2xf(x) \le f^2(x) \le 2xf(x) + x^2 + \eta\mu^2 x \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu^2 x \le f^2(x) - 2xf(x) \le x^2 + \eta\mu^2 x \overset{\Pi\rho o\sigma\theta\acute{\varepsilon}\tau\omega\ \sigma\varepsilon\ \acute{o}\lambda\alpha\ \tau\alpha\ \mu\acute{\varepsilon}\lambda\eta\ \tau o\ x^2}{\Longleftrightarrow}$$

$$\eta\mu^2 x + x^2 \le \underbrace{f^2(x) - 2\bullet f(x)\bullet x + x^2}_{\alpha^2-2\bullet\alpha\bullet\beta+\beta^2=(\alpha-\beta)^2} \le x^2 + x^2 + \eta\mu^2 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu^2 x + x^2 \le \left(f(x)-x\right)^2 \le 2x^2 + \eta\mu^2 x \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\eta\mu^2 x + x^2} \le \sqrt{\left(f(x)-x\right)^2} \le \sqrt{2x^2+\eta\mu^2 x} \overset{\sqrt{\alpha^2}=|\alpha|}{\Longleftrightarrow}$$

$\sqrt{\eta\mu^2 x + x^2} \le \left| f(x) - x \right| \le \sqrt{2x^2 + \eta\mu^2 x}$

$Έχω: \left\{ \begin{array}{l} (\mathrm{I}) \sqrt{\eta\mu^2 x + x^2} \le \left| f(x) - x \right| \le \sqrt{2x^2 + \eta\mu^2 x} \; για \; κάθε \; x \in \mathbb{R} \\ (\mathrm{II}) \lim\limits_{x \to 0} \sqrt{\eta\mu^2 x + x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \sqrt{2x^2 + \eta\mu^2 x} = 0 \end{array} \right\}$

Οπότε απο το κριτήριο της παρεμβολής θα έχω:

$\lim\limits_{x \to 0} \left| f(x) - x \right| = 0$

<u>Γνωρίζω οτι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει: $\left|\alpha\right| \le \left|\alpha\right| \Leftrightarrow -\left|\alpha\right| \le \alpha \le \left|\alpha\right|$</u>

Οπότε:

$-\left| f(x) - x \right| \le f(x) - x \le \left| f(x) - x \right|$

$Έχω: \left\{ \begin{array}{l} (\mathrm{I}) -\left| f(x) - x \right| \le f(x) - x \le \left| f(x) - x \right| \; για \; κάθε \; x \in \mathbb{R} \\ (\mathrm{II}) \lim\limits_{x \to 0} \left(-\left| f(x) - x \right| \right) = \lim\limits_{x \to 0} \left| f(x) - x \right| = 0 \end{array} \right\}$

Οπότε απο το κριτήριο της παρεμβολής θα έχω:

$\lim\limits_{x \to 0} \left(f(x) - x \right) = 0$

$Έχω: f(x) = \left(f(x) - x \right) + x \Rightarrow$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left[\left(f(x) - x \right) + x \right] = \lim\limits_{x \to 0} \left(f(x) - x \right) + \lim\limits_{x \to 0} x = 0$

6.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x)g(x) \ne 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{a\}$ και $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = 0$. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x \to a} h(x), h(x) \dfrac{f^4(x) + g^6(x)}{f^2(x) + g^4(x)}$

$\left\{ \begin{array}{l} f(x)g(x) \ne 0 \\ x \in \mathbb{R} - \{a\} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(x) \ne 0, g(x) \ne 0 \\ x \in \mathbb{R} - \{a\} \end{array} \right\}$

$g(x) \ne 0 \Rightarrow g^4(x) > 0 \Rightarrow f^2(x) + g^4(x) > f^2(x) \xRightarrow{\substack{Αν \; \alpha, \beta \; ομόσημοι \; αριθμοί \\ τότε \; ισχύει \; η \; ισοδυναμία: \\ \alpha > \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta}}}$

$\dfrac{1}{f^2(x) + g^4(x)} < \dfrac{1}{f^2(x)} \xRightarrow{f(x) \ne 0 \Rightarrow f^4(x) > 0} f^4(x) \dfrac{1}{f^2(x) + g^4(x)} < f^4(x) \dfrac{1}{f^2(x)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{f^4(x)}{f^2(x) + g^4(x)} < f^2(x)$

$f(x) \ne 0 \Rightarrow f^2(x) > 0 \Rightarrow f^2(x) + g^4(x) > g^4(x) \xRightarrow{\substack{Αν \; \alpha, \beta \; ομόσημοι \; αριθμοί \\ τότε \; ισχύει \; η \; ισοδυναμία: \\ \alpha > \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta}}}$

$\dfrac{1}{f^2(x) + g^4(x)} < \dfrac{1}{g^4(x)} \xRightarrow{g(x) \ne 0 \Rightarrow g^6(x) > 0} g^6(x) \dfrac{1}{f^2(x) + g^4(x)} < g^6(x) \dfrac{1}{g^4(x)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{g^6(x)}{f^2(x)+g^4(x)} < g^2(x)$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{f^4(x)}{f^2(x)+g^4(x)} &< f^2(x) \\ \frac{g^6(x)}{f^2(x)+g^4(x)} &< g^2(x) \end{aligned}\right\} \overset{(+)}{\Longrightarrow} \frac{f^4(x)}{f^2(x)+g^4(x)} + \frac{g^6(x)}{f^2(x)+g^4(x)} < g^2(x) < f^2(x) \Rightarrow$$

$$h(x) < f^2(x)+g^2(x)$$

$$\textit{Έχω}: \left\{\begin{aligned} &(\mathrm{I})\, 0 < h(x) < f^2(x)+g^2(x) \;\textit{για κάθε}\; x \in \mathbb{R}-\{a\} \\ &(\mathrm{II}) \lim_{x\to a} 0 = \lim_{x\to a}\left(f^2(x)+g^2(x)\right) = 0 \end{aligned}\right\}$$

$\textit{Οπότε απο το κριτήριο της παρεμβολής θα έχω}\; \lim_{x\to a} h(x) = 0$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

$\textit{Έστω η συνάρτηση}\; f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \;\textit{για την οποία ισχύει}: x^4 f^3(x)+f(x)+4=x$

$\textit{Να βρεθεί το}\; \lim_{x\to 4} f(x)$

2.

$\textit{Έστω η συνάρτηση}\; f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \;\textit{για την οποία ισχύει}:$

$f^2(x)-2xf(x)+6f(x)-6x+9 \le 0$

$\textit{Να βρεθεί το}\; \lim_{x\to 0} f(x)$

3

$\textit{Έστω η συνάρτηση}\; f(x)=\dfrac{x^3-9x^2+27x-27}{x^2-6x+9}\,\eta\mu\dfrac{1}{x-3}, x\in(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$

$\textit{Να βρεθεί το}\; \lim_{x\to 3} f(x)$

4.

$\textit{Για την συνάρτηση}\; f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \;\textit{ισχύει}: 3x-4 \le f(x) \le x^2-x \;(1)$

$\textit{Να βρεθεί το}\; \lim_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$

5.

$\textit{Για την συνάρτηση}\; f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \;\textit{ισχύει}:$

$x^4+2xf(x) \le f^2(x) \le 2xf(x)+x^2+x^4$

$\textit{Να βρεθεί το}\; \lim_{x\to 0} f(x)$

6.

$\textit{Δίνοται οι συναρτήσεις}\; f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \;\textit{με}\; f(x)g(x)\ne 0 \;\textit{για κάθε}\; x\in\mathbb{R}-\{a\}$

$\textit{και}\; \lim_{x\to\alpha} f(x)=\lim_{x\to\alpha} g(x)=0. \textit{Να βρεθεί το}\; \lim_{x\to a} h(x), h(x)\dfrac{f^{12}(x)+g^{10}(x)}{f^4(x)+g^8(x)}$