ΤΑΧΥΤΗΤΑ-ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ
Αν x= x(t) είναι η συνάρτηση θέσης κινητού την χρονική στιγμή t τοτε θα έχω υ(t) = x΄(t) και α(t) =x΄΄ (t)=υ΄(t) υ(t): Η ταχύτητα του κινητού την χρονική στιγμή t α(t): Η επιτάχυνση του κινητού την χρονική στιγμή t

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

1.

Το διάστημα x που διανύει ένα κινητό σε χρόνο t sec είναι :

$$x(t)=\frac{5}{3}t^3-10t^2+21t+3, 0\le t\le 6$$

Να βρείτε :

I) Το ρυθμό μεταβολής της μετατόπισης την χρονική στιγμή t = 2 sec

II) Την αρχική ταχύτητα του κινητού

III) Την χρονική στιγμή που το κινητό έχει ταχύτητα 6 m/ sec

I)

Ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης f στο σημείο x_o = Παράγωγος της f στο σημείο x_o

$$x'(t)=\left(\frac{5}{3}t^3-10t^2+21t+3\right)'$$

[F (x) + G(x)]΄ = F΄ (x) + G΄(x)
[F (x) – G(x)]΄ = F΄ (x) + G΄(x)
[cF (x)]΄ = c F΄ (x) , c : Σταθερά
(c)΄ = 0 , c : Σταθερά
(x)΄ = 1
$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$

$$=\left(\frac{5}{3}t^3\right)'-\left(10t^2\right)'+\left(21t\right)'+\left(3\right)'=\frac{5}{3}\left(t^3\right)'-10\left(t^2\right)'+21\left(t\right)'=$$

$$=\frac{5}{\cancel{3}}\bullet\cancel{3}t^2-10\bullet 2t+21\bullet 1=5t^2-20t+21$$

Οπότε : x΄ (t) = 5 t^2– 20t + 21 , 0 ≤ t ≤ 6

Ο ρυθμός μεταβολής της μετατόπισης την χρονική στιγμή t = 2 sec θα είναι :

x΄ (2) = 5 • 2^2 – 20 • 2 + 21= 5 • 4 – 20 + 21=20 – 40 + 21=
20 + 21– 40 = 41 – 40 = 1m/ sec

II)

υ(t) = x΄(t)
υ(t) : Η ταχύτητα του σώματος την χρονική στιγμή t x(t) : Η συνάρτηση θέσης κινητού την χρονική στιγμή t

Η ταχύτητα του σώματος την χρονική στιγμή t θα είναι :
υ(t) = x΄(t) = 5 t^2– $20t^2$ + 21
Οπότε : υ(t) = 5 t^2– $20t^2$ + 21 , 0 ≤ t ≤ 6
Η αρχική ταχύτητα του σώματος θα είναι η ταχύτητα που θα έχει το σώμα την χρονική στιγμή t = 0. Άρα η αρχική ταχύτητα του σώματος θα είναι : υ(0) = 5 • 0^2– 20 • 0^2 + 21 = 21 m/ sec
III)Έστω την χρονική στιγμή t το κινητό έχει ταχύτητα 6 m/ sec.
Τότε θα έχω :

$$\upsilon(t)=6 \Leftrightarrow 5t^2-20t+21=6 \Leftrightarrow 5t^2-20t+21-6=0 \Leftrightarrow$$

$$5t^2-20t+15=0 \overset{\substack{\text{Βγάζω κοινό}\\ \text{παράγοντα το } 5}}{\Leftrightarrow} 5\left(t^2-4t+3\right)=0 \Leftrightarrow t^2-4t+3(1)$$

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-4)^2-4•1•3=16-12=4>0$$

$\text{Επειδή } \Delta>0 \text{ η δευτεροβάθμια εξίσωση } (1) \text{ έχει δυο ρίζες}$

$\text{πραγματικές και άνισες}:$

$$t_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{4\pm2}{2}=\frac{2(2\pm1)}{2}=2\pm1 \begin{cases}\nearrow 2+1=3\sec(\text{Δεκτή γιατι } 0\le t\le 6)\\ \searrow 2-1=1\sec(\text{Δεκτή γιατι } 0\le t\le 6)\end{cases}$$

2.

Το διάστημα x = x(t) σε m που διανύει μια πέτρα όταν εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω δίνεται απο την σχέση :
x(t) = 100 t –10 t^2 όπου t ο χρόνος σε sec
I)Να βρείτε την ταχύτητα της πέτρας όταν t_1 = 2 sec
II) Τι συμβαίνει όταν t_2 = 6 sec
III) Να βρείτε το μέγιστο ύψος στο οποίο φτάνει η πέτρα

I)Η ταχύτητα του σώματος την χρονική στιγμή t θα είναι :
υ(t) = x΄(t) = (100 t - 10 t^2)΄= (100 t)΄ - (10 t^2)΄= 100 (t)΄ – 10 (t^2)΄ =
=100 •1 – 10 •2t=100– 20t
Η ταχύτητα της πέτρας την χρονική στιγμή t_1 = 2 sec θα είναι :
$υ_1$=υ(2)= 100– 20•2= 100– 40=60 m/ sec
II) Η ταχύτητα της πέτρας την χρονική στιγμή t_2 = 6 sec θα είναι :
$υ_2$=υ(2)= 100– 20•6= 100– 120=–20 m/ sec
Επειδή $υ_2$<0 το σώμα κατεβαίνει προς τα κάτω
III)Έστω την χρονική στιγμή t το σώμα φτάνει στο μέγιστο ύψος τότε θα ισχύει :

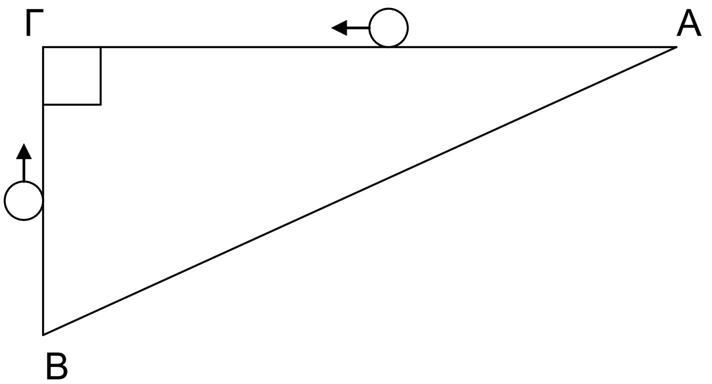
$$\upsilon(t)=0 \Leftrightarrow 100-20t=0 \Leftrightarrow -20t=-100 \Leftrightarrow t=\frac{-100}{-20} \Leftrightarrow t=5\sec$$

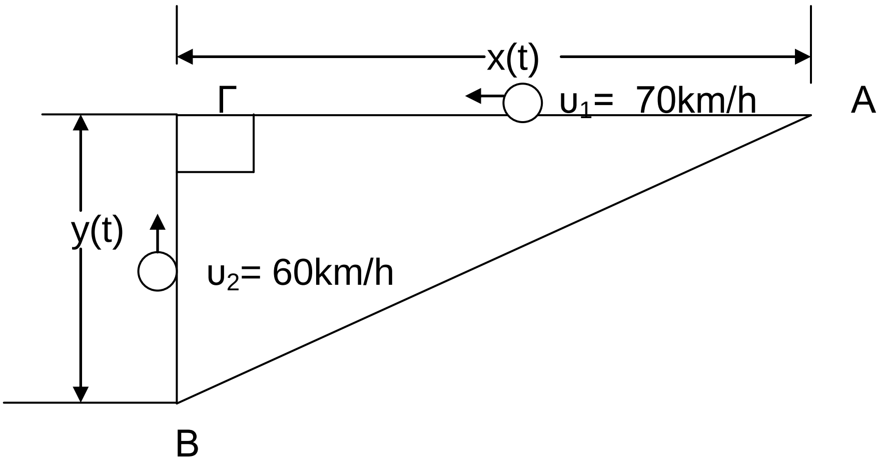
$\text{Τότε το μέγιστο ύψος που φτάνει η πέτρα είναι}:$

$$x_{\max}=x(5)=100•5-10•5^2=500-250=250m$$

3.

Δυο αυτοκίνητα κινούνται κατά μήκος των δρόμων ΑΓ και ΒΓ με ταχύτητες 70km/h και 60km/h αντίστοιχα.Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης ΑΒ ως προς το χρόνο t την χρονική στιγμή t_o κατά την οποία το πρώτο αυτοκίνητο απέχει από την διασταύρωση 800m και το δεύτερο 600m





Έπειδή η ταχύτητα του κινητού Α είναι $υ_1$= 70km/h θα έχω :
x΄(t) = $υ_1$= 70km/h
Έπειδή η ταχύτητα του κινητού Β είναι $υ_2$= 60km/h θα έχω :
y΄(t) = $υ_2$= 60km/h

Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Γ $\left(\hat{\Gamma}=90^0\right)$.Οπότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα θα έχω :

$$\mathrm{AB}^2=\mathrm{A\Gamma}^2+\mathrm{B\Gamma}^2 \Leftrightarrow \mathrm{AB}^2=x^2(t)+y^2(t) \overset{\mathrm{AB}\geq 0}{\Longleftrightarrow} \mathrm{AB}=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}$$

$$\Theta\varepsilon\omega\rho\acute{\omega}\ \tau\eta\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ : f(t)=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}, t\geq 0$$

$$\mathrm{A}\nu\ \mathrm{t}\ \geq\ 0\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ : f(t)=\left(x^2(t)+y^2(t)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(t)=\left[\left(x^2(t)+y^2(t)\right)^{\frac{1}{2}}\right]'=\frac{1}{2}\left(x^2(t)+y^2(t)\right)^{\frac{1}{2}-1}\left(x^2(t)+y^2(t)\right)'=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x^2(t)+y^2(t)\right)^{-\frac{1}{2}}\left[\left(x^2(t)\right)'+\left(y^2(t)\right)'\right]=$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\left(x^2(t)+y^2(t)\right)^{\frac{1}{2}}}\left[2x(t)x'(t)+2y(t)y(t)'\right]=$$

$$\frac{1}{2}\frac{2\left[x(t)x'(t)+y(t)y(t)'\right]}{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}}=\frac{x(t)x'(t)+y(t)y(t)'}{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}}$$

$\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}=\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}},\alpha\geq 0,\mu,\nu\in\mathbb{N}^*$
$\left(f^{a}\right)'=a\bullet f^{a-1}\bullet f'$
$\left(f(x)+g(x)\right)'=f'(x)+g'(x)$
$a^{-\nu}=\dfrac{1}{a^{\nu}},\alpha\neq 0$

$$\text{Οπότε}: f'(t)=\frac{x(t)x'(t)+y(t)y(t)'}{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}}$$

Την χρονική στιγμή t_0 θα έχω:

$$x(t_0)=800m\overset{\substack{\text{Τα m για να γίνουν km τα}\\ \text{διαιρώ με το 1000}}}{=}\frac{800}{1000}km=0,8km$$

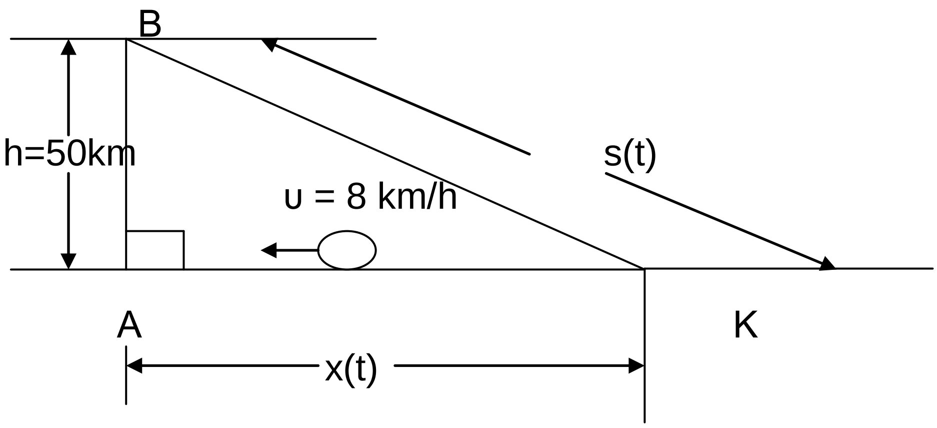
$$y(t_0)=800m\overset{\substack{\text{Τα m για να γίνουν km τα}\\ \text{διαιρώ με το 1000}}}{=}\frac{600}{1000}km=0,6km$$

Ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης ΑΒ την χρονική στιγμή t_0 θα είναι :

$$f'(t_0)=\frac{x(t_0)x'(t_0)+y(t_0)y(t_0)'}{\sqrt{x^2(t_0)+y^2(t_0)}}=\frac{0,8\bullet 70+0,6\bullet 60}{\sqrt{0,8^2+0,6^2}}=\frac{56+36}{\sqrt{0,64+0,36}}=\frac{92}{\sqrt{1}}=92km/h$$

4.

Ένας άνθρωπος πλησιάζει τη βάση Α ενός πύργου ΑΒ που έχει ύψος h = 50m με ταχύτητα 8 km/h.Να βρεθεί με τι ταχύτητα πλησιάζει την κορυφή του Β όταν βρίσκεται σε απόσταση 120m από την βάση του.



$$h = 50m \overset{\text{Τα m για να γίνουν km τα διαιρώ με το 1000}}{=} \frac{50}{1000} = 0,05km$$

Επειδή ο άνθρωπος πλησιάζει τη βάση Α ενός πύργου ΑΒ με ταχύτητα υ = 8 km/h θα έχω :
x΄(t) = υ = 8 km/h

Το τρίγωνο ΑΒΚ είναι ορθογώνιο στο Α $\left(\hat{\mathrm{A}} = 90^0\right)$.Οπότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα θα έχω :

$$\mathrm{KB}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AK}^2 \Leftrightarrow \mathrm{KB}^2 = h^2 + x^2(t) \Leftrightarrow \mathrm{KB}^2 = 0,05^2 + x^2(t) \Leftrightarrow$$

$$\mathrm{KB}^2 = 0,0025 + x^2(t) \overset{\mathrm{KB}\geq 0}{\Longleftrightarrow} \mathrm{KB} = \sqrt{0,0025 + x^2(t)} \Leftrightarrow s(t) = \sqrt{0,0025 + x^2(t)}$$

$$\text{Οπότε} : s(t) = \sqrt{0,0025 + x^2(t)}, t \geq 0$$

$$\text{Αν } t \geq 0 \text{ θα έχω} : s(t) = \left(0,0025 + x^2(t)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$s'(t) = \left[\left(0,0025 + x^2(t)\right)^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2}\left(0,0025 + x^2(t)\right)^{\frac{1}{2}-1}\left(0,0025 + x^2(t)\right)' =$$

$$= \frac{1}{2}\left(0,0025 + x^2(t)\right)^{-\frac{1}{2}}\left[\left(0,0025\right)' + \left(x^2(t)\right)'\right] = \frac{1}{2}\frac{1}{\left(0,0025 + x^2(t)\right)^{\frac{1}{2}}} 2x(t)x'(t) =$$

$$= \frac{x(t)x'(t)}{\sqrt{0,0025 + x^2(t)}}$$

$\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}, \alpha \geq 0, \mu, \nu \in \mathbb{N}^*$
$\left(f^a\right)' = a \bullet f^{a-1} \bullet f'$
$\left(f(x) + g(x)\right)' = f'(x) + g'(x)$

$(c)' = 0, c: \Sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}$
$a^{-\nu} = \dfrac{1}{a^{\nu}}, \alpha \neq 0$

$$\text{Οπότε}: s'(t) = \frac{x(t)x'(t)}{\sqrt{0,0025 + x^2(t)}}, t \geq 0$$

Την χρονική στιγμή t_0 θα έχω:

$$x(t_0) = 120m \overset{\substack{\text{Τα m για να γίνουν km τα} \\ \text{διαιρώ με το 1000}}}{=} \frac{120}{1000} = 0,12km$$

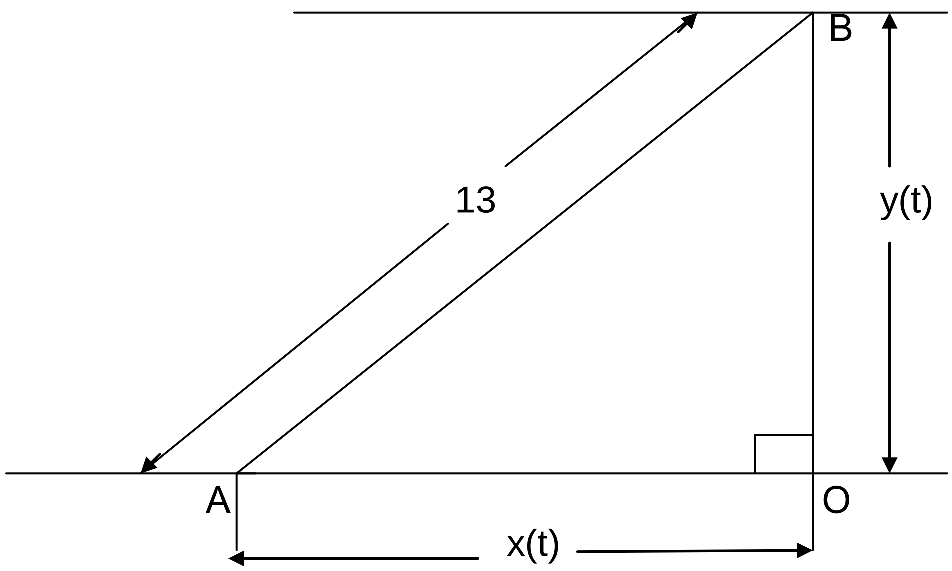
Η ταχύτητα με την οποία πλησιάζει ο άνθρωπος την κορυφή του Β τη χρονική στιγμή t_0 θα είναι:

$$\upsilon_1 = s'(t_0) = \frac{x(t_0)x'(t_0)}{\sqrt{0,0025 + x^2(t_0)}} = \frac{0,12 \bullet 8}{\sqrt{0,0025 + 0,12^2}} = \frac{0,12 \bullet 8}{\sqrt{0,0025 + 0,12^2}} =$$

$$= \frac{0,96}{\sqrt{0,0025 + 0,0144}} = \frac{0,96}{\sqrt{0,0169}} = \frac{0,96}{0,13} = \frac{96}{13} km/h$$

5.

Μια σκάλα ΑΒ μήκους 13 m είναι πλάγια στερεωμένη στον τοίχο Κάποια στιγμή η σκάλα γλιστράει και όταν το άκρο της Α βρίσκεται σε απόσταση 5 m από τον τοίχο ο ρυθμός κίνησης είναι 3 m/s Να βρείτε τον ρυθμό πτώσης του άκρου της Β εκείνη τη χρονική στιγμή



Επειδή το άκρο Α της σκάλας πλησιάζει τον τοίχο με ρυθμό κίνησης είναι 3 m/s θα έχω : x΄(t) = 3m/ s

Το τρίγωνο ΑΒΚ είναι ορθογώνιο στο Α$\left(\hat{\mathrm{A}}=90^0\right)$.Οπότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα θα έχω :

$$\mathrm{AB}^2=\mathrm{AO}^2+\mathrm{OB}^2 \Leftrightarrow 13^2=x^2(t)+y^2(t) \Leftrightarrow x^2(t)+y^2(t)=169$$

$$\text{Οπότε}: x^2(t)+y^2(t)=169, t\geq 0 \,(1)$$

$$x^2(t)+y^2(t)=169 \overset{\substack{\left\{\begin{matrix} f(x)=g(x) \\ f,g:\text{Παραγωγίσιμες}\end{matrix}\right\}\Rightarrow f'(x)=g'(x) \\ \text{Προσοχή ισχύει η συνεπαγωγή και} \\ \text{όχι η ισοδυναμία!!!}}}{\Longrightarrow} \left(x^2(t)+y^2(t)\right)'=(169)' \Leftrightarrow$$

$$\left(x^2(t)\right)'+\left(y^2(t)\right)'=0 \Leftrightarrow 2x(t)x'(t)+2y'(t)y(t)=0 \Leftrightarrow$$

$$2\Big(x(t)x'(t)+y(t)'y(t)\Big)=0 \Leftrightarrow x(t)x'(t)+y'(t)y(t)=0$$

$$\text{Οπότε}: x(t)x'(t)+y'(t)y(t)=0, t\geq 0\,(2)$$

$(c)'=0, c:\text{Σταθερά}$
$\left(f(x)+g(x)\right)'=f'(x)+g'(x)$
$\left(f^a\right)'=a\bullet f^{a-1}\bullet f'$

$$\text{Την χρονική στιγμή } t_0 \text{ θα ισχύει } x(t_0)=5m. \text{ Οπότε απο την σχέση } (1) \text{ θα έχω}:$$

$$x^2(t_0)+y^2(t_0)=169 \Leftrightarrow 5^2+y^2(t_0)=169 \Leftrightarrow 25+y^2(t_0)=169 \Leftrightarrow y^2(t_0)=169-25$$

$$\Leftrightarrow y^2(t_0)=144 \overset{y(t_0)\geq 0}{\Longleftrightarrow} y(t_0)=\sqrt{144} \Leftrightarrow y(t_0)=12m$$

$$\text{Θέτω όπου } t \text{ το } t_0 \text{ στην σχέση } (2):$$

$$x(t_0)x'(t_0)+y'(t_0)y(t_0)=0 \Leftrightarrow 5\bullet 3+12\bullet y'(t_0)=0 \overset{\substack{\text{Βγάζω κοινό} \\ \text{παράγοντα το } 3}}{\Longleftrightarrow} 3\Big(5+4y'(t_0)\Big)=0$$

$$\Leftrightarrow 5+4y'(t_0)=0 \Leftrightarrow 4y'(t_0)=-5 \Leftrightarrow y'(t_0)=-\frac{5}{4}m/s$$

$$\text{Ο ρυθμός πτώσης του άκρου Β την χρονική στιγμή } t_0 \text{ θα είναι}:$$

$$y'(t_0)=-\frac{5}{4}m/s$$

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

1.

Το διάστημα x που διανύει ένα κινητό σε χρόνο t sec είναι : $x(t)=\frac{7}{3}t^3-21t^2+50t+3, 0\leq t\leq 5$

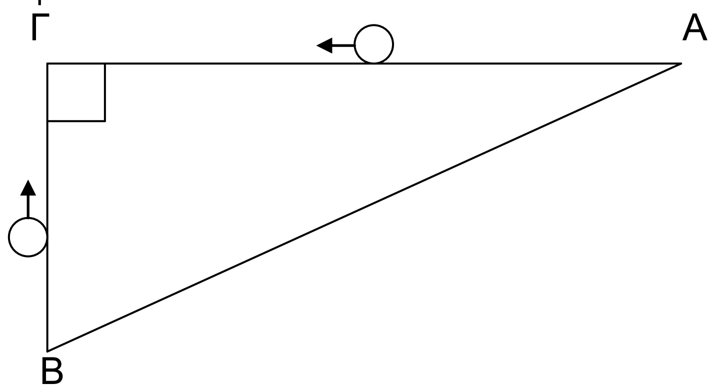
$\mathrm{N}\alpha\ \beta\rho\varepsilon\acute{\iota}\tau\varepsilon:$ (I)Τo $\rho\upsilon\theta\mu\acute{o}\ \mu\varepsilon\tau\alpha\beta o\lambda\acute{\eta}\varsigma\ \tau\eta\varsigma\ \mu\varepsilon\tau\alpha\tau\acute{o}\pi\iota\sigma\eta\varsigma\ \tau\eta\nu\ \chi\rho o\nu\iota\kappa\acute{\eta}\ \sigma\tau\iota\gamma\mu\acute{\eta}$ $t = 4s$ (II)Τ$\eta\nu\ \alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{\eta}\ \tau\alpha\chi\acute{\upsilon}\tau\eta\tau\alpha\ \tau o\upsilon\ \kappa\iota\nu\eta\tau o\acute{\upsilon}$ (III) Τ$\eta\nu\ \chi\rho o\nu\iota\kappa\acute{\eta}\ \sigma\tau\iota\gamma\mu\acute{\eta}\ \pi o\upsilon\ \tau o\ \kappa\iota\nu\eta\tau\acute{o}\ \acute{\varepsilon}\chi\varepsilon\iota\ \tau\alpha\chi\acute{\upsilon}\tau\eta\tau\alpha$ $15\,\mathrm{m/s}$

2.

Το διάστημα x = x(t) σε m που διανύει μια πέτρα όταν εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω δίνεται απο την σχέση : $x(t) = 500\,t – 25\,t^2$ όπου t ο χρόνος σε sec I)Να βρείτε την ταχύτητα της πέτρας όταν t = 7 sec II) Τι συμβαίνει όταν t = 12 sec III) Να βρείτε το μέγιστο ύψος στο οποίο φτάνει η πέτρα

3.

Δυο αυτοκίνητα κινούνται κατά μήκος των δρόμων ΑΓ και ΒΓ με ταχύτητες 100km/h και 50km/h αντίστοιχα.Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης ΑΒ ως προς το χρόνο t την χρονική στιγμή t_o κατά την οποία το πρώτο αυτοκίνητο απέχει από την διασταύρωση 400m και το δεύτερο 300m



4.

Ένας άνθρωπος πλησιάζει τη βάση Α ενός πύργου ΑΒ που έχει ύψος h = 80m με ταχύτητα 5 km/h.Να βρεθεί με τι ταχύτητα πλησιάζει την κορυφή του Β όταν βρίσκεται σε απόσταση 60m από την βάση του.

5.

Μια σκάλα ΑΒ μήκους 13 m είναι πλάγια στερεωμένη στον τοίχο Κάποια στιγμή η σκάλα γλιστράει και όταν το άκρο της Α βρίσκεται σε απόσταση 12 m από τον τοίχο ο ρυθμός κίνησης είναι 2 m/s Να βρείτε τον ρυθμό πτώσης του άκρου της Β εκείνη τη χρονική στιγμή