Ρυθμός μεταβολής μια συνάρτησης f στο σημείο x_o είναι η παράγωγος της συνάρτησης f στο σημείο x_o δηλ.
Ρυθμός μεταβολής της f στο σημείο $x_o = f'(x_o)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1.

Η ακτίνα r(cm) ενός σφαιρικού μπαλονιού μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου t(sec) και δίνεται από τον τύπο $r(t) = 10\,e^{-t}$.Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της επιφάνειας του μπαλονιού κατά την χρονική στιγμή t=2sec

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$r'(t) = (10\,e^{-t})' = 10\,(e^{-t})' = 10\,e^{-t}(-t)' = 10\,e^{-t}(-1) = -10\,e^{-t}$

$[\lambda f(x)]' = \lambda f'(x)$ λ: Σταθερά
$(e^{f})' = e^{f} f'$
$(f^{\alpha})' = \alpha f^{\alpha-1} f'$

Έχω : $r(2) = 10\,e^{-2}$ cm και $r'(2) = -10\,e^{-2}$ cm/ sec
Η επιφάνεια της μπάλας δίνεται από την σχέση :

$E(t) = 4\pi\, r^{2}(t)$

$E'(t) = [4\pi\ ^{2} r(t)]' = 4\pi\,[r^{2}(t)]' = 4\pi \bullet 2\, r(t)\, r'(t) = 8\pi\, r(t)\, r'(t)$

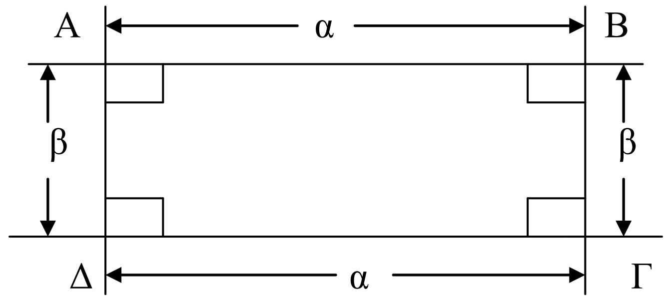
Ο ρυθμός μεταβολής της επιφάνειας του μπαλονιού όταν t = 2 sec είναι :

$E'(2) = 8\pi\, r(2)\, r'(2) = 8\pi \bullet 10\,e^{-2} \bullet (-10\,e^{-2}) = -800\,\pi\, e^{-4}\ cm^{2}/sec$

2.

Οι διαστάσεις x και y ενός ορθογωνίου αυξάνουν με ρυθμό 2cm/sec και 4cm/sec αντίστοιχα.Να βρείτε το ρυθμό αύξησης του εμβαδού του ορθογωνίου ως προς το χρόνο t κατά την χρονική στιγμή t_o που είναι x=25cm και y =32cm

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Εμβαδό ορθογωνίου E = x y E : Το εμβαδό του ορθογωνίου x , y : Οι διαστάσεις του ορθογωνίου	

Το εμβαδό του ορθογωνίου δίνεται από την σχέση : $E(t) = x(t)\, y(t)$

Έχω : $x'(t) = 2cm/sec$ και $y'(t) = 4cm/sec$

$[\, f(x)\, g(x)]' = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$

$E'(t) = [x(t)\, y(t)]' = x'(t)\, y(t) + x(t)\, y'(t)$

$E'(t) = x'(t)\, y(t) + x(t)\, y'(t)$ (1)

Την χρονική στιγμή t_o έχω : $x(t_o) = 25cm$ και $y(t_o) = 32cm$.Θέτω $t = t_o$ στην σχέση (1) :

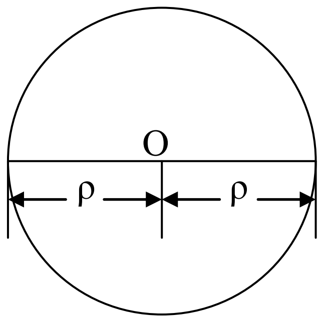
$E'(t_o) = x'(t_o)\, y(t_o) + x(t_o)\, y'(t_o) = 2 \bullet 32 + 25 \bullet 4 = 64+100 = 164cm^2/sec$

Ο ρυθμός αύξησης του εμβαδού του ορθογωνίου κατά την χρονική στιγμή t_o που είναι $E'(t_o) = 164cm^2/sec$

3.

Μια σφαιρική μπάλα χιονιού αρχίζει να λιώνει και η ακτίνα της ελαττώνεται σύμφωνα με τον τύπο $R(t) = 9 - 4t$, όπου t ο χρόνος σε sec και η ακτίνα σε cm $0 \le t \le \dfrac{9}{4}$. Να βρεθεί ο ρυθμός μείωσης του όγκου και της επιφάνειας της μπάλας όταν t = 1 sec

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

V : Ο όγκος της σφαίρας με κέντρο Ο και ακτίνα ρ Ε : Τα εμβαδό της επιφάνειας της σφαίρας ρ : Η ακτίνα της σφαίρας $\pi \approx 3{,}14$ $V = \dfrac{4}{3}\pi \rho^3$ $E = 4\pi\rho^2$	

Ο όγκος της μπάλας δίνεται από την σχέση :

$$V(t) = \frac{4}{3}\pi R^3(t)$$

$R'(t) = (9 - 4t)' = (9)' - (4t)' = 0 - 4(t)' = -4 \bullet 1 = -4$ cm/ sec

$$V'(t) = [\frac{4}{3} \pi R^3 (t)]' = \frac{4}{3} \pi [R^3 (t)]' = \frac{4}{\cancel{3}} \pi \cancel{3} R^2 (t) R'(t)$$

$$= 4\pi R^2 (t) R'(t)$$

$[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$
$[\lambda f(x)]' = \lambda f'(x)$ λ: Σταθερά
$(c)' = 0$, c : Σταθερά
$(x)' = 1$
$(f^{\alpha})' = \alpha f^{\alpha-1} f'$

$R(1) = 9 - 4 \bullet 1 = 9 - 4 = 5$ cm

Ο ρυθμός μείωσης του όγκου της μπάλας όταν t = 1 sec είναι :

$V'(1) = 4\pi R^2 (1)R'(1) = 4\pi 5^2 (-4) = 4\pi \bullet 25 \bullet (-4) = -400 \pi$ cm^3/ sec

Η επιφάνεια της μπάλας δίνεται από την σχέση :

$E(t) = 4\pi R^2 (t)$

$E'(t) = [4\pi R^2 (t)]' = 4\pi [R^2 (t)]' = 4\pi \bullet 2R(t) R'(t) = 8\pi R(t)R'(t)$

Ο ρυθμός μείωσης της επιφάνειας της μπάλας όταν t = 1 sec είναι :

$E'(1) = 8\pi R(1)R'(1) = 8\pi \bullet 5 \bullet (-4) = -160 \pi$ cm^2/ sec

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Ο όγκος μίας σφαίρας αυξάνει με ρυθμό $10m^3$/s να βρεθεί ο ρυθμός αύξησης της επιφάνειας τη χρονική στιγμή που η ακτίνα της είναι r = 5 m

2.

Από ένα σφαιρικό μπαλόνι διαφεύγει αέριο με ρυθμό 3 cm^3/sec Να βρείτε το ρυθμό μείωσης της επιφάνειας του μπαλονιού όταν η ακτίνα του είναι 20 cm

3.

Χρωματισμένο υγρό πέφτει σε ρούχο που απλώνεται σχηματίζοντας κυκλική κυλίδα της οποίας το εμβαδό αυξάνει με ρυθμό μεταβολής 5 cm^2/min Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της ακτίνας κατά τη χρονική στιγμή κατά την οποία το εμβαδό της κυλίδας είναι 36 π cm^2

4.

Ένα σημείο Μ κινείται πάνω στην γραφική παράσταση της

συνάρτησης $f(x) = \sqrt{6x}, x > 0$ Να βρεθούν :

I)Η απόσταση του d(x) του σημείου Μ από την αρχή των αξόνων ως συνάρτηση του x

II)Ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης d(x) ως προς x όταν x = 2

5.

Ένα σημείο κινείται στην καμπύλη $3x^2 + y^2 = 52$ έτσι ώστε η τεταγμένη y να αυξάνει με ρυθμό 6 m / s Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης x όταν x = 4 m

6.

Κατά την παραγωγή x μονάδων ενός προϊόντος το κόστος παραγωγής K(x) και η τιμή πώλησης Π(x) είναι αντίστοιχα :

$$K(x) = 800 + 550x - 15x^2 + \frac{1}{3}x^3 \text{ και } \Pi(x) = 425x$$

I) Πότε ο ρυθμός του μεταβολής του κέρδους είναι θετικός ;;;

II) Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής του μέσου κόστους

$K_\mu(x) = \dfrac{K(x)}{x}$ μηδενίζεται όταν το μέσο κόστος με το οριακό κόστος

7.

Μια μελέτη που έγινε για τον πληθυσμό μιας πόλης προβλέπει ότι ύστερα από t χρόνια η πόλη θα έχει πληθυσμό $P(t) = 25\, e^{0{,}02t}$ χιλιάδες. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής (αύξησης) του πληθυσμού αυτής της πόλης ύστερα από 50 χρόνια

8.

Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του όγκου της V μιας σφαίρας την

χρονική στιγμή t_o όταν $r(t_0) = \sqrt{2}cm$ και $r'(t_o)$ = 1cm/sec

9.

Ένας δάσκαλος βρήκε ότι μετά t ώρες διδασκαλίας ένας τακτικός

μαθητής μπορεί να γράψει $w(t) = \dfrac{50\,t^2}{10 + t^2}$ λέξεις. Βρείτε πόσες

λέξεις μπορεί να γράφει ο παραπάνω μαθητής ανα λεπτο