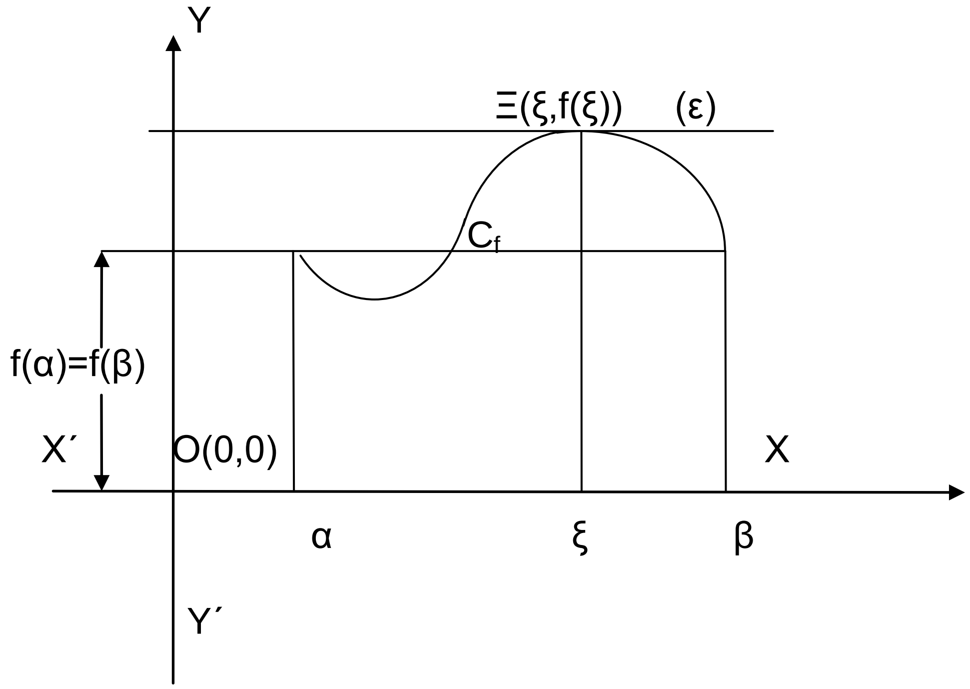
# ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ROLLE

## Το θεώρημα του Rolle




Αν:
- I) f συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,β]
- II) f παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β)
- II) f(α)= f(β)

Τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f΄(\xi)= 0$

<u>Γεωμετρική ερμηνεία :</u>
Αν (ε) η εφαπτομένη της $C_f$ στο σημείο επαφής Ξ(ξ,f(ξ)) τότε θα ισχύει $\lambda_\varepsilon = f΄(\xi)= 0$.Έχω $\lambda_{X΄X} =0$.Άρα η εφαπτομένη της $C_f$ στο σημείο επαφής Ξ(ξ,f(ξ)) είναι παράλληλη με τον άξονα X΄Xγιατί $\lambda_\varepsilon= \lambda_{X΄X}$
*Υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της $C_f$ στο οποίο η εφαπτομένη στη $C_f$ να είναι παράλληλη με τον άξονα X΄X*

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1.

$\Delta$*ίνεται η συνάρτηση* $f\left(x\right)=\begin{cases} x^2+mx+n, x\in\left[-1,0\right) \\ px^2+4x+4, x\in\left[0,1\right] \end{cases}$

*Για ποιές τιμές των* $m,n,p$ *εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle στο διάστημα* $\left[-1,1\right]$

$$f\left(x\right)=\begin{cases} x^2+mx+n, x\in\left[-1,0\right) \\ px^2+4x+4, x\in\left[0,1\right] \end{cases}$$

Η *συνάρτηση* $f$ *για να ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο κλειστό διάστημα* $\left[-1,1\right]$ *θα πρέπει να ισχύει*:

$$\left\{\begin{array}{l} (\mathrm{I})\text{Η } f \text{ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα } \left[-1,1\right] \\ (\mathrm{II})\text{Η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα } \left[-1,1\right] \\ (\mathrm{III})\ f\left(-1\right)=f\left(1\right) \end{array}\right\}$$

$$f\left(-1\right)=f\left(1\right)\Leftrightarrow\left(-1\right)^2+m\left(-1\right)+n=p\bullet1^2+4\bullet1+4\Leftrightarrow -m+n+1=p+8\Leftrightarrow$$
$$p=-m+n-7\left(1\right)$$

Η *συνάρτηση* $f$ *είναι συνεχής στα διαστήματα* $\left[-1,0\right)$ *και* $\left(0,1\right]$ *ως πολυωνυμική.*Ο*πότε η* $f$ *είναι είναι συνεχής στο* $\left[-1,1\right]$ *αν και μόνο αν είναι συνεχής στο σημείο* $x_0=0$.Ο*πότε θα πρέπει να ισχύει*:

$$\lim_{x\to0^-}f\left(x\right)=\lim_{x\to0^+}f\left(x\right)=f\left(0\right)\Leftrightarrow 0^2+0\bullet x+n=p\bullet0^2+4\bullet0+4\Leftrightarrow n=4$$

Η *συνάρτηση* $f$ *είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα* $\left(-1,0\right)$ *και* $\left(0,1\right)$ *ως πολυωνυμική.*Ο*πότε η* $f$ *είναι παραγωγίσιμη στο* $\left(-1,1\right)$ *αν και μόνο αν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο* $x_0=0$

Θ*εωρώτηνσυνάρτηση*:

$$\lambda\left(h\right)=\frac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)}{h}, h\neq0$$

$$\lambda(h)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{f(h)-4}{h}=$$

$$\begin{cases}\dfrac{f(h)-4}{h},-1\le h<0\\ \dfrac{f(h)-4}{h},0<h\le 1\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{h^2+mh+n-4}{h},-1\le h<0\\ \dfrac{ph^2+4h+4-4}{h},0<h\le 1\end{cases}\underset{n=4}{=}\begin{cases}\dfrac{h^2+mh+4-4}{h},-1\le h<0\\ \dfrac{ph^2+4h}{h},0<h\le 1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{h(h+m)}{h},-1\le h<0\\ \dfrac{h(ph+4)}{h},0<h\le 1\end{cases}=\begin{cases}h+m,-1\le h<0\\ ph+4,0<h\le 1\end{cases}$$

$\acute{E}\chi\omega:\lim\limits_{h\to 0^-}\lambda(h)=\lim\limits_{h\to 0^-}(h+m)=m$

$\acute{E}\chi\omega:\lim\limits_{h\to 0^+}\lambda(h)=\lim\limits_{h\to 0^+}(ph+4)=4$

Η *συνάρτηση* $f$ *είναι παραγωγίσιμη στο σημείο* $x_0=0$.Ο*πότε υπάρχει το όριο της συνάρτησης* $\lambda$ *στο σημείο* $h_0=0$ *και είναι πραγματικός αριθμός*

*Άρα θα ισχύει*:

$\lim\limits_{h\to 0^-}\lambda(h)=\lim\limits_{h\to 0^+}\lambda(h)\Leftrightarrow m=4$

Θ*έτω* $n=4,m=4$ *στην σχέση* $(1)$:

$p=-m+n-7=-4+4-7=-7$

2.

> *Έστω η συνάρτηση* $f$ *συνεχής στο κλειστό διάστημα* $[\alpha,\beta]$ *και παραγωγίσιμη στο ανοικτό* $(\alpha,\beta)$ *με* $f(\alpha)=f(\beta)=0$.Δ*ίνεται η συνάρτηση* $g(x)=e^{\lambda x}f(x),x\in[\alpha,\beta]$.Ν*α δείξετε οτι υπάρχει* $\xi\in(\alpha,\beta)$ *τέτοιο ώστε να ισχύει* $f'(\xi)+\lambda f(\xi)=0$

Η *συνάρτηση* $e^{\lambda x}$ *είναι συνεχής στο* $[\alpha,\beta]$ *ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων* $\lambda x$ *και* $e^{\lambda x}$.Η *συνάρτηση* $g$ *είναι συνεχής στο* $[\alpha,\beta]$ *ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων*

Η *συνάρτηση* $e^{\lambda x}$ *είναι παραγωγίσιμη στο* $(\alpha,\beta)$ *ως σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων* $\lambda x$ *και* $e^{\lambda x}$.Η *συνάρτηση* $g$ *είναι παραγωγίσιμη το* $(\alpha,\beta)$ *ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων*

$$g'(x)=\left(e^{\lambda x}f(x)\right)' \overset{(FG)'=F'G+FG'}{=} \left(e^{\lambda x}\right)' f(x)+e^{\lambda x}f'(x) \overset{\left(e^{F}\right)'=e^{F}F'}{=}$$

$$e^{\lambda x}(\lambda x)' f(x)+e^{\lambda x}f'(x)=\lambda e^{\lambda x}f(x)+e^{\lambda x}f'(x)=e^{\lambda x}\left[\lambda f(x)+f'(x)\right]$$

$\text{Οπότε}: g'(x)=e^{\lambda x}\left[\lambda f(x)+f'(x)\right], x\in(\alpha,\beta)$

$$\text{Έχω}:\left\{\begin{matrix} g(\alpha)=e^{\lambda\alpha}f(\alpha)\overset{f(\alpha)=0}{=}e^{\lambda\alpha}\bullet 0=0 \\ g(\beta)=e^{\lambda\beta}f(\beta)\overset{f(\beta)=0}{=}e^{\lambda\beta}\bullet 0=0 \end{matrix}\right\}\Rightarrow g(\alpha)=g(\beta)$$

Έχω: $\left\{\begin{matrix}\text{(I)Η συνάρτηση } g \text{ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα } [\alpha,\beta] \\ \text{(II)Η συνάρτηση } g \text{ είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό} \\ \text{διάστημα } (\alpha,\beta) \\ \text{(III)}\, g(\alpha)=g(\beta)\end{matrix}\right\}$

*Οπότε η συνάρτηση g ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο κλειστό διάστημα* $[\alpha,\beta]$.*Οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον* $\xi\in(\alpha,\beta)$ *τέτοιο ώστε* $g'(\xi)=0$

$$\left\{\begin{matrix} g'(\xi)=0 \\ \xi\in(\alpha,\beta)\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix} e^{\lambda\xi}\left[\lambda f(\xi)+f'(\xi)\right]=0 \\ \xi\in(\alpha,\beta)\end{matrix}\right\}\overset{e^{\lambda\xi}\neq 0}{\Longleftrightarrow}\left\{\begin{matrix}\lambda f(\xi)+f'(\xi)e^{\lambda\xi}=0 \\ \xi\in(\alpha,\beta)\end{matrix}\right\}$$

3.

*Μια συνάρτηση* $f$ *συνεχής στο κλειστό διάστημα* $[\alpha,\beta]$ *και παραγωγίσιμη στο ανοικτό* $(\alpha,\beta)$ *και ισχύει* $\dfrac{f(\alpha)}{\alpha}=\dfrac{f(\beta)}{\beta}$

*Έστω η συνάρτηση* $g(x)=\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)-f(x)}{\alpha+\beta-x}$ *ορισμένη στο* $[\alpha,\beta]$

*Να αποδείξετε οτι υπάρχει* $\xi\in(\alpha,\beta)$ *τέτοιο ώστε να ισχύει:*

$$f'(\xi)=\frac{f(\alpha)+f(\beta)-f(\xi)}{\alpha+\beta-\xi}$$

*Δίνεται*: $\alpha<\beta$ *και* $\alpha\beta>0$

Η *συνάρτηση είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα* $\left[\alpha,\beta\right]$ *ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων*

Η *συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα* $\left(\alpha,\beta\right)$ *ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων*

$$g'(x)=\left(\frac{f(\alpha)+f(\beta)-f(x)}{\alpha+\beta-x}\right)' \overset{\left(\frac{F}{G}\right)'=\frac{F'G-FG'}{G^2}}{=}$$

$$\frac{\left(f(\alpha)+f(\beta)-f(x)\right)'(\alpha+\beta-x)-\left(f(\alpha)+f(\beta)-f(x)\right)(\alpha+\beta-x)'}{(\alpha+\beta-x)^2}=$$

$$\frac{\left[\left(f(\alpha)+f(\beta)\right)'-f'(x)\right](\alpha+\beta-x)-\left(f(\alpha)+f(\beta)-f(x)\right)\left[(\alpha+\beta)'-(x)'\right]}{(\alpha+\beta-x)^2}=$$

$$\overset{\substack{(c)'=0,c:\Sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}\\(x)'=1}}{=}\quad\frac{\left(-f'(x)\right)(\alpha+\beta-x)-\left(f(\alpha)+f(\beta)-f(x)\right)(-1)}{(\alpha+\beta-x)^2}=$$

$$\frac{\left(-f'(x)\right)(\alpha+\beta-x)+f(\alpha)+f(\beta)-f(x)}{(\alpha+\beta-x)^2}$$

$$\text{Ο}\pi\acute{o}\tau\varepsilon: g'(x)=\frac{\left(-f'(x)\right)(\alpha+\beta-x)+f(\alpha)+f(\beta)-f(x)}{(\alpha+\beta-x)^2}, x\in(\alpha,\beta)$$

$$\acute{E}\chi\omega:\left\{\begin{array}{l} g(\alpha)=\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)-f(\alpha)}{\alpha+\beta-\alpha}=\dfrac{f(\beta)}{\beta}\\[2ex] g(\beta)=\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)-f(\beta)}{\alpha+\beta-\beta}=\dfrac{f(\alpha)}{\alpha}\\[2ex] \dfrac{f(\alpha)}{\alpha}=\dfrac{f(\beta)}{\beta}\end{array}\right\}\Rightarrow g(\alpha)=g(\beta)$$

$$\acute{E}\chi\omega:\left\{\begin{array}{l} (\text{I})\text{Η } \textit{συνάρτηση } g \textit{ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα } [\alpha,\beta]\\ (\text{II})\text{Η } \textit{συνάρτηση } g \textit{ είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό}\\ \textit{διάστημα } (\alpha,\beta)\\ (\text{III})\, g(\alpha)=g(\beta)\end{array}\right\}$$

Οπότε η συνάρτηση $g$ ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$.Οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi)=0$

$$\left.\begin{cases} g'(\xi)=0 \\ \xi\in(\alpha,\beta)\end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} \dfrac{-f'(\xi)(\alpha+\beta-\xi)+f(\alpha)+f(\beta)-f(\xi)}{(\alpha+\beta-\xi)^2}=0 \\ \xi\in(\alpha,\beta)\end{cases}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{cases} -f'(\xi)(\alpha+\beta-\xi)+f(\alpha)+f(\beta)-f(\xi)=0 \\ \xi\in(\alpha,\beta)\end{cases}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{cases} f'(\xi)(\alpha+\beta-\xi)=f(\alpha)+f(\beta)-f(\xi)=0 \\ \xi\in(\alpha,\beta)\end{cases}\right\}$$

$$\alpha<\xi<\beta \Leftrightarrow -\alpha>\xi>-\beta \Leftrightarrow -\beta<-\xi<-\alpha \Leftrightarrow \alpha+\beta-\beta<\alpha+\beta-\xi<\alpha+\beta-\alpha$$
$$\Leftrightarrow \alpha<\alpha+\beta-\xi<\beta$$

Επειδή $\alpha\beta>0$ οι αριθμοί $\alpha,\beta$ είναι ομόσημοι.Οπότε κάθε αριθμός που βρίσκεται στο διάστημα $(\alpha,\beta)$ είναι πάντα θετικός ή πάντα αρνητικός. Συνεπώς κάθε αριθμός που βρίσκεται στο διάστημα $(\alpha,\beta)$είναι μη μηδενικός.Οπότε $\alpha+\beta-\xi\neq 0$

$$\left.\begin{cases} f'(\xi)(\alpha+\beta-\xi)=f(\alpha)+f(\beta)-f(\xi) \\ \xi\in(\alpha,\beta) \\ \alpha+\beta-\xi\neq 0\end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} f'(\xi)=\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)-f(\xi)}{\alpha+\beta-\xi} \\ \xi\in(\alpha,\beta) \\ \alpha+\beta-\xi\neq 0\end{cases}\right\}$$

4.

Μια συνάρτηση $f$ συνεχής στο κλειστό διάστημα $[1,2]$ και παραγωγίσιμη στο ανοικτό $(1,2)$ και ισχύει $f(2)=2, f(1)=1$

Να αποδείξετε οτι υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε:

$f'(\xi)(\xi-3)+f(\xi)=0$

ΠΩΣ ΣΚΕΦΤΟΜΑΙ

| |
|---|
| *Θέλω να έχει λύση η εξίσωση*: |
| $f'(x)(x-3)+f(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)(x-3)+f(x)(x-3)'=0 \overset{(FG)'=F'G+FG'}{\Leftrightarrow}$ |
| $\left[f(x)(x-3)\right]'=0$ |
| *Θα θεωρήσω την συνάρτηση* $g(x)=f(x)(x-3)$ *και θα εφαρμόσω το θεώρημα του Rolle* |

*Θεωρώ την συνάρτηση* $g(x)=f(x)(x-3), x\in[1,2]$

Η *συνάρτηση g είναι συνεχής στο* $[1,2]$ *ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων*

Η *συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο* $(1,2)$ *ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων*

$$g'(x)=\left[f(x)(x-3)\right]' \overset{(FG)'=F'G+FG'}{=} f'(x)(x-3)+f(x)(x-3)'=f'(x)(x-3)+f(x)$$

Ο*πότε*: $g'(x)=f'(x)(x-3)+f(x), x\in(1,2)$

$$\left.\begin{cases} g(1)=-2f(1)\overset{f(1)=1}{=}-2\bullet 1=-2 \\ g(2)=-f(2)\overset{f(2)=2}{=}-2 \end{cases}\right\}\Rightarrow g(1)=g(2)$$

$$\text{Έχω}:\left\{\begin{array}{l} (\mathrm{I})\text{Η συνάρτηση } g \text{ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα } [1,2] \\ (\mathrm{II})\text{Η συνάρτηση } g \text{ είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό} \\ \text{διάστημα } (1,2) \\ (\mathrm{III})\, g(1)=g(2) \end{array}\right\}$$

Ο*πότε η συνάρτηση g ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο κλειστό διάστημα* $[1,2]$.Ο*πότε υπάρχει ένα τουλάχιστον* $\xi\in(1,2)$ *τέτοιο ώστε* $g'(\xi)=0$

$$\left\{\begin{array}{l} g'(\xi)=0 \\ \xi\in(1,2) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} f'(\xi)(\xi-3)+f(\xi)=0 \\ \xi\in(1,2) \end{array}\right\}$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

$\Delta$ίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=\begin{cases} x^2-2mx+n, x\in\left[-1,0\right) \\ -px^2+4x+4, x\in\left[0,1\right] \end{cases}$

Για ποιές τιμές των $m,n,p$ εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle στο διάστημα $\left[-1,1\right]$

2.

Έστω η συνάρτηση $f$ συνεχής στο κλειστό διάστημα $\left[\alpha,\beta\right]$ και παραγωγίσιμη στο ανοικτό $\left(\alpha,\beta\right)$ με $f\left(\alpha\right)=f\left(\beta\right)=0$.Δίνεται η συνάρτηση $g\left(x\right)=e^{\lambda x^2}f\left(x\right), x\in\left[\alpha,\beta\right]$.Να δείξετε οτι υπάρχει $\xi\in\left(\alpha,\beta\right)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f'\left(\xi\right)+2\lambda\xi f\left(\xi\right)=0$

3.

Μια συνάρτηση $f$ συνεχής στο κλειστό διάστημα $\left[1,2\right]$ και παραγωγίσιμη στο ανοικτό $\left(\alpha,\beta\right)$ και ισχύει $f\left(1\right)=\dfrac{f\left(2\right)}{2}$

Έστω η συνάρτηση $g\left(x\right)=\dfrac{f\left(1\right)+f\left(2\right)-f\left(x\right)}{3-x}$ ορισμένη στο $\left[1,2\right]$

Να αποδείξετε οτι υπάρχει $\xi\in\left(\alpha,\beta\right)$ τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$f'\left(\xi\right)=\frac{f\left(1\right)+f\left(2\right)-f\left(\xi\right)}{3-\xi}$$

4.

Μια συνάρτηση $f$ συνεχής στο κλειστό διάστημα $\left[\alpha,\beta\right]$ και παραγωγίσιμη στο ανοικτό $\left(\alpha,\beta\right)$ και ισχύει $f\left(\beta\right)=0$

Να αποδείξετε οτι υπάρχει $\xi\in\left(\alpha,\beta\right)$ τέτοιο ώστε: $f'\left(\xi\right)\left(\xi-a\right)+f\left(\xi\right)=0$

5.

Μια συνάρτηση $f$ συνεχής στο κλειστό διάστημα $\left[1,2\right]$ και παραγωγίσιμη στο ανοικτό $\left(1,2\right)$ και ισχύει $f\left(2\right)=2f\left(1\right)$

Να αποδείξετε οτι υπάρχει $\xi\in\left(1,2\right)$ τέτοιο ώστε: $f'\left(\xi\right)=\dfrac{f\left(\xi\right)}{\xi}$

Υποδειξη: $g\left(x\right)=\dfrac{f\left(x\right)}{x}, x\in\left[1,2\right]$