ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ROLLE(No2)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha x^3}{3}+\left(\dfrac{\beta}{2}+\delta\right)x^2+(\gamma-\delta)x+\delta$

με $\dfrac{\alpha}{3}+\dfrac{\beta}{2}+\gamma=0$

Να αποδείξετε οτι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $\mathrm{M}(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη με τον άξονα $x'x$

(Θέμα εξετάσεων)

$$f(x)=\frac{\alpha x^3}{3}+\left(\frac{\beta}{2}+\delta\right)x^2+(\gamma-\delta)x+\delta$$

$$f(0)=\frac{\alpha\bullet 0^3}{3}+\left(\frac{\beta}{2}+\delta\right)\bullet 0^2+(\gamma-\delta)\bullet 0+\delta=\delta$$

$$f(1)=\frac{\alpha\bullet 1^3}{3}+\left(\frac{\beta}{2}+\delta\right)\bullet 1^2+(\gamma-\delta)\bullet 1+\delta=\frac{\alpha}{3}+\frac{\beta}{2}+\delta+\gamma-\delta+\delta=$$

$$=\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{\beta}{2}+\gamma\right)+\delta\overset{\frac{\alpha}{3}+\frac{\beta}{2}+\gamma=0}{=}0+\delta=\delta$$

Οπότε : $f(0)=f(1)$

$$\text{Έχω}:\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\text{Η συνάρτηση } f \text{ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα } [0,1]\\ \text{ως πολυωνυμική}\\ (\mathrm{II})\text{Η συνάρτηση } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό}\\ \text{διάστημα } (0,1) \text{ ως πολυωνυμική}\\ (\mathrm{III})\ f(0)=f(1)\end{array}\right\}$$

Οπότε η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο κλειστό διάστημα $[0,1]$.Οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$

Αν (ε) η εφαπτομένη της C_f στο σημειο επαφής $\mathrm{M}(\xi, f(\xi))$ τότε θα έχω:

$\lambda_{\varepsilon} = f'(\xi) = 0$

Έχω: $\lambda_{x'x} = 0$

Επειδή $\lambda_{\varepsilon} = \lambda_{x'x}$ θα έχω $(\varepsilon)//x'x$

2.

Έστω η συνάρτηση $f:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β). Να αποδείξετε ότι:

(Ι) για την συνάρτησημε $g(x) = e^{f(x)}(x-\alpha)(x-\beta)$ εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$

(ΙΙ) υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{1}{\alpha-\xi} + \frac{1}{\beta-\xi}$$

Η συνάρτηση $e^{f(x)}$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $f(x)$ και e^x. Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων

Η συνάρτηση $e^{f(x)}$ είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) ως σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $f(x)$ και e^x. Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη το (α,β) ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων

$$g'(x) = \left[e^{f(x)}(x-\alpha)(x-\beta)\right]' \overset{(f(x)g(x)h(x))' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)}{=}$$

$$\left(e^{f(x)}\right)'(x-\alpha)(x-\beta) + e^{f(x)}(x-\alpha)'(x-\beta) + e^{f(x)}(x-\alpha)(x-\beta)' \overset{\left(e^F\right)' = e^F F'}{=}$$

$$e^{f(x)} f'(x)(x-\alpha)(x-\beta) + e^{f(x)}(x-\beta) + e^{f(x)}(x-\alpha) =$$

$$= e^{f(x)}\left[f'(x)(x-\alpha)(x-\beta) + (x-\beta) + (x-\alpha)\right]$$

$$g'(x) = e^{f(x)}\left[f'(x)(x-\alpha)(x-\beta) + (x-\beta) + (x-\alpha)\right], x \in (\alpha,\beta)$$

$$\left.\begin{cases} g(\alpha) = e^{f(\alpha)}(\alpha-\alpha)(\alpha-\beta) = 0 \\ g(\beta) = e^{f(a)}(\beta-\alpha)(\beta-\beta) = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow g(\alpha) = g(\beta)$$

$$\acute{E}\chi\omega:\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\mathrm{H}\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ g\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ \kappa\lambda\varepsilon\iota\sigma\tau\acute{o}\ \delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\mu\alpha\ [\alpha,\beta] \\ (\mathrm{II})\mathrm{H}\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ g\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \pi\alpha\rho\alpha\gamma\omega\gamma\acute{\iota}\sigma\iota\mu\eta\ \sigma\tau o\ \alpha\nu o\iota\kappa\tau\acute{o} \\ \delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\mu\alpha\ (\alpha,\beta) \\ (\mathrm{III})\,g(\alpha)=g(\beta)\end{array}\right\}$$

Οπότε η συνάρτηση g ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$.Οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi)=0$

$$\left\{\begin{array}{l}g'(\xi)=0\\ \xi\in(\alpha,\beta)\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}e^{f(\xi)}\left[f'(\xi)(\xi-\alpha)(\xi-\beta)+(\xi-\beta)+(\xi-\alpha)\right]=0\\ \xi\in(\alpha,\beta)\end{array}\right\}$$

$$\overset{e^{f(\xi)}\neq 0}{\Longleftrightarrow}\left\{\begin{array}{l}f'(\xi)(\xi-\alpha)(\xi-\beta)+(\xi-\beta)+(\xi-\alpha)=0\\ \xi\in(\alpha,\beta)\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}f'(\xi)\left[-(\alpha-\xi)\right]\left[-(\beta-\xi)\right]=-(\xi-\beta)-(x-\alpha)\\ \xi\in(\alpha,\beta)\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}f'(\xi)(\xi-\alpha)(\xi-\beta)=(\beta-\xi)+(\alpha-\xi)\\ \xi\in(\alpha,\beta)\end{array}\right\}$$

$$\acute{E}\chi\omega:\alpha<\xi<\beta\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\beta>\xi\\ \alpha<\xi\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\beta-\xi>0\\ \alpha-\xi<0\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\beta-\xi\neq 0\\ \alpha-\xi\neq 0\end{array}\right\}\Rightarrow(\alpha-\xi)(\beta-\xi)\neq 0$$

$$\acute{E}\chi\omega:\left\{\begin{array}{l}f'(\xi)(\alpha-\xi)(\beta-\xi)=(\beta-\xi)+(\alpha-\xi)\\ \xi\in(\alpha,\beta)\end{array}\right\}\overset{(\alpha-\xi)(\beta-\xi)\neq 0}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{f'(\xi)\,\cancel{(\alpha-\xi)(\beta-\xi)}}{\cancel{(\alpha-\xi)(\beta-\xi)}}=\dfrac{(\beta-\xi)+(\alpha-\xi)}{(\alpha-\xi)(\beta-\xi)}\\ \xi\in(\alpha,\beta)\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}f'(\xi)=\dfrac{\cancel{\beta-\xi}}{(\alpha-\xi)\,\cancel{(\beta-\xi)}}+\dfrac{\cancel{\alpha-\xi}}{\cancel{(\alpha-\xi)}\,(\beta-\xi)}\\ \xi\in(\alpha,\beta)\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}f'(\xi)=\dfrac{1}{\alpha-\xi}+\dfrac{1}{\beta-\xi}\\ \xi\in(\alpha,\beta)\end{array}\right\}$$

3.

Η $\sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \delta\upsilon o\ \varphi o\rho\acute{\varepsilon}\varsigma\ \pi\alpha\rho\alpha\gamma\omega\gamma\acute{\iota}\sigma\iota\mu\eta\ \sigma\tau o\ \delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\mu\alpha\ [\alpha,\beta]\ \mu\varepsilon:$

$f'(x)\neq 0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in[\alpha,\beta]$

$\kappa\alpha\iota\ f(\alpha)f'(\beta)=f(\beta)f'(\alpha)$

Να $\alpha\pi o\delta\varepsilon\acute{\iota}\xi\varepsilon\tau\varepsilon\ \acute{o}\tau\iota:$

(Ι)$\eta\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \alpha\nu\tau\iota\sigma\tau\rho\acute{\varepsilon}\psi\iota\mu\eta$

(ΙΙ)$\upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota\ x_0\in(\alpha,\beta)\ \tau\acute{\varepsilon}\tau o\iota o\ \acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon:$

$f(x_0)f''(x_0)=\left(f'(x_0)\right)^2$

(Ι)Έστω η συνάρτηση f δεν είναι "1−1".Τότε υπάρχουν $x_1,x_2\in[\alpha,\beta]$ με $x_1\neq x_2$ τέτοια ώστε $f(x_1)=f(x_2)$.Χωρίς βλάβη γενικότητας υποθέτω οτι $x_1<x_2$ (Ομοίως εργάζομαι αν $x_1>x_2$)

Έχω:
(Ι)Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[x_1,x_2]$
(ΙΙ)Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (x_1,x_2)
(ΙΙΙ) $f(x_1)=f(x_2)$

Οπότε η συνάρτηση g ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο κλειστό διάστημα $[x_1,x_2]$.Οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$ (Άτοπο)

Συνεπώς η συνάρτηση f είναι "1−1".Οπότε υπάρχει η αντίστροφη της f

(II) <u>ΠΩΣ ΣΚΕΦΤΟΜΑΙ</u>

$$f(x)\,f''(x)=\left(f'(x)\right)^2 \Leftrightarrow f(x)\,f''(x)=\left(f'(x)\right)^2 \Leftrightarrow \left(f'(x)\right)^2-f(x)\,f''(x)=0$$

$$f'(x)\,f'(x)-f(x)\left(f'(x)\right)'=0 \overset{f'(x)\neq 0 \;\; \gamma\iota\alpha \;\; \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \;\; x\in[\alpha,\beta]}{\Longleftrightarrow} \frac{\left(f(x)\right)'\,f'(x)-f(x)\left(f'(x)\right)'}{\left[f'(x)\right]^2}=0$$

$$\left(\frac{f(x)}{f'(x)}\right)'=0$$

Οπότε *θα εφαρμόσω το θεώρημα του Rolle για την συνάρτηση*

$$g(x)=\frac{f(x)}{f'(x)}$$

Θεωρώ την συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{f'(x)},x\in[\alpha,\beta]$

Οι *συναρήσεις* f, f' *είναι συνεχείς στο* $[\alpha,\beta]$ *ως παραγωγίσιμες.Συνεπώς η συνάρτηση* g *είναι συνεχής στο* $[\alpha,\beta]$ *ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων*

Η *συνάρτηση* g *είναι παραγωγίσιμη στο* (α,β) *ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.*

$$g'(x)=\left(\frac{f(x)}{f'(x)}\right)' \overset{\left(\frac{F}{G}\right)'=\frac{F'G-FG'}{G^2}}{=} \frac{f'(x)\,f'(x)-f(x)\left(f'(x)\right)'}{\left[f'(x)\right]^2}=\frac{\left[f'(x)\right]^2-f(x)\,f''(x)}{\left[f'(x)\right]^2}$$

$$g'(x)=\frac{\left[f'(x)\right]^2-f(x)\,f''(x)}{\left[f'(x)\right]^2},x\in(\alpha,\beta)$$

$$f(\alpha)\,f'(\beta)=f(\beta)\,f'(\alpha) \overset{f'(\alpha)f'(\beta)\neq 0}{\Longleftrightarrow} \frac{f(\alpha)\,\cancel{f'(\beta)}}{f'(\alpha)\,\cancel{f'(\beta)}}=\frac{f(\beta)\,\cancel{f'(\alpha)}}{\cancel{f'(\alpha)}\,f'(\beta)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}=\frac{f(\beta)}{f'(\beta)} \Leftrightarrow g(\alpha)=g(\beta)$$

Έχω: $\left\{\begin{array}{l} \text{(I) Η } \textit{συνάρτηση } g \textit{ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα } [\alpha,\beta] \\ \text{(II) Η } \textit{συνάρτηση } g \textit{ είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό} \\ \textit{διάστημα } (\alpha,\beta) \\ \text{(III) } g(\alpha)=g(\beta) \end{array}\right\}$

Οπότε η συνάρτηση g ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$.*Οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον* $x_0\in(\alpha,\beta)$ *τέτοιο ώστε* $g'(x_0)=0$

$$\left\{\begin{matrix} g'(x_0)=0 \\ x_0\in(\alpha,\beta)\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \dfrac{\left[f'(x_0)\right]^2-f(x_0)f''(x_0)}{\left[f'(x_0)\right]^2}=0 \\ x_0\in(\alpha,\beta)\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \left[f'(x_0)\right]^2-f(x_0)f''(x_0)=0 \\ x_0\in(\alpha,\beta)\end{matrix}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} f(x_0)f''(x_0)=\left[f'(x_0)\right]^2 \\ x_0\in(\alpha,\beta)\end{matrix}\right\}$$

4.

Έστω μια συνάρτηση f που είναι συνεχής στο $[-1,1]$ *και παραγωγίσιμη στο* $(-1,1)$ *και ισχύει* $f(1)=f(-1)$.*Αν* $f(x)\neq 0$ *για κάθε* $x\in[-1,1]$ *να αποδείξετεοτιυπάρχειx*$_0\in(-1,1)$

$f'(x_0)=2x_0f^2(x_0)$

ΠΩΣ ΣΚΕΦΤΟΜΑΙ

$$f'(x)=2xf^2(x)\overset{\substack{f(x)\neq 0\ \text{για} \\ \text{κάθε}\ x\in[-1,1]}}{\Longleftrightarrow}\frac{f'(x)}{f^2(x)}=2x\Leftrightarrow 2x-\frac{f'(x)}{f^2(x)}=0\overset{\left(\frac{1}{F}\right)'=-\frac{F'}{F^2}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left(x^2+\frac{1}{f(x)}\right)'=0$$

Θα θεωρήσω την συνάρτηση $g(x)=x^2+\dfrac{1}{f(x)}$ *και θα εφαρμόσω το θεώρημα του Rolle*

Θεωρώ την συνάρτηση $g(x)=x^2+\dfrac{1}{f(x)},x\in[-1,1]$

Η *συνάρτηση* $\dfrac{1}{f(x)}$ *είναι συνεχής στο* $[-1,1]$ *ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.*

Η $\sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta$ g $\varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota$ $\sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma$ $\sigma\tau o$ $[-1,1]$ $\omega\varsigma$ $\acute{\alpha}\theta\rho o\iota\sigma\mu\alpha$ $\sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\omega}\nu$ $\sigma\upsilon\nu\alpha\rho\tau\acute{\eta}\sigma\varepsilon\omega\nu$

Η $\sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta$ $\dfrac{1}{f(x)}$ $\varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota$ $\pi\alpha\rho\alpha\gamma\omega\gamma\acute{\iota}\sigma\iota\mu\eta$ $\sigma\tau o$ $(-1,1)$ $\omega\varsigma$ $\pi\eta\lambda\acute{\iota}\kappa o$ $\pi\alpha\rho\alpha\gamma\omega\gamma\acute{\iota}\sigma\iota\mu\omega\nu$ $\sigma\upsilon\nu\alpha\rho\tau\acute{\eta}\sigma\varepsilon\omega\nu$.Η $\sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta$ g $\varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota$ $\pi\alpha\rho\alpha\gamma\omega\gamma\acute{\iota}\sigma\iota\mu\eta$ $\sigma\tau o$ $(-1,1)$ $\omega\varsigma$ $\acute{\alpha}\theta\rho o\iota\sigma\mu\alpha$ $\pi\alpha\rho\alpha\gamma\omega\gamma\acute{\iota}\sigma\iota\mu\omega\nu$ $\sigma\upsilon\nu\alpha\rho\tau\acute{\eta}\sigma\varepsilon\omega\nu$

$$g'(x)=\left(x^2+\frac{1}{f(x)}\right)'=\left(x^2\right)'+\left(\frac{1}{f(x)}\right)'\overset{\left(\frac{1}{F}\right)'=-\frac{F'}{F^2}}{=}2x-\frac{f'(x)}{f^2(x)}=\frac{2xf^2(x)-f'(x)}{f^2(x)}$$

$$g'(x)=\frac{2xf^2(x)-f'(x)}{f^2(x)},x\in(-1,1)$$

$$\left.\begin{cases} g(1)=1^2+\dfrac{1}{f(1)}=1+\dfrac{1}{f(1)} \\ g(-1)=(-1)^2+\dfrac{1}{f(-1)}\overset{f(-1)=f(1)}{=}1+\dfrac{1}{f(1)}\end{cases}\right\}\Rightarrow g(1)=g(-1)$$

$$\acute{E}\chi\omega:\left.\begin{cases}(\mathrm{I})\text{Η } \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ g\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ \kappa\lambda\varepsilon\iota\sigma\tau\acute{o}\ \delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\mu\alpha\ [-1,1] \\ (\mathrm{II})\text{Η } \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ g\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \pi\alpha\rho\alpha\gamma\omega\gamma\acute{\iota}\sigma\iota\mu\eta\ \sigma\tau o\ \alpha\nu o\iota\kappa\tau\acute{o} \\ \delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\mu\alpha\ (-1,1) \\ (\mathrm{III})\,g(-1)=g(1)\end{cases}\right\}$$

Ο$\pi\acute{o}\tau\varepsilon$ η $\sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta$ g $\iota\kappa\alpha\nu o\pi o\iota\varepsilon\acute{\iota}$ $\tau\iota\varsigma$ $\pi\rho o\upsilon\pi o\theta\acute{\varepsilon}\sigma\varepsilon\iota\varsigma$ $\tau o\upsilon$ $\theta\varepsilon\omega\rho\acute{\eta}\mu\alpha\tau o\varsigma$ $\tau o\upsilon$ *Rolle* $\sigma\tau o$ $\kappa\lambda\varepsilon\iota\sigma\tau\acute{o}$ $\delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\mu\alpha$ $[\alpha,\beta]$.Ο$\pi\acute{o}\tau\varepsilon$ $\upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota$ $\acute{\varepsilon}\nu\alpha$ $\tau o\upsilon\lambda\acute{\alpha}\chi\iota\sigma\tau o\nu$ $x_0\in(\alpha,\beta)$ $\tau\acute{\varepsilon}\tau o\iota o$ $\acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon$ $g'(x_0)=0$

$$\left.\begin{cases} g'(x_0)=0 \\ x_0\in(\alpha,\beta)\end{cases}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{cases} \dfrac{2x_0f^2(x_0)-f'(x_0)}{f^2(x)}=0 \\ x_0\in(\alpha,\beta)\end{cases}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{cases} 2x_0f^2(x_0)-f'(x_0)=0 \\ x_0\in(\alpha,\beta)\end{cases}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left.\begin{cases} f'(x_0)=2x_0f^2(x_0) \\ x_0\in(\alpha,\beta)\end{cases}\right\}$$

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

1.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3+(\beta-\delta)x^2+(\gamma+\delta)x-\delta$
με $\alpha+\beta+\gamma=0$
Να αποδείξετε οτι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f
στο σημείο $\mathrm{M}(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη με τον άξονα $x'x$

2.

Έστω η συνάρτηση $f:[1,2]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[1,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,2)$.Να αποδείξετε ότι:
(I) για την συνάρτησημε $g(x)=e^{f(x)}(x-1)(x-2)$ εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle στο κλειστό διάστημα $[1,2]$
(II) υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε:
$f'(\xi)=\frac{1}{1-\xi}+\frac{1}{2-\xi}$

3.

Η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[3,4]$ με:
$f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[3,4]$ και $f(3)f'(4)=f(4)f'(3)$
Να αποδείξετε ότι:
(I) η f είναι αντιστρέψιμη
(II) υπάρχει $x_0\in(3,4)$ τέτοιο ώστε:
$f(x_0)f''(x_0)=(f'(x_0))^2$

4.

Έστω μια συνάρτηση f που είναι συνεχής στο $[-a,a]$ $(a>0)$ και παραγωγίσιμη στο $(-a,a)$ και ισχύει $f(\alpha)=f(-\alpha)$.Αν $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[-a,a]$
(I) να αποδείξετε οτι υπάρχει $x_1\in(-1,1)$ τέτοιο ώστε:
$f'(x_1)=2x_1f^2(x_1)$
(I) να αποδείξετε οτι υπάρχει $x_2\in(-1,1)$ τέτοιο ώστε:
$f'(x_2)=x_2f^3(x_2)$
Υπόδειξη: (I) $g(x)=x^2+\frac{1}{f(x)}$ (II) $h(x)=x^2+\frac{1}{f^2(x)}$