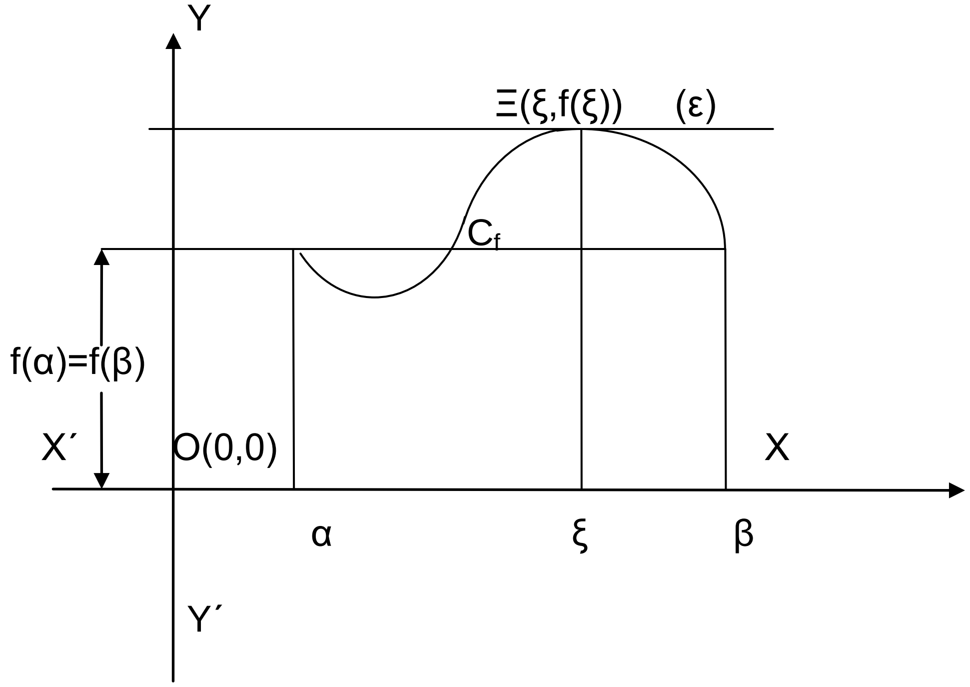
ΤΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ BOLZANO ΚΑΙ ROLLE

Το θεώρημα του Rolle



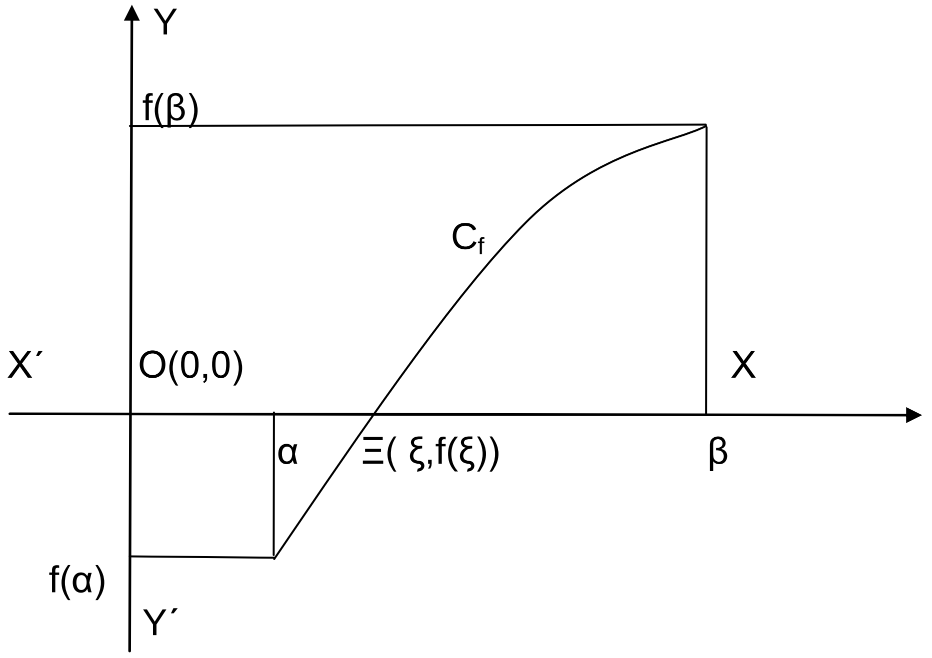
Αν:
- I) f συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,β]
- II) f παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β)
- II) f(α)= f(β)

Τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ∈(α,β) τέτοιο ώστε f΄(ξ)= 0

<u>Γεωμετρική ερμηνεία :</u>
Αν (ε) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο επαφής Ξ(ξ,f(ξ)) τότε θα ισχύει λ_ε = f΄(ξ)= 0.Έχω $\lambda_{X'X}$ =0.Άρα η εφαπτομένη της C_f στο σημείο επαφής Ξ(ξ,f(ξ)) είναι παράλληλη με τον άξονα X΄X γιατί λ_ε= $\lambda_{X'X}$

Υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη στη C_f να είναι παράλληλη με τον άξονα X΄X

Το θεώρημα του Bolzano



Αν: I) f συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,β]
II) f(α)• f(β) <0

Τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον ξϵ(α,β) τέτοιο ώστε f(ξ)= 0

<u>Γεωμετρική ερμηνεία :</u>

Υπάρχει σημείο της Ξ(ξ,f(ξ)) της C_f με f(ξ)= 0Άρα Ξ(ξ,f(ξ))ϵX΄X

Η C_f τέμνει τον άξονα X΄X

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ</u>

1.

Να αποδείξετε οτι εξίσωση $x^5+e^x+1=0$ *έχει μόνο μια πραγματική ρίζα*

Θεωρώ την συνάρτηση $f(x)=x^5+e^x+1, x\in\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x^5+e^x+1\right)=\lim_{x\to-\infty}x^5+\lim_{x\to-\infty}e^x+1=-\infty+0+1=-\infty$$

Επειδή $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ *υπάρχει* $\xi_1<0$ *τέτοιο ώστε* $f(\xi_1)<0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^5+e^x+1\right)=\lim_{x\to+\infty}x^5+\lim_{x\to+\infty}e^x+1=+\infty+\infty+1=+\infty$$

$\text{Επειδή } \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \text{ υπάρχει } \xi_2>0 \text{ τέτοιο ώστε } f(\xi_2)>0$

$$\left.\begin{cases} f(\xi_1)<0 \\ f(\xi_2)>0 \end{cases}\right\} \Rightarrow f(\xi_1)\,f(\xi_2)<0$$

$\text{Έχω}: \xi_1<0<\xi_2 \Rightarrow \xi_1<\xi_2$

$$\text{Έχω}:\left\{\begin{array}{l} (\mathrm{I})\,\text{Η συνάρτηση } f \text{ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα} \\ [\xi_1,\xi_2] \text{ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων} \\ (\mathrm{II})\, f(\xi_1)\,f(\xi_2)<0 \end{array}\right\}$$

Οπότε η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του Bolzano στο κλειστό διάστημα $[\xi_1,\xi_2]$.Οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$τέτοιο ώστε να ισχύει $f(\xi)=0$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων

$$f'(x)=\left(x^5+e^x+1\right)'=\left(x^5\right)'+\left(e^x\right)'+(1)'=5x^4+e^x$$

$\text{Οπότε}: f'(x)=5x^4+e^x, x\in\mathbb{R}$

<u>Έστω η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δυο τουλάχιστον διακεκριμένες ρίζες</u>

Τότε υπάρχουν $\rho_1,\rho_2\in\mathbb{R}$ με $\rho_1<\rho_2$ τέτοια ώστε $f(\rho_1)=f(\rho_2)=0$

$$\left\{\begin{array}{l} (\mathrm{I})\,\text{Η συνάρτηση } f \text{ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα } [\rho_1,\rho_2] \\ \text{ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων} \\ (\mathrm{II})\,\text{Η συνάρτηση } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα} \\ (\rho_1,\rho_2) \text{ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων} \\ (\mathrm{III})\, f(\rho_1)=f(\rho_2) \end{array}\right\}$$

Οπότε η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο κλειστό διάστημα $[\rho_1,\rho_2]$.Αρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho\in(\rho_1,\rho_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\rho)=0$

$$\left.\begin{cases} f'(\rho)=0 \\ \rho\in(\rho_1,\rho_2) \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} 5\rho^4+e^\rho=0 \\ \rho\in(\rho_1,\rho_2) \end{cases}\right\} (\text{Άτοπο})$$

$$\acute{E}\chi\omega:\begin{Bmatrix}\rho^4\geq 0\\ e^{\rho}>0\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}5\rho^4\geq 0\\ e^{\rho}>0\end{Bmatrix}\xRightarrow{(+)}5\rho^4+e^{\rho}>0$$

$\Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma\ \eta\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta\ f(x)=0\ \acute{\varepsilon}\chi\varepsilon\iota\ \mu o\nu\alpha\delta\iota\kappa\acute{\eta}\ \lambda\acute{\upsilon}\sigma\eta$

2.

Αν $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ με $\alpha^2<3\beta$ να αποδείξετε οτι η εξίσωση $x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ έχει μόνο μια πραγματική ρίζα

Θεωρώ την συνάρτηση $f(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma, x\in\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma\right)\overset{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(a_\nu x^\nu+a_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_0\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(a_\nu x^\nu\right),a_\nu\neq 0}{=}\lim_{x\to-\infty}x^3=-\infty$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)-\infty$ υπάρχει $\xi_1<0$ τέτοιο ώστε $f(\xi_1)<0$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma\right)\overset{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(a_\nu x^\nu+a_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_0\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(a_\nu x^\nu\right),a_\nu\neq 0}{=}\lim_{x\to+\infty}x^3=+\infty$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ υπάρχει $\xi_2>0$ τέτοιο ώστε $f(\xi_2)>0$

$$\begin{Bmatrix}f(\xi_1)<0\\ f(\xi_2)>0\end{Bmatrix}\Rightarrow f(\xi_1)f(\xi_2)<0$$

$\acute{E}\chi\omega:\xi_1<0<\xi_2\Rightarrow\xi_1<\xi_2$

$$\acute{E}\chi\omega:\begin{Bmatrix}(\mathrm{I})\text{Η συνάρτηση } f \text{ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα}\\ [\xi_1,\xi_2]\text{ ως πολυωνυμική}\\ (\mathrm{II})\ f(\xi_1)f(\xi_2)<0\end{Bmatrix}$$

Οπότε η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του Bolzano στο κλειστό διάστημα $[\xi_1,\xi_2]$.Οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f(\xi)=0$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική

$$f'(x)=\left(x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma\right)'=\left(x^3\right)'+\alpha\left(x^2\right)'+\beta(x)'+(\gamma)'=$$
$$=3x^2+2\alpha x+\beta$$

Οπότε: $f'(x)=3x^2+2\alpha x+\beta, x\in\mathbb{R}$

<u>Έστω η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δυο τουλάχιστον διακεκριμένες ρίζες</u>

Τότε υπάρχουν $\rho_1,\rho_2\in\mathbb{R}$ με $\rho_1<\rho_2$ τέτοια ώστε $f(\rho_1)=f(\rho_2)=0$

$$\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\,\mathrm{H}\ \textit{συνάρτηση}\ f\ \textit{είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα}\ \left[\rho_1,\rho_2\right] \\ \textit{ως πολυωνυμική} \\ (\mathrm{II})\,\mathrm{H}\ \textit{συνάρτηση}\ f\ \textit{είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα} \\ \left(\rho_1,\rho_2\right)\ \textit{ως πολυωνυμική} \\ (\mathrm{III})\ f\left(\rho_1\right)=f\left(\rho_2\right)\end{array}\right\}$$

Ο*πότε η συνάρτηση* f *ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του* Rolle *στο κλειστό διάστημα* $\left[\rho_1,\rho_2\right]$.*Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον* $\rho\in\left(\rho_1,\rho_2\right)$ *τέτοιο ώστε* $f'\left(\rho\right)=0$

$$\left\{\begin{array}{l}f'\left(\rho\right)=0 \\ \rho\in\left(\rho_1,\rho_2\right)\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}3\rho^2+2\alpha\rho+\beta=0(1) \\ \rho\in\left(\rho_1,\rho_2\right)\end{array}\right\}$$

Ε*πειδή η δευτεροβάμια εξίσωση* (1) *έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα θα ισχύει* $\Delta\geq 0$

$$\Delta\geq 0\Leftrightarrow\left(2\alpha\right)^2-4\bullet3\bullet\beta\geq 0\Leftrightarrow 4\left(\alpha^2-3\beta\right)\geq 0\Leftrightarrow\alpha^2-3\beta\geq 0\Leftrightarrow\alpha^2\geq 3\beta$$

Άτοπο γιατι $\alpha^2<3\beta$.*Συνεπώς η εξίσωση* $f\left(x\right)=0$ *έχει μόνο μια πραγματική ρίζα*

3.

Ν*α αποδείξετε οτι η εξίσωση* $8x^3-12x^2-6x+5=0$ *έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα* $\left(0,1\right)$

Θ*εωρώ την συνάρτηση* $f\left(x\right)=8x^3-12x^2-6x+5, x\in\mathbb{R}$

$$f\left(0\right)=8\bullet0^3-12\bullet0^2-6\bullet0+5=5$$

$$f\left(1\right)=8\bullet1^3-12\bullet1^2-6\bullet1+5=8-12-6+5=13-18=-5<0$$

$$\textit{Έχω}: f\left(0\right)f\left(1\right)=5\left(-5\right)=-25<0$$

$$\textit{Έχω}:\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\,\mathrm{H}\ \textit{συνάρτηση}\ f\ \textit{είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα} \\ \left[0,1\right]\ \textit{ως πολυωνυμική} \\ (\mathrm{II})\ f\left(0\right)f\left(1\right)<0\end{array}\right\}$$

Οπότε η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του Bolzano στο κλειστό διάστημα $[0,1]$.Οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f(\xi)=0$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική

$$f'(x)=\left(8x^3-12x^2-6x+5\right)'=8\left(x^3\right)'-12\left(x^2\right)'-6(x)'+(5)'=$$

$$=24x^2-24x-6=6\left(4x^2-4x-1\right)$$

Οπότε: $f'(x)=6\left(4x^2-4x-1\right), x\in\mathbb{R}$

<u>Έστω η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δυο τουλάχιστον διακεκριμένες ρίζες στο διάστημα $(0,1)$</u>.Τότε υπάρχουν $\rho_1,\rho_2 \in (0,1)$ με $\rho_1<\rho_2$ τέτοια ώστε $f(\rho_1)=f(\rho_2)=0$

$$\left\{\begin{array}{l} (\mathrm{I})\text{Η συνάρτηση } f \text{ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα } [\rho_1,\rho_2] \\ \text{ως πολυωνυμική} \\ (\mathrm{II})\text{Η συνάρτηση } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα} \\ (\rho_1,\rho_2) \text{ ως πολυωνυμική} \\ (\mathrm{III})\, f(\rho_1)=f(\rho_2) \end{array}\right\}$$

Οπότε η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο κλειστό διάστημα $[\rho_1,\rho_2]$.Αρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho\in(\rho_1,\rho_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\rho)=0$

Έχω: $0<\rho_1<\rho<\rho_2<1 \Rightarrow 0<\rho<1 \Rightarrow \rho\in(0,1)$

$$\text{Άρα}: \left\{\begin{array}{l} f'(\rho)=0 \\ \rho\in(0,1) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 6\left(4\rho^2-4\rho-1\right)=0 \\ \rho\in(0,1) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4\rho^2-4\rho-1=0 \\ \rho\in(0,1) \end{array}\right\}$$

Θεωρώ την δευτεροβάθμια εξίσωση $4\rho^2-4\rho-1=0(1)$

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-4)^2-4\bullet4\bullet(-1)=16+16=32>0$$

Επειδή $\Delta>0$ η δευτεροβάθμια εξίσωση (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες:

$$\rho_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{32}}{2\bullet1}=\frac{4\pm\sqrt{2\bullet16}}{8}=\frac{4\pm4\sqrt{2}}{8}=\frac{4(1\pm\sqrt{2})}{8}=$$

$=\dfrac{1\pm\sqrt{2}}{2}$

$\text{Αν}\ \rho=\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}:$

$\text{Έχω}:1<2\Rightarrow 1<\sqrt{2}\Rightarrow 1-\sqrt{2}<0\Rightarrow \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}<0\Rightarrow \rho<0$

Άτοπο γιατί $\rho\in(0,1)$

$\text{Αν}\ \rho=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}:$

$\text{Έχω}:2>1\Rightarrow \sqrt{2}>1\Rightarrow \sqrt{2}+1>2\Rightarrow \dfrac{\sqrt{2}+1}{2}>1\Rightarrow \rho>1$

Άτοπο γιατί $\rho\in(0,1)$

Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ *έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα* $(0,1)$

4.

Να *αποδείξετε οτι η εξίσωση* $e^x-x-1=0$ *έχει μοναδική ρίζα την* $x=0$

Θ*εωρώ την συνάρτηση* $f(x)=e^x-x-1, x\in\mathbb{R}$

Έχω: $f(0)=e^0-0-1=1-1=0$

Άρα η εξίσωση $e^x-x-1=0$ *έχει ρίζα την* $x=0$

Η *συνάρτηση* f *είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων*

$f'(x)=\left(e^x-x-1\right)'=\left(e^x\right)'-(x)'-(1)'=e^x-1$

Ο*πότε*: $f'(x)=e^x-1, x\in\mathbb{R}$

Έστω η εξίσωση $f(x)=0$ *έχει μια τουλάχιστον ρίζα ρ διάφορη απο το* 0

Δ*ιακρίνω τις περιπτώσεις*: $\begin{Bmatrix}(\mathrm{I})\,\rho<0\\(\mathrm{II})\,\rho>0\end{Bmatrix}$

Π*ερίπτωση*$(\mathrm{I}):\rho<0$

$f(\rho)=f(0)=0\Rightarrow f(\rho)=f(0)$

$$\left\{\begin{array}{l} (\mathrm{I})\mathrm{H}\ \textit{συνάρτηση}\ f\ \textit{είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα}\ [\rho,0] \\ \textit{ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων} \\ (\mathrm{II})\mathrm{H}\ \textit{συνάρτηση}\ f\ \textit{είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα} \\ (\rho,0)\ \textit{ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων} \\ (\mathrm{III})\ f(\rho)=f(0) \end{array}\right\}$$

Oπότε η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο κλειστό διάστημα $[\rho,0]$ .Aρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\rho,0)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$

$$\left\{\begin{array}{l} f'(\xi)=0 \\ \xi \in (\rho,0) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} e^{\xi}-1=0 \\ \xi \in (\rho,0) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} e^{\xi}=e^{0} \\ \xi \in (\rho,0) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \xi=0 \\ \xi \in (\rho,0) \end{array}\right\} (\textit{Άτοπο})$$

Περίπτωση(II): $\rho>0$

$f(\rho)=f(0)=0 \Rightarrow f(\rho)=f(0)$

$$\left\{\begin{array}{l} (\mathrm{I})\mathrm{H}\ \textit{συνάρτηση}\ f\ \textit{είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα}\ [0,\rho] \\ \textit{ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων} \\ (\mathrm{II})\mathrm{H}\ \textit{συνάρτηση}\ f\ \textit{είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα} \\ (0,\rho)\ \textit{ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων} \\ (\mathrm{III})\ f(\rho)=f(0) \end{array}\right\}$$

Oπότε η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο κλειστό διάστημα $[0,\rho]$ .Aρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,\rho)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$

$$\left\{\begin{array}{l} f'(\xi)=0 \\ \xi \in (0,\rho) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} e^{\xi}-1=0 \\ \xi \in (0,\rho) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} e^{\xi}=e^{0} \\ \xi \in (0,\rho) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \xi=0 \\ \xi \in (0,\rho) \end{array}\right\} (\textit{Άτοπο})$$

Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ *έχει μοναδική ρίζα την* $x=0$

5

Nα αποδείξετε οτι η εξίσωση $\ln x - x + 1 = 0$ έχει μοναδική ρίζα την $x=1$

Θεωρώ την συνάρτηση $f(x)=\ln x - x + 1, x \in (0,+\infty)$

Έχω: $f(1)=\ln 1 - 1 + 1 = 0$

Άρα η εξίσωση $\ln x - x + 1 = 0$ *έχει ρίζα την* $x = 1$

Η *συνάρτηση* f *είναι παραγωγίσιμη στο* $(0,+\infty)$ *ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων* :

$$f'(x) = (\ln x - x + 1)' = (\ln x)' - (x)' + (1)' = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

Ο*πότε* : $f'(x) = \dfrac{1-x}{x}, x \in (0,+\infty)$

Έστω η εξίσωση $f(x) = 0$ *έχει μια τουλάχιστον θετική ρίζα* ρ *διάφορη απο το* 1

Δ*ιακρίνω τις περιπτώσεις* : $\begin{Bmatrix} (\mathrm{I})\, 0 < \rho < 1 \\ (\mathrm{II})\, \rho > 1 \end{Bmatrix}$

Π*ερίπτωση* $(\mathrm{I}) : 0 < \rho < 1$

$$f(\rho) = f(1) = 0 \Rightarrow f(\rho) = f(1)$$

$$\begin{Bmatrix} (\mathrm{I})\text{Η } \textit{συνάρτηση } f \textit{ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα } [\rho,1] \\ \textit{ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων} \\ (\mathrm{II})\text{Η } \textit{συνάρτηση } f \textit{ είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα} \\ (\rho,1) \textit{ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων} \\ (\mathrm{III})\, f(\rho) = f(1) \end{Bmatrix}$$

Ο*πότε η συνάρτηση* f *ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του* Rolle *στο κλειστό διάστημα* $[\rho,1]$.Α*ρα υπάρχει ένα τουλάχιστον* $\xi \in (\rho,1)$ *τέτοιο ώστε* $f'(\xi) = 0$

$$\begin{Bmatrix} f'(\xi) = 0 \\ \xi \in (\rho,1) \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \dfrac{1-\xi}{\xi} = 0 \\ \xi \in (\rho,0) \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 1-\xi = 0 \\ \xi \in (\rho,1) \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \xi = 1 \\ \xi \in (\rho,1) \end{Bmatrix} (\textit{Άτοπο})$$

Π*ερίπτωση* $(\mathrm{II}) : \rho > 1$

$$f(\rho) = f(1) = 0 \Rightarrow f(\rho) = f(1)$$

$$\left.\begin{cases} (\mathrm{I})\,\mathrm{H}\ \text{συνάρτηση}\ f\ \text{είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα}\ [1,\rho] \\ \text{ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων} \\ (\mathrm{II})\,\mathrm{H}\ \text{συνάρτηση}\ f\ \text{είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα} \\ (1,\rho)\ \text{ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων} \\ (\mathrm{III})\ f(\rho)=f(1) \end{cases}\right\}$$

Οπότε η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο κλειστό διάστημα $[1,\rho]$.Αρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,\rho)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$

$$\left.\begin{cases} f'(\xi)=0 \\ \xi\in(1,\rho) \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} \dfrac{1-\xi}{\xi}=0 \\ \xi\in(1,\rho) \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} 1-\xi=0 \\ \xi\in(1,\rho) \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} \xi=1 \\ \xi\in(1,\rho) \end{cases}\right\} (\text{Άτοπο})$$

Άρα η εξίσωση $f(x)=0, x\in(0,+\infty)$ έχει μοναδική ρίζα την $x=1$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Να αποδείξετε οτι εξίσωση $x^7+e^x+8=0$ έχει μόνο μια πραγματική ρίζα

2.

Αν $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ με $4\alpha^2<3\beta$ να αποδείξετε οτι η εξίσωση $x^3+2\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ έχει μόνο μια πραγματική ρίζα

3.

Να αποδείξετε οτι η εξίσωση $-8x^3-12x^2+6x+5=0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(-1,0)$

4.

Να αποδείξετε οτι η εξίσωση $e^{-x}+x-1=0$ έχει μοναδική ρίζα την $x=0$

5.

Να αποδείξετε οτι η εξίσωση $xe^x-e^x+1=0$ έχει μοναδική ρίζα την $x=0$

6.

Να αποδείξετε οτι η εξίσωση $x\ln x-x+1=0$ έχει μοναδική ρίζα την $x=1$