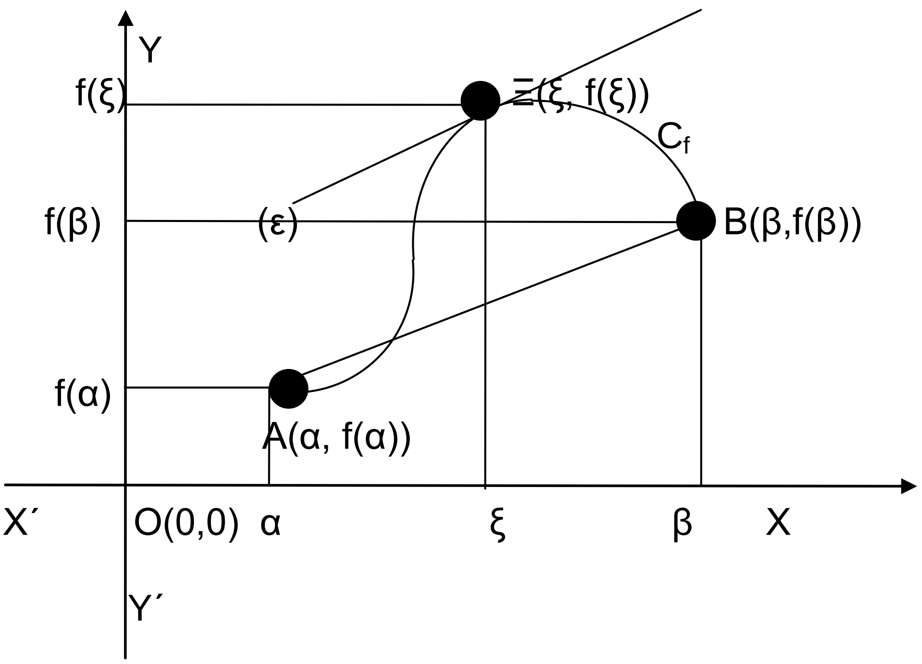
# ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

## Το θεώρημα της μέσης τιμής




Αν:
- I) f συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,β]
- II) f παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β)

Τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον ξє(α,β) τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

<u>Γεωμετρική ερμηνεία :</u>
Αν (ε) η εφαπτομένη της $C_f$ στο σημείο επαφής Ξ(ξ,f(ξ)) τότε θα ισχύει $\lambda_\varepsilon = f'(\xi)= \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

Η ευθεία ΑΒ έχει στντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{AB} =\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

Άρα η εφαπτομένη της $C_f$ στο σημείο επαφής Ξ(ξ,f(ξ)) είναι παράλληλη με την ευθεία ΑΒ γιατί $\lambda_\varepsilon= \lambda_{AB}$

*Υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της $C_f$ στο οποίο η εφαπτομένη στη $C_f$ να είναι παράλληλη με την ευθεία ΑΒ*

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1.

Να βρείτε τα α,β∈IR ώστε να εφαρμόζεται το θεώρημα της μέσης τιμής για τη συνάρτηση f με τύπο :

$$f(x) = \begin{cases} \alpha - \dfrac{x^2}{2}, & 0 \le x < 1 \\ \dfrac{\beta}{x}, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

Στη συνέχεια να βρείτε σημείο ξ∈(0,2) τέτοιο ώστε να είναι :

$$f'(\xi) = \frac{f(2) - f(0)}{2}$$

Η συνάρτηση f για να ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής στο κλειστό διάστημα [0,2] θα πρέπει να ισχύει :

I) f συνεχής στο κλειστό διάστημα [0,2]

II) f παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (0,2)

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στα διαστήματα [0,1)ως πολυωνυμική. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στα διαστήματα (1,2] ως ρητή.Οπότε η συνάρτηση f για να είναι συνεχής [0,2] θα πρέπει να είναι συνεχής στο σημείο $x_o$=1.Άρα θα ισχύει :

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \Longleftrightarrow \alpha - \frac{1}{2} = \beta \Longleftrightarrow \alpha = \beta + \frac{1}{2} \quad (1)$$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα (0,1)ως πολυωνυμική. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα (1,2) ως ρητή.Οπότε η συνάρτηση f για να είναι συνεχής (0,2) θα πρέπει να είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_o$=1

Θεωρώ την συνάρτηση :

$$\lambda(h) = \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h} = \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \frac{f(1+h) - \beta}{h} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{f(1+h)-\beta}{h}, & 0\le 1+h<1 \\[2em] \dfrac{f(1+h)-\beta}{h}, & 1<1+h\le 2 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{\alpha-\dfrac{(1+h)^2}{2}-\beta}{h}, & -1\le h<0 \\[2em] \dfrac{\dfrac{\beta}{1+h}-\beta}{h}, & 0< h\le 1 \end{cases}$$

Αν $-1\le h<0$ θα έχω :

$$\lambda(h) = \frac{\alpha-\dfrac{(1+h)^2}{2}-\beta}{h} \overset{(1)}{=} \frac{\beta+\dfrac{1}{2}-\dfrac{(1+h)^2}{2}-\beta}{h} =$$

$$= \frac{\dfrac{1-(1+h)^2}{2}}{h} = \frac{1-(1^2+2\bullet 1\bullet h+h^2)}{2h} = \frac{1-(1+2h+h^2)}{2h} =$$

$$= \frac{1-1-2h-h^2}{2h} = \frac{-h(2+h)}{2h} = \frac{2+h}{2}$$

$$\lim_{h\to 0^-} \lambda(h) = -\lim_{h\to 0^-} \frac{2+h}{2} = -1$$

Αν $0< h\le 1$ θα έχω :

$$\lambda(h) = \frac{\dfrac{\beta}{1+h}-\beta}{h} = \frac{\dfrac{\beta}{1+h}-\dfrac{\beta(1+h)}{1+h}}{h} = \frac{\dfrac{\beta-\beta(1+h)}{1+h}}{h} =$$

$\beta-\beta-\beta h$ $\quad\quad$ $\beta h$ $\quad\quad$ $\beta$

$$= \frac{}{(1+h)h} = \frac{}{(1+h)h} = \frac{}{1+h}$$

$$\lim_{h\to 0^+} \lambda(h) = -\lim_{h\to 0^+} \frac{\beta}{1+h} = -\beta$$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_o$=1.Συνεπώς υπάρχει το όριο της συνάρτησης λ στο σημείο $h_o$=0 και είναι πραγματικός αριθμός.Άρα θα ισχύει :

$$\lim_{h\to 0^-} \lambda(h) = \lim_{h\to 0^+} \lambda(h) \text{ ή } -\beta = -1 \text{ ή } \beta = 1$$

Θέτω β= 1 στην σχέση (1) :

$$\alpha = \beta + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{2} - \dfrac{x^2}{2}, & 0 \le x < 1 \\ \dfrac{1}{x}, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

Αν $x \in [0,1)$ θα έχω :

$$f'(x) = \left(\frac{3}{2} - \frac{x^2}{2}\right)' = \left(\frac{3}{2}\right)' - \left(\frac{1}{2} x^2\right)' = 0 - \frac{1}{2} (x^2)' =$$

$$= -\frac{1}{2} 2x = -x$$

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \lambda(h) = -1$$

Οπότε αν $x \in [0,1]$

Αν $x \in (1,2)$ θα έχω : $f'(x) = -x$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \bullet x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -\ x\ , & 0 \le x \le 1 \\ -\dfrac{1}{x^2}\ , & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(\xi) = \dfrac{f(2) - f(0)}{2} \\ \xi \in (0,2) \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} f'(\xi) = \dfrac{\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}}{2} \\ \xi \in (0,2) \end{array}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(\xi) = -\dfrac{1}{2} \\ \xi \in (0,2) \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{ \left(\begin{array}{l} f'(\xi) = -\dfrac{1}{2} \\ \xi \in (0,1] \end{array}\right) \text{ ή } \left(\begin{array}{l} f'(\xi) = -\dfrac{1}{2} \\ \xi \in (1,2) \end{array}\right) \right\}$$

$$\left\{ \left(\begin{array}{l} -\xi = -\dfrac{1}{2} \\ \xi \in (0,1] \end{array}\right) \text{ ή } \left(\begin{array}{l} -\dfrac{1}{\xi^2} = -\dfrac{1}{2} \\ \xi \in (1,2) \end{array}\right) \right\} \Longleftrightarrow$$

$$\left\{ \left(\begin{array}{l} \xi = \dfrac{1}{2} \\ \xi \in (0,1] \end{array}\right) \text{ ή } \left(\begin{array}{l} \dfrac{1}{\xi^2} = \dfrac{1}{2} \\ \xi \in (1,2) \end{array}\right) \right\} \Longleftrightarrow$$

$$\left\{ \left(\begin{array}{l} \xi = \dfrac{1}{2} \end{array}\right) \text{ ή } \left(\begin{array}{l} \xi^2 = 2 \\ \xi \in (1,2) \end{array}\right) \right\} \Longleftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}\left(\xi = \dfrac{1}{2}\right) \text{ ή } \left(\begin{array}{l}\xi = \sqrt{2} \\ \xi \in (1,2) \\ \text{Δεκτη γιατί: } 1=1^2<\xi^2=2<2^2\end{array}\right)\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left(\xi = \frac{1}{2} \text{ ή} \xi = \sqrt{2}\right)$$

2.

| |
|---|
| Να λυθεί η εξίσωση : $3^{\alpha}+6^{\alpha}=5^{\alpha}+4^{\alpha}$ |

Θεωρώ τη συνάρτηση f: $(0,+\infty)\to IR$ με τύπο $f(x) = x^{\alpha}$ με $x>0$

$f'(x) = (x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$

$$\left.\begin{array}{l}\text{I) f συνεχής στο κλειστό διάστημα } [3,4] \\ \text{II) f παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα } (3,4)\end{array}\right\}$$

Οπότε η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής στο κλειστό διάστημα [3,4].Άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (3,4)$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$f'(\xi_1) = \frac{f(4) - f(3)}{4-3}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(\xi_1) = f(4) - f(3) \\ \xi_1 \in (3,4)\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l}\alpha\, \xi_1^{\alpha-1} = 4^{\alpha} - 3^{\alpha} \\ \xi_1 \in (3,4)\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{I) f συνεχής στο κλειστό διάστημα } [5,6] \\ \text{II) f παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα } (5,6)\end{array}\right\}$$

Οπότε η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής στο κλειστό διάστημα [5,6].Άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (5,6)$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$f'(\xi_2) = \frac{f(6) - f(5)}{6-5}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(\xi_2) = f(6) - f(5) \\ \xi_2 \in (5,6) \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{c} \alpha\, \xi_2^{\alpha-1} = 6^\alpha - 5^\alpha \\ \xi_2 \in (5,6) \end{array}\right\}$$

$3^\alpha+6^\alpha=5^\alpha+4^\alpha$ ή $6^\alpha-5^\alpha=4^\alpha-3^\alpha$ ή $\alpha\, \xi_2^{\alpha-1}=\alpha\, \xi_1^{\alpha-1}$ ή $\alpha\, \xi_2^{\alpha-1}-\alpha\, \xi_1^{\alpha-1}=0$ ή

$$\alpha\,(\xi_2^{\alpha-1}-\xi_1^{\alpha-1})=0 \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \alpha=0 \\ \text{ή} \\ \xi_2^{\alpha-1}-\xi_1^{\alpha-1}=0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \alpha=0 \\ \text{ή} \\ \xi_2^{\alpha-1}=\xi_1^{\alpha-1} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha=0 \\ \text{ή} \\ \alpha-1=0 \text{(Γιατί } \xi_1 \neq \xi_2 \text{ και } \xi_1,\ \xi_2>0) \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \alpha=0 \\ \text{ή} \\ \alpha=1 \end{array}\right\}$$

3.

> Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α,β] και παραγωγίσιμη στο (α,β) και ισχύει f(α) = f(β).Εφαρμόζοντας το θεώρημα της μέσης τιμής στα διαστήματα $[\alpha, \frac{\alpha+2\beta}{3}]$ και $[\frac{\alpha+2\beta}{3}, \beta]$ να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2 \in (\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε να ισχύει : $2f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=0$

$$\left.\begin{array}{l} \text{I) f συνεχής στο κλειστό διάστημα } [\alpha, \frac{\alpha+2\beta}{3}] \\ \text{II) f παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα } (\alpha, \frac{\alpha+2\beta}{3}) \end{array}\right\}$$

Οπότε η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του

θεωρήματος της μέσης τιμής στο κλειστό διάστημα

$[\alpha, \frac{\alpha+2\beta}{3}]$.Άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (\alpha, \frac{\alpha+2\beta}{3})$

τέτοιο ώστε να ισχύει $f'(\xi_1) = \dfrac{f(\frac{\alpha+2\beta}{3}) - f(\alpha)}{}$

$$\frac{\alpha+2\beta}{3} - \alpha$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(\xi_1) = \dfrac{f\left(\dfrac{\alpha+2\beta}{3}\right) - f(\alpha)}{\dfrac{\alpha+2\beta}{3} - \dfrac{3\alpha}{3}} \\ \xi_1 \in \left(\alpha , \dfrac{\alpha+2\beta}{3}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f'(\xi_1) = \dfrac{f\left(\dfrac{\alpha+2\beta}{3}\right) - f(\alpha)}{\dfrac{\alpha+2\beta-3\alpha}{3}} \\ \xi_1 \in \left(\alpha , \dfrac{\alpha+2\beta}{3}\right) \end{array}\right\}$$

4

$$\left.\begin{array}{l} f'(\xi_1) = \dfrac{f\left(\dfrac{\alpha+2\beta}{3}\right) - f(\alpha)}{\dfrac{2\beta-2\alpha}{3}} \\ \xi_1 \in \left(\alpha , \dfrac{\alpha+2\beta}{3}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f'(\xi_1) = 3\,\dfrac{f\left(\dfrac{\alpha+2\beta}{3}\right) - f(\alpha)}{2(\beta-\alpha)} \\ \xi_1 \in \left(\alpha , \dfrac{\alpha+2\beta}{3}\right) \end{array}\right\}$$

I) f συνεχής στο κλειστό διάστημα $\left[\dfrac{\alpha+2\beta}{3},\beta\right]$

II) f παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα $\left(\dfrac{\alpha+2\beta}{3},\beta\right)$

Οπότε η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του

θεωρήματος της μέσης τιμής στο κλειστό διάστημα

$\left[\dfrac{\alpha+2\beta}{3}, \beta\right]$. Άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in \left(\dfrac{\alpha+2\beta}{3},\beta\right)$

τέτοιο ώστε να ισχύει $f'(\xi_2) = \dfrac{f(\beta) - f\left(\dfrac{\alpha+2\beta}{3}\right)}{\beta - \dfrac{\alpha+2\beta}{3}}$

$$\left.\begin{array}{l} f'(\xi_2) = \dfrac{f(\beta) - f\left(\dfrac{\alpha+2\beta}{3}\right)}{\dfrac{3\beta}{3} - \dfrac{\alpha+2\beta}{3}} \\ \quad 5 \\ \xi_2 \in \left(\alpha, \dfrac{\alpha+2\beta}{3}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f'(\xi_2) = \dfrac{f(\beta) - f\left(\dfrac{\alpha+2\beta}{3}\right)}{\dfrac{3\beta - (\alpha+2\beta)}{3}} \\ \\ \xi_2 \in \left(\alpha, \dfrac{\alpha+2\beta}{3}\right) \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(\xi_2) = \dfrac{f(\beta) - f\left(\dfrac{\alpha+2\beta}{3}\right)}{\dfrac{3\beta - \alpha - 2\beta}{3}} \\ \\ \xi_2 \in \left(\alpha, \dfrac{\alpha+2\beta}{3}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f'(\xi_2) = 3\dfrac{f(\beta) - f\left(\dfrac{\alpha+2\beta}{3}\right)}{\beta - \alpha} \\ \\ \xi_2 \in \left(\alpha, \dfrac{\alpha+2\beta}{3}\right) \end{array}\right\}$$

$$2f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = \cancel{2}\bullet 3\,\frac{f\left(\dfrac{\alpha+2\beta}{3}\right) - f(\alpha)}{\cancel{2}\,(\beta - \alpha)} + 3\,\frac{f(\beta) - f\left(\dfrac{\alpha+2\beta}{3}\right)}{\beta - \alpha} =$$

$$f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right) - f(\alpha) \qquad f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right)$$

$$= 3\,\frac{3}{\beta-\alpha} + 3\,\frac{3}{\beta-\alpha} =$$

$$= 3\,\frac{f\left(\cancel{\frac{\alpha+2\beta}{3}}\right) - f(\alpha)+f(\beta) - f\left(\cancel{\frac{\alpha+2\beta}{3}}\right)}{\beta-\alpha} = \frac{-\cancel{f(\alpha)}+\cancel{f(\alpha)}}{\beta-\alpha} = 0$$

4.

| |
|---|
| Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [0,3] και παραγωγίσιμη στο (0,3) . Εφαρμόζοντας το θεώρημα της μέσης τιμής στα διαστήματα [0 ,1] , [1 ,2], [2 ,3] να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2 \in (0,3)$ τέτοια ώστε να ισχύει : $f'(\xi_1)+ f'(\xi_2) )+ f'(\xi_3)= f(3)– f(0)$ |

I) f συνεχής στο κλειστό διάστημα [0 , 1 ]

II) f παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (0,1)

Οπότε η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής στο κλειστό διάστημα [0,1].Άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$f'(\xi_1) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f(1) - f(0)$$

I) f συνεχής στο κλειστό διάστημα [1,2 ]

II) f παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (1,2)

Οπότε η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής στο κλειστό διάστημα [1,2].Άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (1,2)$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$f'(\xi_2) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = f(2) - f(1)$$

I) f συνεχής στο κλειστό διάστημα [2,3 ]

II) f παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (2,3)

Οπότε η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής στο κλειστό διάστημα [2,3].Άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (2,3)$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$f'(\xi_3) = \frac{f(2) - f(3)}{3 - 2} = f(3) - f(2)$$

$f'(\xi_1) + f'(\xi_2)\, ) + f'(\xi_3) = f(1) - f(0) + f(2) - f(1) + f(3) - f(2) = f(3) - f(0)$

5.

Έστω η συνάρτηση f 2 φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα [1,3].Αν είναι $2f(2) = f(1) + f(3)$ να ααποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1,3)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f''(\xi) = 0$

I) f συνεχής στο κλειστό διάστημα [1 ,2 ] ως παραγωγίσιμη

II) f παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (1,2)

Οπότε η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής στο κλειστό διάστημα [1,2].Άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$f'(\xi_1) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = f(2) - f(1)$$

I) f συνεχής στο κλειστό διάστημα [2 ,3 ] ως παραγωγίσιμη

II) f παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (2,3)

Οπότε η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής στο κλειστό διάστημα [2,3].Άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (2,3)$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$f'(\xi_2) = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = f(3) - f(2)$$

$2f(2) = f(1) + f(3)$ ή $f(2) - f(1) = f(3) - f(2)$ ή $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$

I) $f'$ συνεχής στο κλειστό διάστημα$[\xi_1, \xi_2]$ ως παραγωγίσιμη

II) $f'$ παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα$(\xi_1, \xi_2)$

III) $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$

Οπότε η συνάρτηση f΄ ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο κλειστό διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$.Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\xi_1, \xi_2,)$ τετοιο ώστε να ισχύει $f''(\xi)=0$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Να βρείτε τα $\alpha,\beta \in IR$ ώστε να εφαρμόζεται το θεώρημα της μέσης τιμής για τη συνάρτηση f με τύπο :

$$f(x) = \begin{cases} -2\alpha - \dfrac{x^2}{2}, & 0 \le x < 1 \\[2ex] \dfrac{\beta}{x}, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

Στη συνέχεια να βρείτε σημείο $\xi \in (0,2)$ τέτοιο ώστε να είναι :

$$f'(\xi) = \frac{f(2) - f(0)}{2}$$

2.

Να λυθεί η εξίσωση : $4^\alpha + 7^\alpha = 6^\alpha + 5^\alpha$

3.

Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο $(2\alpha,\beta)$ και ισχύει $f(\alpha) = f(\beta)$.Εφαρμόζοντας το θεώρημα της μέσης τιμής στα διαστήματα $\left[\alpha, \dfrac{2\alpha+3\beta}{5}\right]$ και $\left[\dfrac{2\alpha+3\beta}{5}, \beta\right]$ να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2 \in (\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε να ισχύει : $3f'(\xi_1)+2 f'(\xi_2)= 0$

4.

Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [0,6] και παραγωγίσιμη στο (0,6) . Εφαρμόζοντας το θεώρημα της μέσης τιμής στα διαστήματα [0 ,2] , [2 ,4], [4 ,6] να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2 \in (0,6)$ τέτοια ώστε να ισχύει :

$2f'(\xi_1)+2f'(\xi_2) +2f'(\xi_3)= f(6)- f(0)$

5.

Έστω η συνάρτηση f 2 φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα [1,5].Αν είναι $2f(3) = f(1)+ f(5)$ να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1,5)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f''(\xi)= 0$