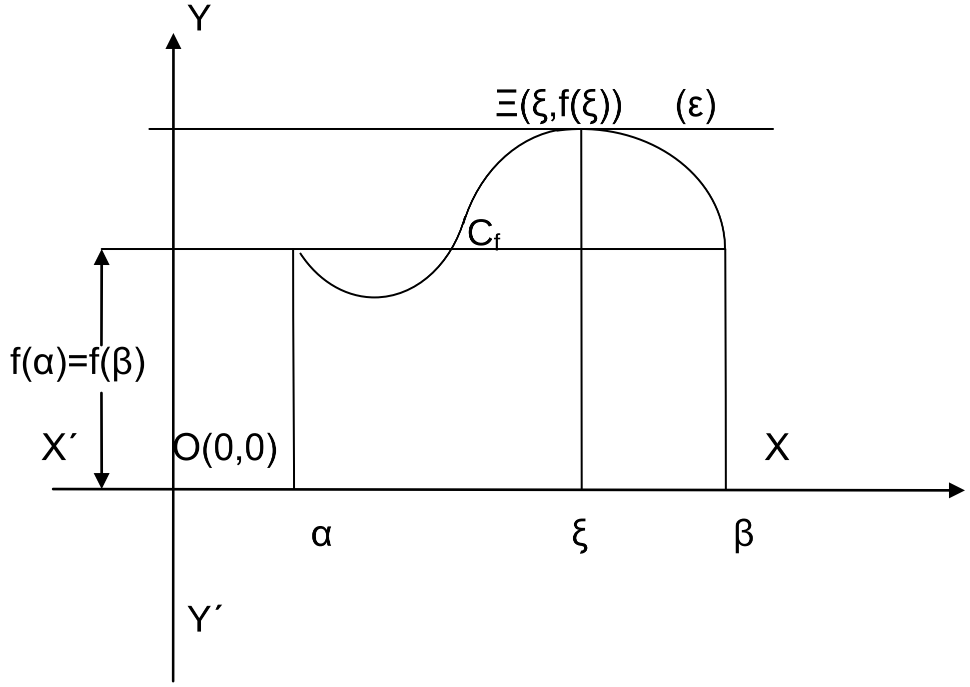
ΤΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ BOLZANO – ROLLE-ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

Το θεώρημα του Rolle



Αν:
- I) f συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,β]
- II) f παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β)
- II) f(α)= f(β)

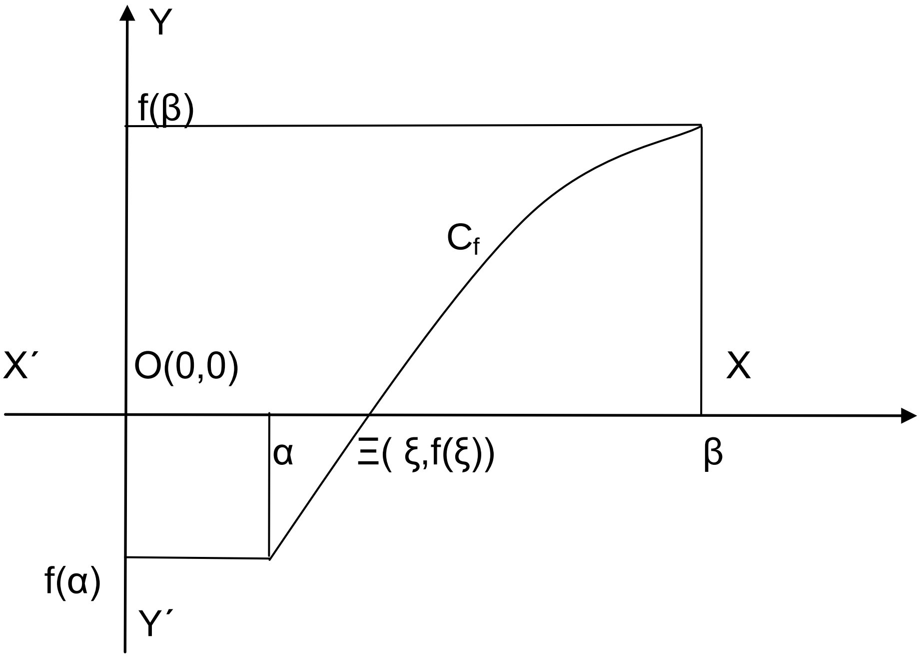
Τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ∈(α,β) τέτοιο ώστε f΄(ξ)= 0

Γεωμετρική ερμηνεία :

Αν (ε) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο επαφής Ξ(ξ,f(ξ)) τότε θα ισχύει $λ_ε$ = f΄(ξ)= 0.Έχω $λ_{X΄X}$ =0.Άρα η εφαπτομένη της C_f στο σημείο επαφής Ξ(ξ,f(ξ)) είναι παράλληλη με τον άξονα X΄X γιατί $λ_ε$= $λ_{X΄X}$

Υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη στη C_f να είναι παράλληλη με τον άξονα X΄X

Το θεώρημα του Bolzano



Αν: I) f συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,β]

II) f(α)• f(β) <0

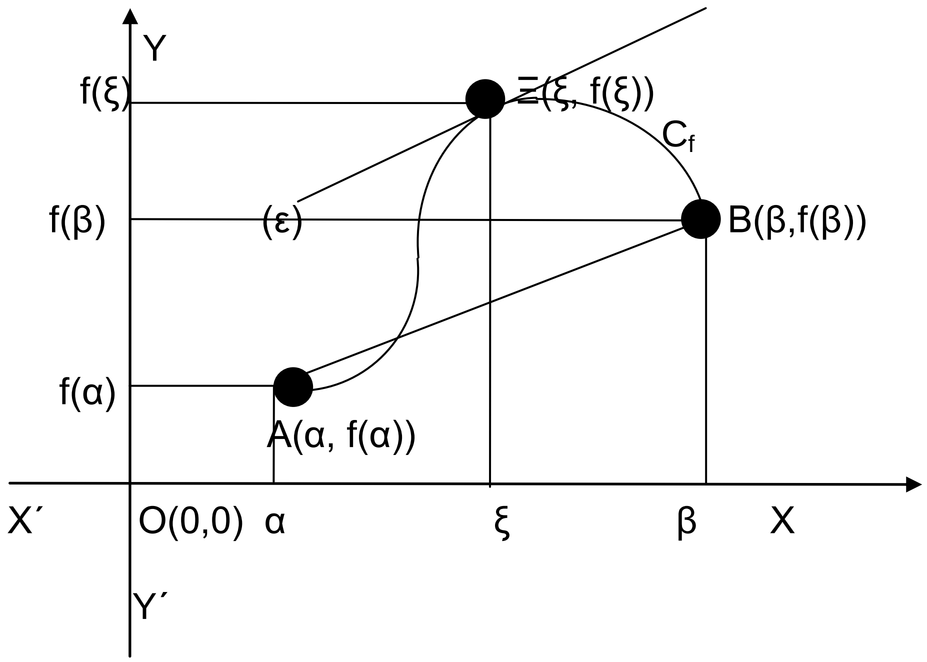
Τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον ξϵ(α,β) τέτοιο ώστε f(ξ)= 0

<u>Γεωμετρική ερμηνεία :</u>

Υπάρχει σημείο της Ξ(ξ,f(ξ)) της C_f με f(ξ)= 0Άρα Ξ(ξ,f(ξ))ϵX΄X

Η C_f τέμνει τον άξονα Χ΄Χ

Το θεώρημα της μέσης τιμής



Αν: $\begin{cases} \text{I) f συνεχής στο κλειστό διάστημα } [\alpha,\beta] \\ \text{II) f παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα } (\alpha,\beta) \end{cases}$

Τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

<u>Γεωμετρική ερμηνεία :</u>

Αν (ε) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο επαφής Ξ(ξ,f(ξ)) τότε θα ισχύει $\lambda_\varepsilon = f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

Η ευθεία ΑΒ έχει στντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{AB} =\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

Άρα η εφαπτομένη της C_f στο σημείο επαφής Ξ(ξ,f(ξ)) είναι παράλληλη με την ευθεία ΑΒ γιατί $\lambda_\varepsilon= \lambda_{AB}$

Υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη στη C_f να είναι παράλληλη με την ευθεία ΑΒ

ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΩΝ ΕΝΔΙΑΜΕΣΩΝ ΤΙΜΩΝ
Αν : $\begin{cases} \text{I) Η f συνεχής στο κλειστό διάστημα } [\alpha,\beta] \\ \text{II) } f(\alpha) \neq f(\beta) \end{cases}$ Τότε για κάθε αριθμό κ μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=\kappa$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1.

Έστω η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ καιοι αριθμοί $0<\alpha<\beta$ ώστε $f(\alpha)=\beta$, $f(\beta)= \alpha$ και $f(\alpha+\beta)=0$Να δείξετε ότι: I)υπάρχει $x_o \in (\alpha,\beta)$ ώστε $f(x_o)= x_o$ II) υπάρχουν $\xi_1,\xi_2 \in (\alpha,\beta)$με$\xi_1<\xi_2$ ώστε $f'(\xi_1)\, f'(\xi_2)=1$ III)η εξίσωση $f''(x)=0$ έχει λύση στο $(\alpha,\alpha+\beta)$

I)Θεωρώ τη συνάρτηση $g(x)= f(x)-x$

$g(\alpha)= f(\alpha)-\alpha=\beta-\alpha$

$g(\beta)= f(\beta)-\beta=\alpha-\beta$

$g(\alpha)\, g(\beta)= (\beta-\alpha)(\alpha-\beta)= (\beta-\alpha) [-(\beta- \alpha)]=-(\beta- \alpha)^2<0$

($\alpha\neq\beta$ή $\alpha-\beta \neq 0$ή $(\alpha-\beta)^2>0$ή$-(\alpha-\beta)^2<0$)

Επειδή η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη θα είναι και συνεχής.Οπότε η g είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων

Οπότε: $\begin{cases} \text{I) g συνεχής στο } [\alpha,\beta] \\ \text{II) } g(\alpha)\bullet f(\beta) <0 \end{cases}$

Άρα η συνάρτηση g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του Bolzano στο κλειστό διάστημα [α,β]Οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $g(x_o)= 0$

$$\left.\begin{matrix} g(\xi)= 0 \\ x_o \in (\alpha,\beta) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} f(x_o) -x_o= 0 \\ x_o \in (\alpha,\beta) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} f(x_o) =x_o \\ x_o \in (\alpha,\beta) \end{matrix}\right\}$$

II)

$$\left.\begin{matrix} \text{I) f συνεχής στο κλειστό διάστημα } [\alpha, x_o] \text{ (ως παραγωγίσιμη)} \\ \text{II) f παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα } (\alpha,x_o) \end{matrix}\right\}$$

Οπότε η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής στο κλειστό διάστημα $[α,x_o]$.Άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $ξ_1 \in (α, x_o)$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$f΄(ξ_1) = \frac{f(x_o) - f(α)}{x_o - α}$$

$$f΄(ξ_1) = \frac{f(x_o) - f(α)}{x_o - α} = \frac{x_o - β}{x_o - α}$$

I) f συνεχής στο κλειστό διάστημα $[x_o,β]$ (ως παραγωγίσιμη)

II) f παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα $(x_o,β)$

Οπότε η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής στο κλειστό διάστημα $[x_o,β]$.Άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $ξ_2 \in (x_o,β)$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$f΄(ξ_2) = \frac{f(β) - f(x_o)}{β - x_o}$$

$$f΄(ξ_2) = \frac{f(β) - f(x_o)}{β - x_o} = \frac{α - x_o}{x_o - α} = \frac{x_o - β}{x_o - α}$$

$$f΄(ξ_1)\, f΄(ξ_2) = \frac{x_o - β}{x_o - α} \cdot \frac{x_o - α}{x_o - β} = 1$$

III)

I) f συνεχής στο κλειστό διάστημα $[α, β]$ (ως παραγωγίσιμη)

II) f παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα $(α,β)$

Οπότε η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής στο κλειστό διάστημα $[α,β]$.Άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $ξ_3 \in (α, β)$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$f'(\xi_3) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

$$f'(\xi_3) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{\alpha - \beta}{\beta - \alpha} = \frac{-(\beta - \alpha)}{\beta - \alpha} = -1$$

I) f συνεχής στο κλειστό διάστημα [β, α+β] (ως παραγωγίσιμη)

II) f παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (β,α+β)

Οπότε η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής στο κλειστό διάστημα [β,α+β].Άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_3 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$f'(\xi_4) = \frac{f(\alpha+\beta) - f(\beta)}{\alpha+\beta - \alpha}$$

$$f'(\xi_4) = \frac{f(\alpha+\beta) - f(\beta)}{\alpha+\beta-\alpha} = \frac{0-\beta}{\beta} = \frac{-\beta}{\beta} = -1$$

Οπότε $f'(\xi_3) = f'(\xi_4)$

I) f΄ συνεχής στο κλειστό διάστημα$[\xi_3, \xi_4]$ ως παραγωγίσιμη
II) f΄ παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα(ξ_3, ξ_4)
III) $f'(\xi_3) = f'(\xi_4)$

Οπότε η συνάρτηση f΄ ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο κλειστό διάστημα $[\xi_3, \xi_4]$.Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\xi_3, \xi_4)$ τετοιο ώστε να ισχύει $f''(\xi) = 0$

2.

Έστω η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 1, f(1) = 2$ και $f(2) = 7$
α)Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = 4$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο (0,2)
II)Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε για την συνάρτηση $g(x) = \alpha x^2 + \beta x + f(x)$ να ισχύουν οι προυποθέσεις του Rolle στα διαστήματα [0,1] και [1,2]
III)Να αποδείξετε ότι εξίσωση $f''(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο (0,2)

I)

I) f συνεχής στο κλειστό διάστημα [0, 1] (ως παραγωγίσιμη)

II) f παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (0,1)

Οπότε η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής στο κλειστό διάστημα [0,1].Άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ_1 ∊(0, 1) τέτοιο ώστε να ισχύει

$$f'(\xi_1) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0}$$

$$f'(\xi_1) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = 2-1=1$$

I) f συνεχής στο κλειστό διάστημα [1, 2] (ως παραγωγίσιμη)

II) f παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (1,2)

Οπότε η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής στο κλειστό διάστημα [1,2].Άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ_2 ∊(1, 2) τέτοιο ώστε να ισχύει

$$f'(\xi_2) = \frac{f(2)-f(1)}{2-1}$$

$$f'(\xi_1) = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = 7-2=5$$

Έχω $0< \xi_1<1< \xi_2<2$.Οπότε $\xi_1< \xi_2$

I) f΄ συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\xi_1 ,\xi_2]$ (ως παραγωγίσιμη)

II) $1= f'(\xi_1)<4 <f'(\xi_2)=5$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμων υπάρχει ξ ∊$[\xi_1 , \xi_2]$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=4$

Έχω $1< \xi_1\leq\xi \leq\xi_2<2$ Οπότε ξ ∊(1, 2)

Άρα υπάρχει ξ ∊(1, 2) τέτοιο ώστε $f'(\xi)=4$

II)

H g είναι παραγωγίσιμη στο IR ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτησεων. H g είναι παραγωγίσιμη στο IR ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτησεων

H g για να ικανοποιεί το θεώρημα του Rolle στο κλειστό διάστημα [0,1] θα πρέπει να ισχύει:

I) g συνεχής στο κλειστό διάστημα[0, 1]

II) g παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα(0, 1)

III) g(0)= g(1)

$g(0)=g(1)\Leftrightarrow \alpha \bullet 0^2+\beta \bullet 0+f(0)=\alpha \bullet 1^2+\beta \bullet 1+f(1)\Leftrightarrow$
$1=\alpha+\beta+2\Leftrightarrow \alpha+\beta=1-2\Leftrightarrow \alpha+\beta=-1$

Η g για να ικανοποιεί το θεώρημα του Rolle στο κλειστό διάστημα [1,2] θα πρέπει να ισχύει:

I) g συνεχής στο κλειστό διάστημα[1, 2]
II) g παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα(1, 2)
III) g(1)= g(2)

$g(1)=g(2)\Leftrightarrow \alpha \bullet 1^2+\beta \bullet 1+f(1)=\alpha \bullet 2^2+\beta \bullet 2+f(2)\Leftrightarrow$
$\alpha+\beta+2=4\alpha+2\beta+7\Leftrightarrow 4\alpha+2\beta-\alpha-\beta=2-7\Leftrightarrow 3\alpha+\beta=-5$

$$\left.\begin{matrix}\alpha+\beta=-1\\ 3\alpha+\beta=-5\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{matrix}-\alpha-\beta=1\\ 3\alpha+\beta=-5\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{matrix}-\alpha-\beta=1\\ -\alpha-\beta+3\alpha+\beta=-5+1\end{matrix}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{matrix}-\alpha-\beta=1\\ 2\alpha=-4\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{matrix}\beta=-1-\alpha\\ \dfrac{2\alpha}{2}=\dfrac{-4}{2}\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{matrix}\beta=-1-(-2)\\ \alpha=-2\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{matrix}\beta=-1+2\\ \alpha=-2\end{matrix}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{matrix}\beta=1\\ \alpha=-2\end{matrix}\right\}$$

III)
I) g συνεχής στο κλειστό διάστημα[0, 1] ως παραγωγίσιμη
II) g΄ παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα(0, 1)
III) g(0)= g(1)

Οπότε η συνάρτηση g ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο κλειστό διάστημα [0, 1].Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον x_1є(0,1) τετοιο ώστε να ισχύει g΄(x_1)=0

I) g συνεχής στο κλειστό διάστημα[1, 2] ως παραγωγίσιμη
II) g παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα(1, 2)
III) g(1)= g(2)

Οπότε η συνάρτηση g ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο κλειστό διάστημα [1, 2].Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον x_2є(1,2) τετοιο ώστε να ισχύει g΄(x_2)=0

g΄(x)=(–2x^2+x+f(x))΄=(–2x^2)΄ +(x) ΄ +f΄(x)= –2 (x^2)΄+1 +f΄(x)=
=–2• 2x+1 +f΄(x)=–4x+1 +f΄(x)
Η g΄ είναι παραγωγίσιμη στο IR ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτησεων

Έχω 0< x_1<1< x_2<2Οπότε x_1< x_2
I) g΄ συνεχής στο κλειστό διάστημα[x_1, x_2] ως παραγωγίσιμη
II) g΄ παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα(x_1, x_2)
III) g΄ (x_1)= g(x_2)

Οπότε η συνάρτηση g΄ ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο κλειστό διάστημα [x_1, x_2].Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον x_0є(x_1, x_2) τετοιο ώστε να ισχύει g΄΄(x_0)=0
3.

Έστω η συνεχής συνάρτηση f:[α,β]→IR και ο αριθμός γє(α,β) ώστε f(α)< f(β)< f(γ).Να δείξετε ότι :
I)Η f δεν είναι «1-1»
II)Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) τότε η εξίσωση f΄(x)=0 έχει μια τουλάχιστον λύση στο (α,β)
III)Αν η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο [α,β] υπάρχει ένα τουλάχιστον ξє(α,β) τέτοιο ώστε f΄΄(ξ)<0

I)Έστω η f είναι «1-1»
Επειδή η f είναι συνεχής στο [α,β] θα είναι συνεχής στο [α,γ](Γιατί γє(α,β))
I) f συνεχής στο κλειστό διάστημα [α ,γ]

II) f(α)< f(β)< f(γ)

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμων υπάρχει x_0 є[α , γ] τέτοιο ώστε f(x_0)= f(β)
Επειδή f(x_0)= f(β) και η f είναι «1-1» θα έχω : x_0 =β(Άτοπο)(Γιατί α< x_0<γ<β ή x_0<β)
Άρα η f δεν είναι «1-1»
II)
I) f συνεχής στο κλειστό διάστημα[x_0, β]
II) f΄ παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα(x_0, β)
III) f(x_0)= f(β)

Οπότε η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο κλειστό διάστημα [x_0, β].Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον ρє(x_0,β) τετοιο ώστε να ισχύει f΄(ρ)=0
Έχω α< x_0<ρ<βή α< x_0<ρ<β
III)
I) f συνεχής στο κλειστό διάστημα [α, γ]

II) f παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,γ)

Οπότε η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής στο κλειστό διάστημα [α,γ].Άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ_1 є(α, γ) τέτοιο ώστε να ισχύει

$$f'(\xi_1) = \frac{f(\gamma) - f(\alpha)}{x_o - \alpha}$$

$$f'(\xi_1) = \frac{f(\gamma) - f(\alpha)}{x_o - \alpha} > 0$$

$$\left.\begin{matrix} f(\gamma) > f(\alpha) \\ \gamma > \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} f(\gamma) - f(\alpha) > 0 \\ \gamma - \alpha > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{f(\gamma) - f(\alpha)}{\gamma - \alpha} > 0$$

I) f συνεχής στο κλειστό διάστημα [γ, β]

II) f παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (γ,β)

Οπότε η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής στο κλειστό διάστημα [γ,β].Άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ_1 є(α, x_o) τέτοιο ώστε να ισχύει

$$f'(\xi_1) = \frac{f(\beta) - f(\gamma)}{\beta - \gamma}$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f(\gamma)}{\gamma - \alpha} < 0$$

$$\left.\begin{matrix} f(\beta) < f(\gamma) \\ \beta > \gamma \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} f(\beta) - f(\gamma) < 0 \\ \beta - \gamma > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{f(\beta) - f(\gamma)}{\beta - \gamma} < 0$$

Έχω : $\alpha < \xi_1 < \gamma < \xi_2 < \beta$Οπότε $\xi_1 < \xi_2$

I) f΄ συνεχής στο κλειστό διάστημα [ξ_1, ξ_2] (Ως παραγωγίσιμη)

II) f΄ παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (ξ_1, ξ_2)

Οπότε η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής στο κλειστό διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$.Άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ є(α, β) τέτοιο ώστε να ισχύει

$$f''(\xi) = \frac{f'(\xi_2) - f'(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} < 0$$

$$\left.\begin{aligned} f'(\xi_1) > 0 \\ f'(\xi_2) < 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} -f'(\xi_1) < 0 \\ f'(\xi_2) < 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f'(\xi_2) - f'(\xi_1) < 0$$

$$\left.\begin{aligned} f'(\xi_2) - f'(\xi_1) < 0 \\ \xi_2 > \xi_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} f'(\xi_2) - f'(\xi_1) < 0 \\ \xi_2 - \xi_1 > 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{f'(\xi_2) - f'(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} < 0$$

4.

Έστω f μια συνάρτηση δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα [α,β] για το οποίο ισχύουν f(α)= f(β), f΄(α)>0
Να αποδείξετε ότι:
Ι)υπάρχει ξє(α,β)τέτοιος ώστε f΄(ξ)=0
ΙΙ) υπάρχει γє(α,β)τέτοιος ώστε f΄΄(γ)<0
ΙΙΙ)αν επιπλέον είναι f΄(β)>0 υπάρχει x_oє(α,β) τέτοιος ώστε f΄΄ (x_o)=0

Ι) f συνεχής στο κλειστό διάστημα[α,β] ως παραγωγίσιμη
ΙΙ) f παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα(α,β)
ΙΙΙ) f(α)= f(β)

Οπότε η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο κλειστό διάστημα [α,β].Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον ξє(α,β) τετοιο ώστε να ισχύει f΄(ξ)=0

Ι) f΄ συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,ξ](ως παραγωγίσιμη)

ΙΙ) f΄ παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,ξ)

Οπότε η συνάρτηση f΄ ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής στο κλειστό διάστημα [α,ξ].Άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον γє(α,ξ) τέτοιο ώστε να ισχύει

$$f''(\gamma) = \frac{f'(\xi) - f'(\alpha)}{\xi - \alpha}$$

$$f''(\gamma) = \frac{f'(\xi) - f(\alpha)}{\xi - \alpha} = \frac{0 - f'(\alpha)}{\xi - \alpha} = -\frac{f(\alpha)}{\xi - \alpha} < 0$$

Γιατί:

$$(\xi > \alpha,\ f'(\alpha) > 0) ή (\xi - \alpha > 0,\ f'(\alpha) > 0) ή \frac{f'(\alpha)}{\xi - \alpha} < 0 ή - \frac{f'(\alpha)}{\xi - \alpha} < 0$$

ΙΙΙ)

I) f συνεχής στο κλειστό διάστημα [ξ,β](ως παραγωγίσιμη)

II) f παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (ξ,β)

Οπότε η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής στο κλειστό διάστημα [ξ,β].Άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον δє(ξ,β) τέτοιο ώστε να ισχύει

$$f''(\delta) = \frac{f'(\beta) - f'(\xi)}{\beta - \xi}$$

$$f''(\delta) = \frac{f'(\beta) - f'(\xi)}{\beta - \xi} = \frac{f'(\beta) - 0}{\beta - \xi} = \frac{f'(\beta)}{\xi - \alpha} > 0$$

Γιατί:

$(\beta>\xi,\ f'(\beta)>0)$ή$(\beta-\xi>0,\ f'(\beta)>0)$ή$\dfrac{f'(\alpha)}{\xi-\alpha}>0$

Επεισή $f''(\gamma)<0$ και $f''(\delta)>0$ θα έχω: $f''(\gamma)\,f''(\delta)<0$

Οπότε:
- I) f´´ συνεχής στο [γ,δ]
- II) $f''(\gamma)\bullet f''(\delta)<0$

Άρα η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του Bolzano στο κλειστό διάστημα [γ,δ]Οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον x_oє(γ,δ) τέτοιο ώστε $f''(x_o)= 0$

5.

Έστω δυο συναρτήσεις f,g δυο φορές παραγωγίσιμες στο διάστημα [0,2004] με:

$f'(2004)+g'(0)=f'(0)+g'(2004)$

Να αποδείξετε ότι :

I)υπάρχει x_oє(0,2004) τέτοιος ώστε $f'(x_o)= g'(x_o)$

II)υπάρχουν x_1,x_2є(0,2004) τέτοια ώστε $f''(x_1)=g''(x_2)$

$f''(2004)+g'(0)=f''(0)+g'(2004) \Leftrightarrow f''(2004)-g'(2004)=f''(0)-g'(0)(1)$

Θεωρώ τη συνάρτηση $h(x)=f'(x)-g'(x),$

Η *συνάρτηση* $f(x)-g(x)$ *είναι συνεχής στο* $[0,2004]$ *ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων Άρα η* h *είναι παραγωγίσιμη στο* $[0,2004]$ *ως διαφορά είναι παραγωγίσιμων συναρτήσεων*

$h'(x)=f''(x)-g'(x)\;\; x\in[0,2004]$

Ε*πειδή η* h *είναι παραγωγίσιμη στο* $[0,2004]$ *θα είναι και συνεχής*

$$\left.\begin{array}{l} h(0)=f'(0)-g'(0) \\ h(2004)=f'(20004)-g'(2004) \\ f'(2004)-g'(2004)=f''(0)-g'(0) \end{array}\right\} \Rightarrow h(0)=h(2004)$$

I) h συνεχής στο κλειστό διάστημα[0,2004] ως παραγωγίσιμη
II) h παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα(0,2004)
III) h(0)= h(2004)

Οπότε η συνάρτηση h ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο κλειστό διάστημα [0,2004].Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον x_oє(0,2004) τετοιο ώστε να ισχύει $h'(x_o)=0$
($h'(x_o)=0$με ξє(0,2004)) ή ($f''(x_o)-g''(x_o)=0$με x_oє(0,2004))ή
($f''(x_o)=g''(x_o)$με x_oє(0,2004))

II)

I) f΄ συνεχής στο κλειστό διάστημα [0,2004]

II) f΄ παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (0,2004)

Οπότε η συνάρτηση g΄ ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής στο κλειστό διάστημα [0,2004].Άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον x_2є(0,2004) τέτοιο ώστε να ισχύει

$$f''(x_1)=\frac{f'(2004)-f'(0)}{2004-0}=\frac{g'(2004)-g'(0)}{2004}$$

I) g΄ συνεχής στο κλειστό διάστημα [0,2004]

II) g΄ παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (0,2004)

Οπότε η συνάρτηση g΄ ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής στο κλειστό διάστημα [0,2004].Άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον x_2є(0,2004) τέτοιο ώστε να ισχύει

$$g''(x_2)=\frac{g'(2004)-g'(0)}{2004-0}=\frac{g'(2004)-g'(0)}{2004}$$

Άρα υπάρχουν $x_1,x_2 \in (0,2004)$ τέτοια ώστε $f''(x_1)=g''(x_2)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Έστω η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:IR \to IR$ καιοι αριθμοί $0<2\alpha<\beta$ ώστε $f(2\alpha)=\beta$, $f(\beta)= 2\alpha$ και $f(2\alpha+\beta)=0$Να δείξετε ότι:
I)υπάρχει $x_o \in (2\alpha,\beta)$ ώστε $f(x_o)= x_o$
II) υπάρχουν $\xi_1,\xi_2 \in (2\alpha,\beta)$με$\xi_1<\xi_2$ ώστε $f'(\xi_1)\, f'(\xi_2)=1$
III)η εξίσωση $f''(x)=0$ έχει λύση στο $(2\alpha,2\alpha+\beta)$

2.

Έστω η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:IR\to IR$ με $f(0)= 1$,$f(1)=3$ και $f(2)=8$
α)Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=4$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο $(0,2)$
II)Να βρείτε τους $\alpha,\beta \in IR$, ώστε για την συνάρτηση $g(x)=\alpha x^2+\beta x+f(x)$ να ισχύουν οι προυποθέσεις του Rolle στα διαστήματα $[0,1]$ και $[1,2]$
III)Να αποδείξετε ότι εξίσωση $f''(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο $(0,2)$

3.

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:[2\alpha,\beta]\to IR$ και ο αριθμός $\gamma \in (\alpha,\beta)$ ώστε $f(2\alpha)< f(\beta)< f(\gamma)$.Να δείξετε ότι :
I)Η f δεν είναι «1-1»
II)Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $(2\alpha,\beta)$ τότε η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(2\alpha,\beta)$
III)Αν η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[2\alpha,\beta]$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (2\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)<0$

4.

Έστω f μια συνάρτηση δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[2\alpha,\beta]$ για το οποίο ισχύουν $f(2\alpha)= f(\beta)$, $f'(2\alpha)>0$
Να αποδείξετε ότι:
I)υπάρχει $\xi \in (2\alpha,\beta)$τέτοιος ώστε $f'(\xi)=0$
II) υπάρχει $\gamma \in (2\alpha,\beta)$τέτοιος ώστε $f''(\gamma)<0$
III)αν επιπλέον είναι $f'(\beta)>0$ υπάρχει $x_o \in (2\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε $f''(x_o)=0$

5.

Έστω δυο συναρτήσεις f,g δυο φορές παραγωγίσιμες στο διάστημα $[0,20]$ με:
$f'(20)+g'(0)=f'(0)+g'(20)$
Να αποδείξετε ότι :
I)υπάρχει $x_o \in (0,20)$ τέτοιος ώστε $f''(x_o)= g''(x_o)$
II)υπάρχουν $x_1,x_2 \in (0,20)$ τέτοια ώστε $f''(x_1)=g''(x_2)$