ΠΑΡΑΓΩΓΗΣΙΜΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ

Κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση στο σημείο x_o είναι και συνεχής στο x_o

ΠΡΟΣΟΧΗ !!!

Το αντίστροφο δεν ισχύει δηλ. όλες οι συνεχείς συναρτήσεις δεν είναι παραγωγίσιμες π.χ. η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι συνεχής στο σημείο
$x_o = 0$ αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 0$. Πράγματι :

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x\ , & x \geq 0 \\ -x\ , & x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$$

$$\lambda(h) = \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h} = \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{f(h) - 0}{h} = \frac{f(h)}{h} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{f(h)}{h}, & h > 0 \\ \dfrac{f(h)}{h}, & h < 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{h}{h}, & h > 0 \\ \dfrac{-h}{h}, & h < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1\ , & h > 0 \\ -1\ , & h < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{h \to 0^-} \lambda(h) = -1 \neq 1 = \lim_{h \to 0^+} \lambda(h)$$

Άρα η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_o = 0$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1.

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_o να αποδείξετε ότι :

$$\lim_{x \to x_o} \frac{x f(x_o) - x_o f(x)}{x - x_o} = f(x_o) - x_o f'(x_o)$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_o θα είναι και συνεχής στο x_oΟπότε θα ισχύει :

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$$

$$\frac{x\,f(x_o)-x_o^2\,f(x)}{x-x_o}=\frac{x\,f(x_o)-x_o\,f(x)-x_o\,f(x_o)+x_o\,f(x_o)}{x-x_o}=$$

$$=\frac{x\,f(x_o)-x_o\,f(x_o)-x_o\,f(x)+x_o\,f(x_o)}{x-x_o}=$$

$$=\frac{f(x_o)(x-x_o)-x_o\,(f(x)-f(x_o))}{x-x_o}=$$

$$=\frac{f(x_o)(x-x_o)}{x-x_o}-\frac{x_o(f(x)-f(x_o))}{x-x_o}=$$

$$=f(x_o)-x_o\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=$$

$$\lim_{x\to x_o}\frac{x\,f(x_o)-x_o\,f(x)}{x-x_o}=$$

$$=\lim_{x\to x_o}\left[f(x_o)-x_o\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}\right]=$$

$$=f(x_o)-x_o\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=f(x_o)-x_o\,f'(x_o)$$

2.

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_o να αποδείξετε ότι :

$$\lim_{x\to x_o}\frac{x^2\,f(x_o)-x_o^2\,f(x)}{x-x_o}=2x_of(x_o)-x_o^2\,f'(x_o)$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_o θα είναι και συνεχής στο x_oΟπότε θα ισχύει :

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = f(x_o)$$

$$\frac{x^2 f(x_o) - x_o^2 f(x)}{x - x_o} = \frac{x^2 f(x_o) - x_o^2 f(x) - x_o^2 f(x_o) + x_o^2 f(x_o)}{x - x_o} =$$

$$= \frac{x^2 f(x_o) - x_o^2 f(x_o) - x_o^2 f(x) + x_o^2 f(x_o)}{x - x_o} =$$

$$= \frac{f(x_o)(x^2 - x_o^2) - x_o^2 (f(x) - f(x_o))}{x - x_o} =$$

$$= \frac{f(x_o)(x^2 - x_o^2)}{x - x_o} - \frac{x_o^2 (f(x) - f(x_o))}{x - x_o} =$$

$$= f(x_o) \frac{(x - x_o)(x + x_o)}{x - x_o} - x_o^2 \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} =$$

$$= f(x_o)(x + x_o) - x_o^2 \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$$

$$\lim_{x\to x_o} \frac{x^2 f(x_o) - x_o^2 f(x)}{x - x_o} =$$

$$= \lim_{x\to x_o} \left[f(x_o)(x + x_o) - x_o^2 \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}\right] =$$

$$= f(x_o) \lim_{x\to x_o} (x + x_o) - x_o^2 \lim_{x\to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} =$$

$$= 2x_o f(x_o) - x_o^2 f'(x_o)$$

3.

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_o να αποδείξετε ότι :

$$\lim_{x \to x_o} \frac{x^3 f(x_o) - x_o^3 f(x)}{x - x_o} = 3x_o^2 f(x_o) - x_o^3 f'(x_o)$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_o θα είναι και συνεχής στο x_oΟπότε θα ισχύει :

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$$

$$\frac{x^3 f(x_o) - x_o^3 f(x)}{x - x_o} = \frac{x^3 f(x_o) - x_o^3 f(x) - x_o^3 f(x_o) + x_o^3 f(x_o)}{x - x_o} =$$

$$= \frac{x^3 f(x_o) - x_o^3 f(x_o) - x_o^3 f(x) + x_o^3 f(x_o)}{x - x_o} =$$

$$= \frac{f(x_o)(x^3 - x_o^3) - x_o^3 (f(x) - f(x_o))}{x - x_o} =$$

$$= \frac{f(x_o)(x^3 - x_o^3)}{x - x_o} - \frac{x_o^3 (f(x) - f(x_o))}{x - x_o} =$$

$$= f(x_o) \frac{(x - x_o)(x^2 + x x_o + x_o^2)}{x - x_o} - x_o^3 \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} =$$

$$= f(x_o) (x^2 + x x_o + x_o^2) - x_o^3 \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$$

$$\lim_{x \to x_o} \frac{x^3 f(x_o) - x_o^3 f(x)}{x - x_o} =$$

$$= \lim_{x \to x_o} \left[f(x_o)(x^2 + x x_o + x_o^2) - x_o^3 \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \right] =$$

$$= f(x_o) \lim_{x \to x_o} (x^2 + x x_o + x_o^2) - x_o^3 \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} =$$

$$= 3x_o^2 f(x_o) - x_o^3 f'(x_o)$$

4.

Αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_o να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x)g(x_o) - f(x_o)g(x)}{x - x_o} = f'(x_o)g(x_o) - f(x_o)g'(x_o)$$

$$\lim_{x \to x_o} g(x) = g(x_o)$$

$$\frac{f(x)g(x_o) - f(x_o)g(x)}{x - x_o} = \frac{f(x)g(x_o) - f(x_o)g(x) - f(x_o)g(x_o) + f(x_o)g(x_o)}{x - x_o} =$$

$$= \frac{f(x)g(x_o) - f(x_o)g(x_o) - f(x_o)g(x) + f(x_o)g(x_o)}{x - x_o} =$$

$$= \frac{g(x_o)(f(x) - f(x_o)) - f(x_o)(g(x_o) - g(x_o))}{x - x_o} =$$

$$= \frac{g(x_o)(f(x) - f(x_o))}{x - x_o} - \frac{f(x_o)(g(x_o) - g(x_o))}{x - x_o} =$$

$$= g(x_o)\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} - f(x_o)\frac{g(x) - g(x_o)}{x - x_o}$$

$$\lim_{x\to x_o} \frac{f(x)g(x_o) - f(x_o)\, g(x)}{x - x_o} =$$

$$= \lim_{x\to x_o} \left[g(x_o) \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} - f(x_o) \frac{g(x) - g(x_o)}{x - x_o}\right] =$$

$$= g(x_o) \lim_{x\to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} - f(x_o) \lim_{x\to x_o} \frac{g(x) - g(x_o)}{x - x_o}] =$$

$$= f'(x_o)g(x_o) - f(x_o)\, g'(x_o)$$

5.

Αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_o να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x\to x_o} \frac{f^2(x)g(x_o) - f^2(x_o)\, g(x)}{x - x_o} = 2g(x_o)f(x_o)f'(x_o) - f^2(x_o)g'(x_o)$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_o θα είναι και συνεχής στο x_oΟπότε θα ισχύει :

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = f(x_o)$$

$$\frac{f^2(x)g(x_o) - f(^2x_o)\, g(x)}{x - x_o} = \frac{f^2(x)g(x_o) - f^2(x_o)g(x) - f^2(x_o)g(x_o) + f^2(x_o)g(x_o)}{x - x_o} =$$

$$= \frac{f^2(x)g(x_o) - f^2(x_o)g(x_o) - f^2(x_o)\, g(x) + f^2(x_o)g(x_o)}{x - x_o} =$$

$$= \frac{g(x_o)(f^2(x) - f^2(x_o)) - f^2(x_o)(g(x_o) - g(x_o))}{x - x_o} =$$

$$= \frac{g(x_o)(f(x) - f(x_o))(f(x) - f(x_o))}{x - x_o} - \frac{f^2(x_o)(g(x_o) - g(x_o))}{x - x_o} =$$

$$= g(x_o)\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}(f(x)-f(x_o)) - f^2(x_o)\,\frac{g(x)-g(x_o)}{x-x_o}$$

$$\lim_{x\to x_o}\frac{f^2(x)g(x_o)-f^2(x_o)g(x)}{x-x_o} =$$

$$= \lim_{x\to x_o}\left[g(x_o)\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}(f(x)+f(x_o)) - f^2(x_o)\,\frac{g(x)-g(x_o)}{x-x_o}\right]$$

$$= [g(x_o)\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}\lim_{x\to x_o}(f(x)+f(x_o)) - f^2(x_o)\lim_{x\to x_o}\frac{g(x)-g(x_o)}{x-x_o} =$$

$$= 2g(x_o)f(x_o)f'(x_o) - f^2(x_o)g'(x_o)$$

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

1.

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_o να αποδείξετε ότι :

$$\lim_{x\to x_o}\frac{-x\,f(x_o)+x_o\,f(x)}{x-x_o} = -f(x_o)+x_of'(x_o)$$

2.

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_o να αποδείξετε ότι :

$$\lim_{x\to x_o}\frac{-x^2\,f(x_o)+x_o^2\,f(x)}{x-x_o} = -2x_of(x_o)+x_o^2\,f'(x_o)$$

3.

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_o να αποδείξετε ότι :

$$\lim_{x\to x_o}\frac{-x^3\,f(x_o)+x_o^3f(x)}{x-x_o} = -3x_o^2f(x_o)+x_o^3\,f'(x_o)$$

4.

Αν οι συνάρτησεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_o να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x\to x_o}\frac{-f(x)g(x_o) + f(x_o)\,g(x)}{x-x_o} = -f'(x_o)g(x_o) + f(x_o)\,g'(x_o)$$

5.

Αν οι συνάρτησεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_o να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x\to x_o}\frac{-f^2(x)g(x_o) + f^2(x_o)\,g(x)}{x-x_o} = -2g(x_o)f(x_o)f'(x_o) + f^2(x_o)g'(x_o)$$

6.

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_o να αποδείξετε ότι :

$$\lim_{x\to x_o}\frac{x\,2f(x_o) - x_o\,f(x)}{x-x_o} = 2f(x_o) - 2x_of'(x_o)$$

7.

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_o να αποδείξετε ότι :

$$\lim_{x\to x_o}\frac{2x^2\,f(x_o) - 2x_o^2\,f(x)}{x-x_o} = 4x_of(x_o) - 2x_o^2\,f'(x_o)$$

8.

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_o να αποδείξετε ότι :

$$\lim_{x\to x_o}\frac{2x^3f(x_o) - 2x_o^3f(x)}{x-x_o} = 6x_o^2f(x_o) - 3x_o^3f'(x_o)$$

9.

Αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_o να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x\to x_o}\frac{2f(x)g(x_o) - 2f(x_o)\,g(x)}{x-x_o} = 2f'(x_o)g(x_o) - 2f(x_o)\,g'(x_o)$$

10.

Αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_o να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x\to x_o}\frac{4f^2(x)g(x_o) - 4f^2(x_o)\,g(x)}{x-x_o} = 8g(x_o)f(x_o)f'(x_o) - 4f^2(x_o)g'(x_o)$$