Η ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΤΗΣ C_f $(\mathrm{N}_0 2)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1.

(I) $\Delta ίνεται\ η\ συνάρτηση\ f(x)=-x^2$. $\mathrm{N}α\ αποδείξετε\ οτι\ εφαπτομένες$ $της\ C_f\ που\ διέρχονται\ απο\ το\ σημείο\ \mathrm{A}(1,0)\ είναι\ ο\ άξονας\ x'x\ και$ $η\ ευθεία\ (\varepsilon): y=-4x+4$

(II) $\Delta ίνεται\ η\ συνάρτηση\ g(x)=a\ln x+\beta x^2, x>0$. $\mathrm{N}α\ βρεθούν\ τα\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$ $ώστε\ η\ ευθεία\ (\varepsilon): y=-4x+4\ να\ εφάπτεται\ της\ C_g\ στο\ σημείο\ με$ $τετμημένη\ x_0=1$

$(\mathrm{I})\ f'(x)=\left(-x^2\right)' \overset{(cF(x))'=cF'(x),c:\Sigma ταθερά}{=} -\left(x^2\right)' \overset{\left(x^a\right)'=ax^{a-1}}{=} -2x=-2x$

$f'(x)=-2x, x\in\mathbb{R}$

$\mathrm{A}ν\ (\varepsilon)\ η\ εφαπτομένη\ της\ C_f\ στο\ σημείο\ επαφής\ \mathrm{M}\left(x_0, f(x_0)\right) με\ (\varepsilon)\not\parallel y'y$ $και\ \mathrm{A}(1,0)\in(\varepsilon)$. $\mathrm{T}ότε\ ο\ συντελεστής\ διεύθυνσης\ της\ (\varepsilon)\ θα\ είναι:$

$\lambda=f'(x_0)=-2x_0$

$\mathrm{H}\ εξίσωση\ της\ ευθείας\ (\varepsilon)\ θα\ έχει\ την\ μορφή:$

$y=\lambda x+\kappa \overset{\lambda=-2x_0}{\Leftrightarrow} y=-2x_0x+\kappa$

$(\varepsilon): y=-2x_0x+\kappa$

$Έχω: f(x_0)=-x_0{}^2$

$\mathrm{M}\left(x_0, f(x_0)\right)\in(\varepsilon)\Leftrightarrow \mathrm{A}\left(x_0,-x_0{}^2\right)\in(\varepsilon) \overset{(\varepsilon):y=-x_0x+\kappa}{\Leftrightarrow} -x_0{}^2=-2x_0x_0+\kappa\Leftrightarrow$

$\kappa=-x_0{}^2+2x_0{}^2\Leftrightarrow\kappa=x_0{}^2$

$\mathrm{T}ότε\ η\ εξίσωση\ της\ ευθείας\ (\varepsilon)\ θα\ είναι:$

$y=-2x_0x+\kappa \overset{\kappa=x_0{}^2}{\Leftrightarrow} y=-2x_0x+x_0{}^2$

$(\varepsilon): y=-2x_0x+x_0{}^2$

$\mathrm{A}(1,0)\in(\varepsilon) \overset{(\varepsilon):y=-2x_0x+x_0{}^2}{\Leftrightarrow} 0=-2x_0\bullet 1+x_0{}^2\Leftrightarrow x_0{}^2-2x_0=0\Leftrightarrow x_0(x_0-2)=0\Leftrightarrow$

$$\left\{\begin{matrix} x_0 = 0 \\ \acute{\eta} \\ x_0 - 2 = 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x_0 = 0 \\ \acute{\eta} \\ x_0 = 2 \end{matrix}\right\}$$

$\mathrm{A}\nu\ x_0 = 0\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \eta\ \varepsilon\upsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\alpha\ (\varepsilon)\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\varepsilon\iota\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta:$

$$y = -2x_0x + {x_0}^2 \overset{x_0=0}{\Longleftrightarrow} y = -2 \bullet 0 \bullet x + 0^2 \Leftrightarrow y = 0$$

$\Delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta}\ \alpha\nu\ x_0 = 0\ \eta\ \varepsilon\upsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\alpha\ (\varepsilon)\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ o\ \acute{\alpha}\xi o\nu\alpha\varsigma\ x'x$

$\mathrm{A}\nu\ x_0 = 2\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \eta\ \varepsilon\upsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\alpha\ (\varepsilon)\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\varepsilon\iota\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta:$

$$y = -2x_0x + {x_0}^2 \overset{x_0=2}{\Longleftrightarrow} y = -2 \bullet 2 \bullet x + 2^2 \Leftrightarrow y = -4x + 4$$

(II)

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{H}\ \varepsilon\upsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\alpha\ (\varepsilon)\ \varepsilon\varphi\acute{\alpha}\pi\tau\varepsilon\tau\alpha\iota\ \tau\eta\varsigma\ C_f\ \sigma\tau o\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\ \mathrm{A}\left(x_0, f(x_0)\right) \acute{o}\tau\alpha\nu: \\ \left\{\begin{array}{l} f'(x_0) = \mathrm{O}\ \sigma\upsilon\nu\tau\varepsilon\lambda\varepsilon\sigma\tau\acute{\eta}\varsigma\ \delta\iota\varepsilon\acute{\upsilon}\theta\upsilon\nu\sigma\eta\varsigma\ \tau\eta\varsigma\ (\varepsilon) \\ \mathrm{A}\left(x_0, f(x_0)\right) \in (\varepsilon) \end{array}\right\} \end{array}}$$

$$g'(x) = \left(a\ln x + \beta x^2\right)' \overset{\left(F(x)+G(x)\right)'=F'(x)+G'(x)}{=} \left(a\ln x\right)' + \left(\beta x^2\right)' \overset{\left(cF(x)\right)'=cF'(x), c:\Sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}}{=}$$

$$a\left(\ln x\right)' + \beta\left(x^2\right)' \overset{\substack{(\ln x)'=\frac{1}{x}, x>0 \\ \left(x^a\right)'=ax^{a-1}}}{=} a\frac{1}{x} + \beta \bullet 2x = \frac{a}{x} + 2\beta x$$

$$g'(x) = \frac{a}{x} + 2\beta x, x > 0$$

$\mathrm{H}\ \varepsilon\upsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\alpha\ (\varepsilon): y = -4x + 4\ \varepsilon\varphi\acute{\alpha}\pi\tau\varepsilon\tau\alpha\iota\ \tau\eta\varsigma\ C_g\ \sigma\tau o\ \sigma\tau o\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\ \mu\varepsilon\ \tau\varepsilon\tau\mu\eta\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta$ $x_0 = 1.\ \mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\left\{\begin{array}{l} g'(x_0) = \lambda_\varepsilon \\ \mathrm{A}\left(x_0, g(x_0)\right) \in (\varepsilon) \end{array}\right\} \overset{x_0=1}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} g'(1) = -4 \\ \mathrm{A}\left(1, g(1)\right) \in (\varepsilon) \end{array}\right\} \overset{(\varepsilon): y=-4x+4}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} g'(1) = -4 \\ g(1) = -4 \bullet 1 + 4 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left(g'(1) = \frac{a}{1} + 2\beta \bullet 1 = \alpha + 2\beta, g(1) = a\ln 1 + \beta \bullet 1^2 \overset{\ln 1}{=} \alpha \bullet 0 + \beta = \beta\right)$$

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha + 2\beta = -1 \\ \beta = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha + 2 \bullet 0 = -1 \\ \beta = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = -1 \\ \beta = 0 \end{array}\right\}$$

2.

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει:

$x^2 + xf^3(x) + f^2(x) = 3 \quad (*)$

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο επαφής $\mathrm{A}(1, f(1))$

Θέτω $x = 1$ στην σχέση $(*)$:

$$1^2 + 1 \bullet f^3(1) + f^2(1) = 3 \Leftrightarrow 1 + f^3(1) + f^2(1) - 3 = 0 \Leftrightarrow f^3(1) + f^2(1) - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$f^3(1) - 1^3 + f^2(1) - 1^2 = 0 \quad \overset{\substack{\alpha^2-\beta^2=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta) \\ \alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\underbrace{\left[f(1)-1\right]\left[f^2(1)+f(1)\bullet 1+1^2\right]+\left[f(1)-1\right]\left[f(1)+1\right]}_{\text{Βγάζω κοινό παράγοντα το } f(1)-1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left[f(1)-1\right]\left[f^2(1)+f(1)+1+f(1)+1\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left[f(1)-1\right]\left[f^2(1)+2f(1)+1+1\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left[f(1)-1\right]\left[\underbrace{f^2(1)+2\bullet f(1)\bullet 1+1^2}_{\alpha^2+2\bullet\alpha\bullet\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2}+1\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left[f(1)-1\right]\left[\left(f(1)+1\right)^2+1\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left[\left(f(1)+1\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \left(f(1)+1\right)^2+1 \geq 1 > 0 \Rightarrow \left(f(1)+1\right)^2+1 > 0 \Rightarrow \left(f(1)+1\right)^2+1 \neq 0\right]$$

$$f(1) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(1) = 1$$

$$x^2 + xf^3(x) + f^2(x) = 3 \quad \overset{\substack{\left.\begin{matrix} f(x)=g(x) \\ f,g:\text{Παραγωγίσιμες}\end{matrix}\right\}\Rightarrow f'(x)=g'(x) \\ \text{Προσοχή ισχύει η συνεπαγωγή και} \\ \text{όχι η ισοδυναμία!!!}}}{\Longrightarrow} \quad \left(x^2 + xf^3(x) + f^2(x)\right)' = (3)'$$

$$\overset{\substack{\left(F(x)+G(x)+H(x)\right)'=F'(x)+G'(x)+H'(x) \\ (c)'=0, c:\text{Σταθερά}}}{\Longrightarrow} \quad \left(x^2\right)' + \left(xf^3(x)\right)' + \left(f^2(x)\right)' = 0 \quad \overset{\substack{\left(F(x)G(x)\right)'=F'(x)G(x)+F(x)G'(x) \\ (x)'=1 \\ \left(x^a\right)'=ax^{a-1} \\ \left(F^a(x)\right)'=aF^{a-1}(x)F'(x)}}{\Longrightarrow}$$

$$2x + (x)' f^3(x) + x\left(f^3(x)\right)' + 2f(x)f'(x) = 0 \Rightarrow$$

$$2x + f^3(x) + 3xf^2(x)f'(x) + 2f(x)f'(x) = 0 \overset{\text{Θέτω } x=1}{\Longrightarrow}$$

$$2 \bullet 1 + f^3(1) + 3 \bullet 1 \bullet f^2(1) f'(1) + 2f(1)f'(1) = 0 \Rightarrow$$

$$2+f^3(1)+3f^2(1)\,f'(1)+2f(1)\,f'(1)=0\xrightarrow{f(1)=1}2+1^3+3\bullet 1^2\bullet f'(1)+2\bullet 1\bullet f'(1)=0$$

$$\Rightarrow 3+5f'(1)=0\Rightarrow 5f'(1)=-3\Rightarrow 5\Rightarrow\; f'(1)=-\frac{3}{5}$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=1$

υπάρχει εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο επαφής $\mathrm{A}(1,f(1))$ με $(\varepsilon)\nparallel y'y$

Τότε ο συντελεστής διεύθυνσης λ της (ε) θα είναι $\lambda=f'(x_0)=f'(1)=-\frac{3}{5}$

Η εξίσωση της ευθείας (ε) θα έχει την μορφή:

$$y=\lambda x+\kappa\overset{\lambda=-\frac{3}{5}}{\Longleftrightarrow}y=-\frac{3}{5}x+\kappa$$

$$(\varepsilon):y=-\frac{3}{5}x+\kappa$$

$$\mathrm{A}(1,f(1))\in(\varepsilon)\overset{f(1)=1}{\Longleftrightarrow}\mathrm{A}(1,1)\in(\varepsilon)\overset{(\varepsilon):y=-\frac{3}{5}x+\kappa}{\Longleftrightarrow}1=-\frac{3}{5}\bullet 1+\kappa\Leftrightarrow\kappa=1+\frac{3}{5}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\kappa=\frac{5}{5}+\frac{3}{5}\Leftrightarrow\kappa=\frac{8}{5}$$

Τότε η εξίσωση της ευθείας (ε) θα είναι:

$$y=-\frac{3}{5}x+\kappa\overset{\kappa=\frac{8}{5}}{\Longleftrightarrow}y=-\frac{3}{5}x+\frac{8}{5}\Leftrightarrow y=\frac{-3x+8}{5}$$

3.

Έστω η συνάρτηση f τέτοια ώστε για κάθε $x>\frac{1}{e}$ να ισχύει:

$$x^{f(x)}=e^{x-f(x)}$$

(I) Να αποδείξετε οτι $f(x)=\dfrac{x}{1+\ln x},\; x>\dfrac{1}{e}$

(II) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο με τετμημένη $x_0=e$

(III) Να αποδείξετε οτι δεν υπάρχει εφαπτομένη της C_f που να είναι κάθετη με την ευθεία $(\eta): y=-x+2017$

$$(\mathrm{I})\, x^{f(x)} = e^{x-f(x)} \Leftrightarrow \ln x^{f(x)} = \ln e^{x-f(x)} \overset{\ln\theta^{\kappa}=\kappa\ln\theta,\theta>0}{\Longleftrightarrow} f(x)\ln x = (x-f(x))\ln e \overset{\ln e=1}{\Longleftrightarrow}$$

$$f(x)\ln x = (x-f(x))\bullet 1 \Leftrightarrow f(x)\ln x = x - f(x) \Leftrightarrow f(x)\ln x + f(x) = x \Leftrightarrow$$

$$[\ln x + 1]\, f(x) = x \Leftrightarrow f(x) = \frac{x}{\ln x + 1}$$

$$\left(\begin{array}{l} x > \dfrac{1}{e} \Rightarrow \ln x > \ln \dfrac{1}{e} \overset{a^{-1}=\frac{1}{a},a\neq 0}{\Longrightarrow} \ln x > \ln e^{-1} \overset{\ln\theta^{\kappa}=\kappa\ln\theta,\theta>0}{\Longrightarrow} \ln x > -\ln e \overset{\ln e=1}{\Longrightarrow} \ln x > -1 \Rightarrow \\ \ln x + 1 > 0 \Rightarrow \ln x + 1 \neq 0 \end{array} \right)$$

$$(\mathrm{II})\, f'(x) = \left(\frac{x}{\ln x+1}\right)' \overset{\left(\frac{F(x)}{G(x)}\right)' = \frac{F'(x)G(x)-F(x)G'(x)}{G^2(x)}}{=} \frac{(x)'(\ln x+1) - x(\ln x+1)'}{(\ln x+1)^2} =$$

$$\overset{\begin{array}{l}(x)'=1 \\ (\ln x)'=\frac{1}{x},x>0 \\ (F(x)+G(x))'=F'(x)+G'(x) \\ (c)'=0,c:\Sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}\end{array}}{=} \frac{1\bullet(\ln x+1) - x\left[(\ln x)' + (1)'\right]}{(\ln x+1)^2} = \frac{\ln x + 1 - x\frac{1}{x}}{(\ln x+1)^2} = \frac{\ln x}{(\ln x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\ln x}{(\ln x+1)^2},\, x > \frac{1}{e}$$

$$\acute{E}\chi\omega : e > \frac{1}{e} \overset{e>0}{\Longleftrightarrow} ee > e\frac{1}{e} \Leftrightarrow e^2 > 1 \Leftrightarrow \sqrt{e^2} > \sqrt{1} \overset{\sqrt{x^2}=|x|}{\Longleftrightarrow} |e| > 1 \overset{\begin{array}{l}\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ e>0\ \theta\alpha \\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ |e|=e\end{array}}{\Longleftrightarrow} e > 1\,(\mathrm{I}\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota)$$

$$f'(e) = \frac{\ln e}{(\ln e+1)^2} \overset{\ln e=1}{=} \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4}$$

$$f(e) = \frac{e}{\ln e + 1} \overset{\ln e=1}{=} \frac{e}{1+1} = \frac{e}{2}$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = e$

υπάρχει η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο επαφής $\mathrm{A}(e, f(e))$ με $(\varepsilon) \not\parallel y'y$

Τότε ο συντελεστής διεύθυνσης λ της (ε) θα είναι $\lambda = f'(x_0) = f'(e) = \frac{1}{4}$

Η εξίσωση της ευθείας (ε) θα έχει την μορφή:

$$y = \lambda x + \kappa \overset{\lambda=\frac{1}{4}}{\Longleftrightarrow} y = \frac{1}{4}x + \kappa$$

$(\varepsilon): y=\frac{1}{4}x+\kappa$

$\mathrm{A}(e, f(e)) \in (\varepsilon) \overset{f(e)=\frac{e}{2}}{\Leftrightarrow} \mathrm{A}\left(e, \frac{e}{2}\right) \in (\varepsilon) \overset{(\varepsilon): y=\frac{1}{4}x+\kappa}{\Leftrightarrow} \frac{e}{2}=\frac{1}{4} \bullet e+\kappa \Leftrightarrow \kappa=\frac{e}{2}-\frac{e}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \kappa=\frac{2e}{4}-\frac{e}{4} \Leftrightarrow \kappa=\frac{e}{4}$

Τότε η εξίσωση της ευθείας (ε) θα είναι:

$y=\frac{1}{4}x+\kappa \overset{\kappa=\frac{e}{4}}{\Leftrightarrow} y=\frac{x}{4}+\frac{e}{4} \Leftrightarrow y=\frac{x+e}{4}$

(III) Έστω υπάχει εφαπτομένη (l) της C_f στο σημείο επαφής $\mathrm{A}(x_1, f(x_1))$, $x_1>\frac{1}{e}$ με $(l) \not\parallel y'y$ και $(l) \perp (\eta)$. Επειδή η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_1 θα έχω:

$\lambda_l=f'(x_1) \Leftrightarrow \lambda_l=\frac{\ln x_1}{(\ln x_1+1)^2}$

$(\eta): y=-1 \bullet x+2017$

Οπότε: $\lambda_\eta=-1$

$(l) \perp (\eta) \Leftrightarrow \lambda_l \lambda_\eta=-1 \Leftrightarrow \frac{\ln x_1}{(\ln x_1+1)^2}(-1)=-1 \Leftrightarrow (\ln x_1+1)^2=\ln x_1 \Leftrightarrow$

$\ln^2 x_1+2\ln x_1+1-\ln x_1=0 \Leftrightarrow (\ln x_1)^2+\ln x_1+1=0$

Θέτω: $t=\ln x_1$

Τότε θα έχω:

$t^2+t+1=0 \; (1)$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=1^2-4 \bullet 1 \bullet 1=1-4=-3<0$

Επειδή $\Delta<0$ η δευτεροβάθμια εξίσωση (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Οπότε δεν υπάρχει $x_1>\frac{1}{e}$ που να ικανοποιεί την σχέση $(\ln x_1)^2+\ln x_1+1=0$

Συνεπώς δεν υπάρχει εφαπτομένη της C_f που να είναι κάθετη με την ευθεία (η)

4.

$$\Delta\acute{\iota}\nu\varepsilon\tau\alpha\iota\ \eta\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f(x)=x^2+\frac{2a}{x}+\beta, x\neq 0.\text{N}\alpha\ \beta\rho\varepsilon\theta o\acute{\upsilon}\nu\ \tau\alpha\ \alpha,\beta\ \acute{o}\tau\alpha\nu$$

η εφαπτομένη της C_f *στο σημείο* $x_1=2$ *να είναι ο άξονας* $x'x$.

$$f'(x)=\left(x^2+\frac{2a}{x}+\beta\right)' \overset{\substack{(F(x)+G(x)+H(x))'=F'(x)+G'(x)+H'(x)\\ a^{-1}=\frac{1}{a},a\neq 0}}{=} (x^2)'+(2ax^{-1})'+(\beta)'$$

$$\overset{\substack{(x^a)'=ax^{a-1}\\ (cF(x))'=cF'(x),c:\Sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}\\ (c)'=0,c:\Sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}}}{=} 2x+2a(x^{-1})'=2x+2a(-1)x^{-2} \overset{a^{-\nu}=\frac{1}{a^{\nu}},\alpha\neq 0}{=} 2x-2a\frac{1}{x^2}=2x-\frac{2a}{x^2}$$

$$\text{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon: f'(x)=2x-\frac{2a}{x^2}, x\neq 0$$

Η *ευθεία* (ε) *εφάπτεται της* C_f *στο σημείο* $\text{A}(x_0, f(x_0))$ *όταν*:

$$\left\{\begin{array}{l} f'(x_0)=\text{O}\ \sigma\upsilon\nu\tau\varepsilon\lambda\varepsilon\sigma\tau\acute{\eta}\varsigma\ \delta\iota\varepsilon\acute{\upsilon}\theta\upsilon\nu\sigma\eta\varsigma\ \tau\eta\varsigma\ (\varepsilon)\\ \text{A}(x_0, f(x_0))\in(\varepsilon)\end{array}\right\}$$

Ο *άξονας* $(x'x): y=0\bullet x+0$ *εφάπτεται της* C_f *στο σημείο με τετμημένη* $x_1=2$. Ο*πότε θα έχω*:

$$\left\{\begin{array}{l} f'(x_1)=\lambda_{x'x}\\ \text{A}(x_1, f(x_1))\in(x'x)\end{array}\right\} \overset{x_1=2}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} f'(2)=0\\ f(2)=0\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2\bullet 2-\frac{2a}{2^2}=0\\ 2^2+\frac{2a}{2}+\beta=0\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4-\frac{a}{2}=0\\ 2^2+\frac{2a}{2}+\beta=0\end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{a}{2}=4\\ 4+a+\beta=0\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=8\\ 4+8+\beta=0\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=8\\ 12+\beta=0\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=8\\ \beta=-12\end{array}\right\}$$

5.

Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *που ικανοποιεί τις σχέσεις*

$f(x)>0$ *για κάθε* $x\in\mathbb{R}, f(0)=2017, f'(0)=1, f(1)=e$

Θ*εωρούμε τη συνάρτηση* $g(x)=f(\ln x)+\ln f(x), x>0$

Α*ν η εφαπτομένη της* C_f *στο σημείο με τετμημένη* $x_0=1$ *είναι παράλληλη με τον άξονα* $x'x$ *να βρεθούν τα* $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ *ώστε η ευθεία* $(\varepsilon): y=ax+\beta$ *να εφάπτεται της* C_g *στο σημείο με τετμημένη* $x_0=1$

$$g'(x)=\left(f(\ln x)+\ln f(x)\right)' \overset{\left(F(x)+G(x)\right)'=F'(x)+G'(x)}{=} \left(f(\ln x)\right)'+\left(\ln f(x)\right)' \overset{\substack{\left[F(G(x))\right]'=F'(G(x))G'(x)\\ \left(\ln f(x)\right)'=\frac{f'(x)}{f(x)},\,f(x)>0}}{=}$$

$$f'(\ln x)(\ln x)'+\frac{f'(x)}{f(x)} \overset{(\ln x)'=\frac{1}{x},x>0}{=} f'(\ln x)\frac{1}{x}+\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{f'(\ln x)}{x}+\frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\text{Οπότε}: g'(x)=\frac{f'(\ln x)}{x}+\frac{f'(x)}{f(x)},\, x>0$$

Έστω (l) *εφαπτομένη της* C_f *στο σημείο επαφής* $\mathrm{A}\left(x_0, f(x_0)\right), x_0=1$ *με* $(l)\not\parallel y'y$ *και* $(l)//(x'x)$. Ε*πειδή η συνάρτηση* f *είναι παραγωγίσιμη στο σημείο* $x_0=1$ *θα έχω*:

$$\lambda_l=f'(x_0) \overset{x_0=1}{\Longleftrightarrow} \lambda_l=f'(1)$$

$$(x'x): y=0\bullet x+0$$

$$\text{Οπότε}: \lambda_{x'x}=0$$

$$(l)//(x'x) \Leftrightarrow \lambda_l=\lambda_{x'x} \Leftrightarrow f'(1)=0$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Η ευθεία } (\varepsilon) \text{ εφάπτεται της } C_f \text{ στο σημείο } \mathrm{A}\left(x_0, f(x_0)\right) \text{ όταν}:\\ \left\{\begin{array}{l} f'(x_0)=\text{Ο συντελεστής διεύθυνσης της } (\varepsilon)\\ \mathrm{A}\left(x_0, f(x_0)\right)\in(\varepsilon)\end{array}\right\}\end{array}}$$

Η *ευθεία* $(\varepsilon): y=\alpha x+\beta$ *εφάπτεται της* C_g *στο σημείο με τετμημένη* $x_0=1$. Ο*πότε θα έχω*:

$$\left\{\begin{array}{l} g'(x_0)=\lambda_\varepsilon\\ \mathrm{A}\left(x_0, g(x_0)\right)\in(\varepsilon)\end{array}\right\} \overset{x_0=1}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} g'(1)=\alpha\\ g(1)=\alpha\bullet 1+\beta\end{array}\right\} \overset{\substack{g(x)=f(\ln x)+\ln f(x),x>0\\ g'(x)=\frac{f'(\ln x)}{x}+\frac{f'(x)}{f(x)},x>0}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{f'(\ln 1)}{1}+\dfrac{f'(1)}{f(1)}=\alpha\\ f(\ln 1)+\ln f(1)=a+\beta\end{array}\right\} \overset{f'(0)=1,\,f'(1)=0,\,\ln 1=0}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} f'(0)+\dfrac{0}{f(1)}=\alpha\\ f(0)+\ln f(1)=a+\beta\end{array}\right\} \overset{f(0)=2017,\,f'(0)=1,\,f(1)=e}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha=1\\ 2017+\ln e=a+\beta\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha=1\\ 2017+\cancel{1}=\cancel{1}+\beta\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha=1\\ \beta=2017\end{array}\right\}$$

6.

$\text{Να } \textit{χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως } (\Sigma) \textit{ ή } (\Lambda)$ (I) Κάθε συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμου της (II) Αν η συνάρτηση $f(x)+g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 τότε και οι συναρτήσεις $f(x),g(x)$ είναι παραγωγίσιμες στο σημείο x_0 (III) Αν ρ ρητός και $x>0$ τότε ισχύει $\left(x^{\rho}\right)'=\rho x^{\rho-1}$ (IV) Αν $x\geq 0$ τότε ισχύει $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ (V) Αν οι συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ τότε ισχύει $\left[f\left(g(x)\right)\right]'=f'\left(g(x)\right)g(x)$

(I) Θεωρώ την συνάρτηση $f(x)=|x|$. Αν $x_0=0$ και $h\neq 0$ θεωρώ την συνάρτηση:

$$\lambda(h)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{f(h)-0}{h}=\frac{|h|}{h}$$

Αν $h>0$ θα έχω:

$$\lambda(h)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{|h|}{h}\overset{h>0\Rightarrow|h|=h}{=}\frac{h}{h}=1$$

Οπότε όταν $h>0$ έχω $\lambda(h)=1$

Αν $h<0$ θα έχω:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{|h|}{h}\overset{h<0\Rightarrow|h|=-h}{=}\frac{-h}{h}=-1$$

Οπότε όταν $h>0$ έχω $\lambda(h)=-1$

Για να υπάρχει το όριο της συνάρτησης $\lambda(h)$ όταν $h\to 0$ θα πρέπει όταν το h βρίσκεται πολύ κοντά στο 0 δηλαδή τείνει στο 0 οι αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης έχω $\lambda(h)$ να τείνουν στον ίδιο πάντα αριθμό!!!

Όταν το h βρίσκεται πολύ κοντά στο 0 και είναι θετικός αριθμός η συνάρτηση έχω $\lambda(h)$ παίρνει την τιμή 1 ένω όταν το h βρίσκεται πολύ κοντά στο 0 και είναι αρνητικός αριθμός η συνάρτηση

$\lambda(h)$ *παίρνει την τιμή* -1.*Συνεπώς δεν υπάρχει το όριο της συνάρτηση* $\lambda(h)$ *όταν* $h \to 0$.*Οπότε η συνάρτηση* $f(x)=|x|$ *δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο* $x_0=0$.*Άρα υπάρχουν συναρτήσεις που δεν είναι παραγωγίσιμες σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμου της.*

Συνεπώς $(\mathrm{I}) \to (\Lambda)$

(II) *Θεωρώ τις συναρτήσεις* $f(x)=x-|x|, g(x)=|x|$

Τότε θα έχω:

$f(x)+g(x)=x-|x|+|x|=x$

Συνεπώς η συνάρτηση $f(x)+g(x)$ *είναι παραγωγίσιμη στο σημείο* $x_0=0$ *ως πολυωνυμική. Γνωρίζω οτι συνάρτηση* $g(x)=|x|$ *δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο* $x_0=0$.

Έχω: $f(x)=x-|x| \overset{g(x)=|x|}{\Longleftrightarrow} f(x)=x-g(x) \Leftrightarrow g(x)=x-f(x)$

Έστω οτι η συνάρτηση f *είναι παραγωγίσιμη στο σημείο* $x_0=0$. *Τότε η συνάρτηση* $g(x)=x-f(x)$ *είναι παραγωγίσιμη στο σημείο* $x_0=0$ *ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων (Άτοπο).Συνεπώς η* f *δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο* $x_0=0$.*Οπότε μπορεί η συνάρτηση* $f(x)+g(x)$ *είναι παραγωγίσιμη στο σημείο* x_0 *χωρίς να είναι παραγωγίσιμες στο* x_0 *οι συναρτήσεις* f *και* g.*Οπότε* $(\mathrm{II}) \to (\Lambda)$

(III) *Αν* ρ *ρητός και* $x>0$ *τότε ισχύει* $\left(x^{\rho}\right)'=\rho x^{\rho-1}$

Συνεπώς $(\mathrm{III}) \to (\Sigma)$

(IV) *Αν* $x>0$ *τότε ισχύει* $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Η παράπανω ισότητα δεν ισχύει για $x=0$!!!*Οπότε* $(\mathrm{IV}) \to (\Lambda)$

(V) *Αν οι συναρτήσεις* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *είναι παραγωγίσιμες στο* $\mathbb{R}$ *τότε ισχύει* $\left[f\left(g(x)\right)\right]'=f'\left(g(x)\right)g'(x)$.*Οπότε* $(\mathrm{IV}) \to (\Lambda)$

ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ

1.

Να αποδείξετε οτι $(c)'=0$ *όπου c ένας σταθερός πραγματικός αριθμός*

$\Theta\varepsilon\omega\rho\acute{\omega}\ \tau\eta\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f\left(x\right)=c$ *όπου* c *ένας σταθερός πραγματικός αριθμός*

Αν $h\neq 0$ *θα έχω*:

$$\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}\overset{\substack{\text{Ότι και να "βάλω μέσα στην } f\text{"}\\ \text{πάντα παίρνω } c}}{=}\frac{c-c}{h}=\frac{0}{h}=0$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}=\lim_{h\to 0}0=0$$

Επειδή υπάρχει το $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}$ και είναι πραγματικός αριθιμός

η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x και ισχύει:

$$f'\left(x\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)-f\left(h\right)}{h}=0$$

$$\left(f\left(x\right)\right)'=0\overset{f(x)=c}{\Longrightarrow}\left(c\right)'=0$$

2.

Να αποδείξετε οτι $\left(x\right)'=1$

$\Theta\varepsilon\omega\rho\acute{\omega}\ \tau\eta\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f\left(x\right)=x$

Αν $h\neq 0$ *θα έχω*:

$$\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}\overset{\substack{\text{Η συνάρτηση } f(x)=x\\ \text{μου δίνει την τιμή που υπάρχει}\\ \text{"μέσα στην } f\text{"}}}{=}\frac{x+h-x}{h}=\frac{h}{h}=1$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}=\lim_{h\to 0}1=1$$

Επειδή υπάρχει το $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}$ και είναι πραγματικός αριθμός

η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x και ισχύει:

$$f'\left(x\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}=1$$

$$\left(f\left(x\right)\right)'=0\overset{f(x)=x}{\Longrightarrow}\left(x\right)'=1$$

3.

Να αποδείξετε οτι $\left(x^2\right)'=2x$

$\Theta\varepsilon\omega\rho\acute{\omega}\ \tau\eta\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f\left(x\right)=x^2$

$\mathrm{A}\nu\ h\neq 0\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}=\frac{\left(x+h\right)^2-x^2}{h}\overset{(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2}{=}\frac{\cancel{x^2}+2xh+h^2-\cancel{x^2}}{h}=$$

$$\frac{2xh+h^2}{h}\overset{\substack{\text{Βγάζω κονό}\\ \text{παράγοντα το } h}}{=}\frac{h\left(2x+h\right)}{h}=2x+h$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}\overset{\substack{\text{Θεωρώ το } x \text{ σταθερό και η}\\ \text{μεταβλητή μου είναι } h\text{!!!}}}{=}\lim_{h\to 0}\left(2x+h\right)=2x$$

$\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota\ \tau o\ \lim_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)-f\left(h\right)}{h}\ \kappa\alpha\iota\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \pi\rho\alpha\gamma\mu\alpha\tau\iota\kappa\acute{o}\varsigma\ \alpha\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma$

$\eta\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \pi\alpha\rho\alpha\gamma\omega\gamma\acute{\iota}\sigma\iota\mu\eta\ \sigma\tau o\ x\ \kappa\alpha\iota\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota:$

$$f'\left(x\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}=2x$$

$$\left(f\left(x\right)\right)'=0\overset{f(x)=x^2}{\Longrightarrow}\left(x^2\right)'=2x$$

4.

$\boxed{\begin{array}{l}\mathrm{A}\nu\ \eta\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \pi\alpha\rho\alpha\gamma\omega\gamma\acute{\iota}\sigma\iota\mu\eta\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \kappa\alpha\iota\ \eta\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ cf\left(x\right)\\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \pi\alpha\rho\alpha\gamma\omega\gamma\acute{\iota}\sigma\iota\mu\eta\ \kappa\alpha\iota\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\left(cf\left(x\right)\right)'=cf'\left(x\right)\ \acute{o}\pi o\upsilon\ c\ \mu\iota\alpha\ \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}\end{array}}$

$\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \eta\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \pi\alpha\rho\alpha\gamma\omega\gamma\acute{\iota}\sigma\iota\mu\eta\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$f'\left(x\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}$$

$\Theta\varepsilon\omega\rho\acute{\omega}\ \tau\eta\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ F\left(x\right)=cf\left(x\right)$

$\mathrm{A}\nu\ h\neq 0\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\frac{F\left(x+h\right)-F\left(h\right)}{h}\overset{\substack{\text{Το } F \text{ είναι το γινόμενο}\\ \text{της σταθεράς } c \text{ επι το } f}}{=}\frac{cf\left(x+h\right)-cf\left(x\right)}{h}\overset{\substack{\text{Βγάζω κοινό}\\ \text{παράγοντα το } c}}{=}$$

$$\frac{c\left(f\left(x+h\right)-f\left(x\right)\right)}{h}=c\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)-f\left(h\right)}{h}=\lim_{h\to 0}c\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}=$$

$$c\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}\overset{f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(h)}{h}}{=}cf'\left(x\right)$$

$\text{Επειδή υπάρχει το } \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} \text{ και είναι πραγματικός αριθμός}$

$\text{η συνάρτηση } F \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } x \text{ και ισχύει}:$

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(h)}{h}=cf'(x)$$

$$\left(F(x)\right)'=cf'(x)\overset{F(x)=cf(x)}{\Longrightarrow}\left(cf(x)\right)'=cf'(x)$$

5.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Αν οι συναρτήσεις } f,g \text{ είναι παραγωγίσιμες τότε και η συνάρτηση}\\ f(x)+g(x) \text{ είναι παραγωγίσιμη και ισχύει } \left(f(x)+g(x)\right)'=f'(x)+g'(x)\end{array}}$$

$\text{Επειδή η συνάρτηση } f \text{ είναι παραγωγίσιμη θα έχω}:$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$\text{Επειδή η συνάρτηση } g \text{ είναι παραγωγίσιμη θα έχω}:$

$$g'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$\text{Θεωρώ τη συνάρτηση } F(x)=f(x)+g(x)$

$\text{Αν } h\neq 0 \text{ θα έχω}:$

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\overset{\substack{\text{Το } F \text{ είναι το άθροισμα των}\\ \text{συναρτήσεων } f \text{ και } g}}{=}\frac{f(x+h)+g(x+h)-\left(f(x)+g(x)\right)}{h}=$$

$$\frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h}\overset{\substack{\text{Μαζεύω σε ένα κλάσμα μόνο τα } f \text{ και στο}\\ \text{άλλο κλάσμα μόνο τα } g}}{=}$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(h)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\overset{\substack{f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(h)}{h}\\ g'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}}{=}f'(x)+g'(x)$$

$Επειδή\ υπάρχει\ το \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}$ $και\ είναι\ πραγματικός\ αριθμός$

$η\ συνάρτηση\ F\ είναι\ παραγωγίσιμη\ στο\ x\ και\ ισχύει:$

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(h)}{h}=f'(x)+g'(x)$$

$$\left(F(x)\right)'=f'(x)+g'(x)\overset{F(x)=f(x)+g(x)}{\Longrightarrow}\left(f(x)+g(x)\right)'=f'(x)+g'(x)$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

$(\mathrm{I})\ Δίνεται\ η\ συνάρτηση\ f(x)=-2x^2.$ $Να\ αποδείξετε\ οτι\ εφαπτομένες$ $της\ C_f\ που\ διέρχονται\ απο\ το\ σημείο\ \mathrm{A}(1,0)\ είναι\ ο\ άξονας\ x'x\ και$ $η\ ευθεία\ (ε): y=-8x+8$

$(\mathrm{II})\ Δίνεται\ η\ συνάρτηση\ g(x)=a\ln x+\beta x^2, x>0.$ $Να\ βρεθούν\ τα\ α,\beta\in\mathbb{R}$ $ώστε\ η\ ευθεία\ (ε): y=-8x+8\ να\ εφάπτεται\ της\ C_g\ στο\ σημείο\ με$ $τετμημένη\ x_0=1$

2.

$Να\ χαρακτηρίσετε\ τις\ παρακάτω\ προτάσεις\ ως\ (\Sigma)\ ή\ (\Lambda)$

$(\mathrm{I})\left(\sqrt{x^2+1}\right)'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}, x\in\mathbb{R}$ $(\mathrm{II})\ (εφx)'=1+εφ^2x, x\neq κπ+\dfrac{\pi}{2}, κ\in\mathbb{Z}$

$(\mathrm{III})\left(ημ\left(x^3+1\right)\right)'=x^2συν\left(x^3+1\right)$ $(\mathrm{IV})\left(\ln\left(x^4+1\right)\right)'=\dfrac{5x^3}{x^4+1}, x\in\mathbb{R}$

$f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$	$(f+g)'=f'+g'$	$(cf))'=cf', c: Σταθερά$
$\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'g-fg'}{g^2}, g\neq 0$	$(fg)'=f'g+fg'$	$(f(g(x)))'=f'(g(x))g'(x)$
$(c)'=0, c: Σταθερά$	$\left(x^{\alpha}\right)'=\alpha x^{\alpha-1}$	$(x)'=1$
$\left(e^x\right)'=e^x$	$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}, x>0$	$(ημx)'=συνx$
$(ε\phi x)'=\dfrac{1}{συν^2x}, x\neq κπ+\dfrac{\pi}{2}, κ\in\mathbb{Z}$	$(συνx)'=-ημx$	$\left(f^{\alpha}\right)'=\alpha f^{\alpha-1}f'$
$\left(e^f\right)'=e^f f'$	$(\ln f)'=\dfrac{f'}{f}, f>0$	$(ημf)'=συνf\bullet f'$
$(συνf)'=-ημf\bullet f'$	$(ε\phi f)'=\dfrac{f'}{συν^2 f}, f\neq κπ+\dfrac{\pi}{2}, κ\in\mathbb{Z}$	
$\alpha^{-\nu}=\dfrac{1}{\alpha^{\nu}}, \alpha\neq 0$	$\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}=\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}, \alpha>0, \nu, \mu\in\mathbb{N}^*$	