<u>ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ(N_o1)</u>

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ</u>

1.

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f(x)=\frac{\ln(e^x-1)}{\sqrt{x^2-1}}$$

Αν A το πεδίο ορισμού της f.Τότε θα έχω :

$D_f=\{\, x\in IR : e^x-1>0,\ x^2-1>0\}$

$e^x-1>0 \Longleftrightarrow e^x>1 \Longleftrightarrow e^x>e^0 \Longleftrightarrow x>0$

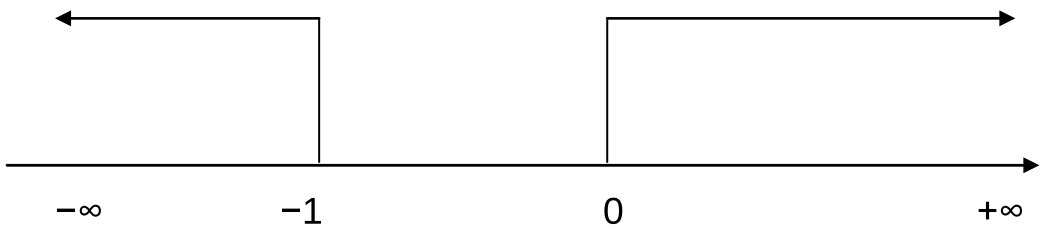
Θεωρώ την εξίσωση : $x^2-1=0$ ή $x^2=1$ή $x=\pm\sqrt{1}$ ή $x=\pm1$

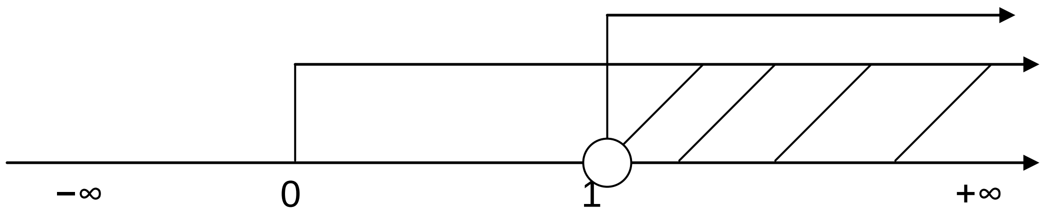
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		+	**0**	—	**0**	+	

$x^2-1>0 \Longleftrightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

$$x\in D_f \Longleftrightarrow \left.\begin{matrix} e^x-1>0 \\ x^2-1>0 \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{matrix} x>0 \\ x<-1 \text{ ή } x>1 \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix} \begin{pmatrix} x>0 \\ x<-1 \\ \text{(Άτοπο)} \end{pmatrix} \text{ ή } \begin{pmatrix} x>1 \\ x>0 \end{pmatrix} \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow x>1 \Longleftrightarrow x\in(1,+\infty)$$





Άρα : $D_f = (1,+\infty)$

2.

> Να βρεθεί τοπεδίο ορισμού της συνάρτησης
>
> $$f\left(x\right)=\sqrt{x^3-3x^2-4x+12}$$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Αν Α το πεδίο ορισμού της f. Τοτε θα έχω :

$D_f = \{\, x \in IR : x^3-3x^2-4x+12 \geq 0 \}$

$x^3-3x^2-4x+12 = x^2(x-3)-4(x-3) = (x^2-4)(x-3)$

$x-3 \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq 3$

$x-3 < 0 \Longleftrightarrow x < 3$

x	– ∞		3		+ ∞
x – 3		–	0	+	

Θεωρώ την δευτεροβάθμια εξίσωση :

$x^2-4=0 \Longleftrightarrow x^2=4$ ή $x=\pm\sqrt{4} \Longleftrightarrow x=\pm 2$

x	– ∞		–2		2		+ ∞
x^2-4		+	0	–	0	+	

x	$-\infty$	-2		2		3	$+\infty$
$x-3$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
x^2-4	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
$(x-3)(x^2-4)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in D_f \Longleftrightarrow (x-3)(x^2-4) \geq 0 \Longleftrightarrow x \in [-2,2] \cup [3,+\infty)$
$D_f = [-2,2] \cup [3,+\infty)$

3.

Να βρεθεί τοπεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^3-4x^2+5x-2}$$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Αν D_f το πεδίο ορισμού της f. Τοτε θα έχω :
$D_f = \{ x \in IR : x^3-4x^2+5x-12 \neq 0 \}$
Θεωρώ την εξίσωση :
$x^3-4x^2+5x-2 = 0 \Longleftrightarrow x^3-2x^2-2x^2+4x+x-2 = 0 \Longleftrightarrow$
$x^2(x-2)-2x(x-2)+1(x-2) = 0 \Longleftrightarrow$
$(x^2-2x+1)(x-2) = 0 \Longleftrightarrow (x^2-2\cdot x\cdot 1+1^2)(x-2) = 0 \Longleftrightarrow$
$(x-1)^2(x-2) = 0 \Longleftrightarrow$

$$\left.\begin{matrix} (x-1)^2 = 0 \\ \text{ή} \\ x-2 = 0 \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{matrix} x-1 = 0 \\ \text{ή} \\ x = 2 \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{matrix} x = 1 \\ \text{ή} \\ x = 2 \end{matrix}\right\}$$

$x \in D_f \Longleftrightarrow x^3-5x^2+8x-12 \neq 0 \Longleftrightarrow (x \neq 1 \text{ και } x \neq 2) \Longleftrightarrow$

xє$(-\infty ,1) \cup (1,2) \cup (2 , +\infty)$
$D_f= (-\infty ,1) \cup (1,2) \cup (2 , +\infty)$

4.

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f\left(x\right)=\frac{\sqrt{x^2-8x+15}}{\sqrt{x^2-x}}$$

Αν D_f το πεδίο ορισμού της f.Τότε θα έχω:

$D_f= \{x\in IR: x^2-8x +15 \geq 0 , x^2-x >0\}$

Θεωρώ την δευτεροβάθμια εξίσωση :

$\boxed{1}\ x^2\ \boxed{-8}\ x\ \boxed{+15} = 0 \quad (1)$
$\alpha = 1 \quad \beta = -8 \quad \gamma = 15$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15 = 64 - 60 = 4 > 0$

Επειδή Δ > 0 η δευτεροβάθμια εξίσωση (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες :

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm 2}{2}$$

$$x_1 = \frac{8+2}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$x_2 = \frac{8-2}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

x	$-\infty$		3		5		$+\infty$
$x^2 - 8x +15$		+	0	–	0	+	

Θεωρώ την δευτεροβάθμια εξίσωση : $x^2-x = 0 \Longleftrightarrow x(x-1) =0$

$$\begin{cases} x = 0 \\ \text{ή} \\ x-1=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ή} \\ x=1 \end{cases}$$

$x^2 - x \neq 0 \Longleftrightarrow (x \neq 0,\ x \neq 1)$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x^2 - x$		+	‖	−	‖	+	

x	$-\infty$	0		1		3		5		$+\infty$
$x^2-8x+15$	+	‖	+	‖	+	0	—	0	+	
$x^2 - x$	+	‖	—	‖	+	|	+	|	+	

$x \in D_f \Longleftrightarrow x \in (-\infty,0)U(1,3]U[5,+\infty)$

$D_f= (-\infty,0)U(1,3]U[5,+\infty)$

5.

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f(x)=\sqrt{x^2+3|x|-4}$$

Αν D_f το πεδίο ορισμού της f.Τότε θα έχω :

$D_f =\{ x\in IR: x^2+3|x|-4 \geq 0\}$

$x\in D_f \Longleftrightarrow x^2+3|x|-4\geq 0$ (1)

Θέτω $|x| = t$,$t\geq 0$(2)

$x^2 = |x|^2= t^2$

Τότε η σχέση (1) γίνεται :

$t^2+3t-4\geq 0$ (3)

Θεωρώ την δευτεροβάθμια εξίσωση :

$\boxed{1}\ t^2\ \boxed{+3}\ t\ \boxed{-4} = 0$ (4)
$\alpha = 1 \quad \beta = +3 \quad \gamma = -4$

$\Delta = \beta^2 - 4\,\alpha\,\gamma = 3^2 - 4 \bullet 1 \bullet (-4) = 9 + 16 = 25 > 0$

Επειδή Δ > 0 η δευτεροβάθμια εξίσωση (4) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες :

$$t_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\,\alpha} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2 \bullet 1} = \frac{-3 \pm 5}{2}$$

$$t_1 = \frac{-3+5}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$t_2 = \frac{-3-5}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$

t	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
t^2+3t-4		+	0	–	0	+	

$t^2 + 3t - 4 \leq 0 \iff t \in (-\infty, -4] \cup [1, +\infty) \iff$

$$\left.\begin{array}{l} t \leq -4 \text{(Άτοπο γιατί } t \geq 0) \\ \quad ή \\ t \geq 1 \end{array}\right\} \iff$$

$t \geq 1 \iff |x| \geq 1 \iff (x \geq 1$ ή $x \leq -1) \iff$

$x \in (-\infty, -1]$ή $x \in [1, +\infty] \iff x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty]$
$D_f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty]$

6.

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f(x)=\ln\frac{e^x-1}{1-e^{-x}}$$

$$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}:\frac{e^x-1}{1-e^{-x}}>0,1-e^{-x}\neq 0\right\}$$

$$\Theta\varepsilon\omega\rho\acute{\omega}\ \tau\eta\nu\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta:$$

$$1-e^{-x}=0\Leftrightarrow e^{-x}=1\Leftrightarrow e^{-x}=e^0\Leftrightarrow -x=0\Leftrightarrow x=0$$

$$\acute{E}\chi\omega:1-e^{-x}\neq 0\Leftrightarrow x\neq 0$$

$$x\in D_f\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\dfrac{e^x-1}{1-e^{-x}}>0\\ x\neq 0\end{array}\right\}\overset{e^{-x}=\frac{1}{e^x}}{\Longleftrightarrow}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{e^x-1}{1-\dfrac{1}{e^x}}>0\\ x\neq 0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\dfrac{e^x-1}{\dfrac{e^x}{e^x}-\dfrac{1}{e^x}}>0\\ x\neq 0\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{e^x-1}{\dfrac{e^x-1}{e^x}}>0\\ x\neq 0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\dfrac{e^x\cancel{\left(e^x-1\right)}}{\cancel{e^x-1}}>0\\ x\neq 0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}e^x>0\\ x\neq 0\end{array}\right\}\Leftrightarrow x\neq 0\Leftrightarrow$$

$$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$$

$$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon: D_f=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$$

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

1.

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f(x)=\frac{\ln\left(e^{2x}-e^x\right)}{\sqrt{9-x^2}}$$

$\underline{\Upsilon\pi o\delta\varepsilon\iota\xi\eta:}$

$$e^{2x}-e^{x}>0\Leftrightarrow e^{x}\left(e^{x}-1\right)>0\overset{e^{x}>0}{\Longleftrightarrow}e^{x}-1>0$$

2.

Να βρεθεί τοπεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f\left(x\right)=\sqrt{x^{3}-2x^{2}-4x+8}$$

Υποδειξη:

$x^3-2x^2-4x+8=x^2(x-2)-4(x-2)$

3.

Να βρεθεί τοπεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f\left(x\right)=\frac{x^{5}+3}{x^{3}-4x^{2}+4x-3}$$

Υποδειξη:

$x^3-4x^2+4x-3=(x^3-3x^2)+(-x^2+3x)+(x-3)$

4.

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f\left(x\right)=\frac{\sqrt{x^{2}-6x+8}}{\sqrt{x^{2}-2x}}$$

5.

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f\left(x\right)=\sqrt{x^{2}-5\left|x\right|+4}$$

6.

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f\left(x\right)=\ln\frac{e^{-x}-1}{1-e^{x}}$$