ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ(Νο3)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1.

$\text{Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης } f(x)=\dfrac{\ln x(2\pi-x)}{\sqrt{2\eta\mu x-1}}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}: x(2\pi-x)>0, 2\eta\mu x-1>0\}$

$\text{Θεωρώ την εξίσωση } x(2\pi-x)=0$

$$x(2\pi-x)=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x=0 \\ \acute{\eta} \\ 2\pi-x=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x=0 \\ \acute{\eta} \\ x=2\pi \end{matrix}\right\}$$

x	$-\infty$		0		2π		$+\infty$
$x(2\pi-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$x(2\pi-x)>0 \Leftrightarrow 0<x<2\pi$

$$x\in D_f \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x(2\pi-x)>0 \\ 2\eta\mu x-1>0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} 0<x<2\pi \\ \eta\mu x>\dfrac{1}{2} \end{matrix}\right\}$$

$\text{Θα δω πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο πότε ισχύει } \eta\mu x>\dfrac{1}{2} \text{ με } x\in(0,2\pi)$

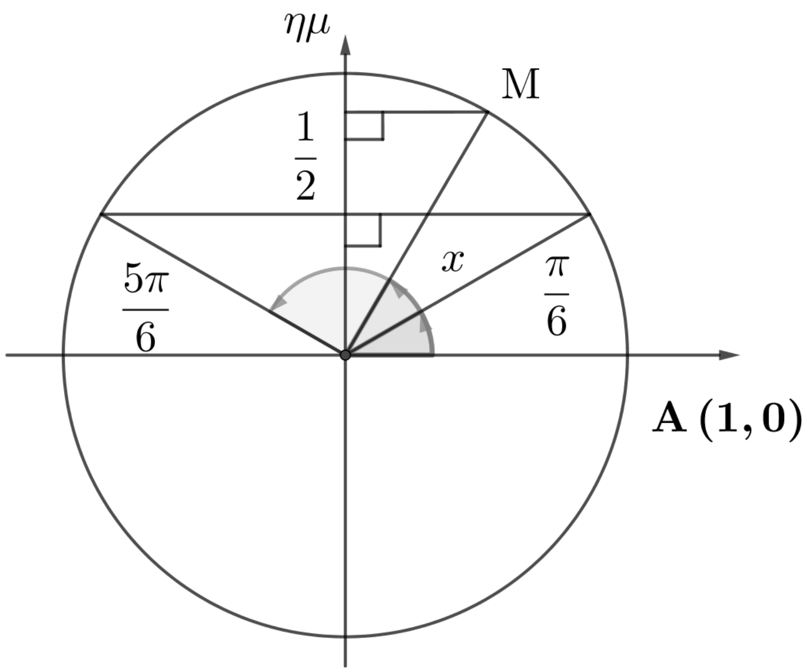
<u>$\text{Γνωρίζω οτι όταν το } \mathrm{M}(x,y) \text{ βρίσκεται στον τριγωνομετρικό κύκλο}$</u>

<u>$\text{με } \widehat{\mathrm{AM}}=\hat{\varphi}, \mathrm{A}(1,0)=\mathrm{H} \text{ αρχή του τριγωνομετρικού κύκλου τότε η}$</u>

<u>$\text{τεταγμένη M είναι το } \eta\mu\hat{\varphi}. \text{Οπότε ψάχνω στον άξονα } \mathrm{Y'Y} \text{ που έχω τεταγμένη}$</u>

<u>$\text{μεγαλύτερη απο το } \dfrac{1}{2}. \text{Για να συμβεί αυτό θα πρέπει η προβολή του σημείου}$</u>

<u>$\text{M πάνω στο άξονα } \mathrm{Y'Y} \text{ να βρίσκεται πάνω απο το } \dfrac{1}{2}!!!$</u>



$$x \in D_f \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 2\pi \\ \eta\mu x > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$$

$$\text{Οπότε}: D_f = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$$

2.

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{2x+\pi} - \sqrt{-2x+\pi} - \ln\left(2\sigma\upsilon\nu x - \sqrt{2}\right)$

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : 2\pi + x \geq 0, -2x + \pi \geq 0, 2\sigma\upsilon\nu x - \sqrt{2} > 0\right\}$$

Αν διαιρέσω και τα δυο μέλη μιας ανίσωσης με ένα αρνητικό αριθμό προκύπτει ετερόστροφη ανίσωση

$$x \in D_f \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+\pi \geq 0 \\ -2x+\pi \geq 0 \\ 2\sigma\upsilon\nu x - \sqrt{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq -\pi \\ -2x \geq -\pi \\ 2\sigma\upsilon\nu x - \sqrt{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \geq -\frac{\pi}{2} \\ \frac{-2x}{-2} \leq \frac{-\pi}{-2} \\ 2\sigma\upsilon\nu x > \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{\pi}{2} \\ x \leq \frac{\pi}{2} \\ 2\sigma\upsilon\nu x > \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \sigma\upsilon\nu x > \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Θα δω πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο πότε ισχύει $\sigma\upsilon\nu x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ με $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

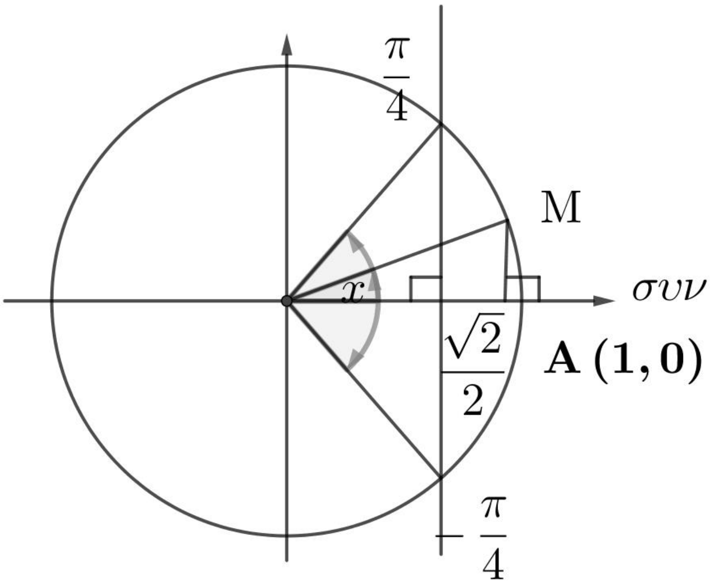
Γνωρίζω οτι όταν το $\mathrm{M}(x, y)$ βρίσκεται στον τριγωνομετρικό κύκλο

με $\widehat{\mathrm{AM}} = \hat{\varphi}$, $\mathrm{A}(1,0) =$ Η αρχή του τριγωνομετρικού κύκλου τότε η

τετμημένη Μ είναι το $\sigma\upsilon\nu\hat{\varphi}$. Οπότε ψάχνω στον άξονα Χ'Χ που έχω τετμημένη

μεγαλύτερη απο το $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Για να συμβεί αυτό θα πρέπει η προβολή του σημείου

Μ πάνω στο άξονα Χ'Χ να βρίσκεται δεξιά απο το $\frac{\sqrt{2}}{2}$!!!



$$x \in D_f \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ \sigma\upsilon\nu x > \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{Οπότε}: D_f = \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$$

3.

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f(x) = \left(1 - \frac{3}{x}\right)^x$$

$$\Delta\iota\alpha\kappa\rho\acute{\iota}\nu\omega\ \tau\iota\varsigma\ \pi\varepsilon\rho\iota\pi\tau\acute{\omega}\sigma\varepsilon\iota\varsigma: \left\{\begin{array}{l} (\mathrm{I})\,1-\dfrac{3}{x}>0, x\neq 0 \\ (\mathrm{II})\,1-\dfrac{3}{x}=0, x\neq 0, x>0 \\ (\mathrm{III})\,1-\dfrac{3}{x}<0, x\neq 0, x\in\mathbb{Z} \end{array}\right\}$$

<u>$\Pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\pi\tau\omega\sigma\eta\,(\mathrm{I})$:</u>

$$\left\{\begin{array}{l} 1-\dfrac{3}{x}>0 \\ x\neq 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{x-3}{x}>0 \\ x\neq 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x(x-3)>0 \\ x\neq 0 \end{array}\right\}$$

$\Theta\varepsilon\omega\rho\acute{\omega}\ \tau\eta\nu\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta\ x(x-3)=0$

$$x(x-3)=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=0 \\ \acute{\eta} \\ x-3=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=0 \\ \acute{\eta} \\ x=3 \end{array}\right\}$$

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
$x(x-3)$ $x\neq 0$	$+$	‖ $-$	0	$+$

$$\left\{\begin{array}{l} x(x-3)>0 \\ x\neq 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x\in(-\infty,0)\cup(3,+\infty)$$

<u>$\Pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\pi\tau\omega\sigma\eta\,(\mathrm{II})$:</u>

$$\left\{\begin{array}{l} 1-\dfrac{3}{x}=0 \\ x\neq 0 \\ x>0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{3}{x}=1 \\ x\neq 0 \\ x>0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=3 \\ x\neq 0 \\ x>0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x=3$$

$\underline{\Pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\pi\tau\omega\sigma\eta\,(\mathrm{III})}:$

$$\left\{\begin{array}{l}1-\dfrac{3}{x}<0\\ x\neq 0\\ x\in\mathbb{Z}\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\dfrac{x-3}{x}<0\\ x\neq 0\\ x\in\mathbb{Z}\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x(x-3)<0\\ x\neq 0\\ x\in\mathbb{Z}\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x\in(0,3)<0\\ x\neq 0\\ x\in\mathbb{Z}\end{array}\right\}\Leftrightarrow x\in\{1,2\}$$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon: D_f=(-\infty,0)\cup(3,+\infty)\cup\{3\}\cup\{1,2\}=(-\infty,0)\cup\{1,2\}\cup[3,+\infty)$

ΠΡΟΣΟΧΗ!!!
Η *συνάρτηση* $f(x)=a(x)^{\beta(x)}$ *,όπου* $a(x),\beta(x)$ *παραστάσεις του x ορίζεται όταν ορίζονται οι παραστάσεις* $a(x),\beta(x)$ *και ισχύουν οι περιπτώσεις* : $\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\,\text{Η βάση είναι θετικός αριθμός}\\ (\mathrm{II})\,\text{Η βάση είναι μηδέν και ο εκθέτης θετικός αριθμός}\\ (\mathrm{III})\,\text{Η βάση είναι αρνητικός αριθμός και ο εκθέτης ακέραιος}\end{array}\right\}$

4.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$ Ν*α βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης* f *και στην συνέχεια να απλοποιηθεί ο τύπος της*

$$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}: x-1\geq 0, x+2\sqrt{x-1}\geq 0, \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}\geq 0\right\}$$

$$x\in D_f\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x-1\geq 0\\ x+2\sqrt{x-1}\geq 0\\ x-2\sqrt{x-1}\geq 0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x\geq 1\\ x-1+1+2\sqrt{x-1}\geq 0\\ x-1+1-2\sqrt{x-1}\geq 0\end{array}\right\}\overset{\substack{\Theta\acute{\varepsilon}\tau\omega\; x-1=\left(\sqrt{x-1}\right)^2\\ \gamma\iota\alpha\tau\iota\; x\geq 1}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left\{\begin{array}{l}x\geq 1\\ \left(\sqrt{x-1}\right)^2+1+2\sqrt{x-1}\geq 0\\ \left(\sqrt{x-1}\right)^2+1-2\sqrt{x-1}\geq 0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x\geq 1\\ \left(\sqrt{x-1}\right)^2+1^2+2\bullet\sqrt{x-1}\bullet 1\geq 0\\ \left(\sqrt{x-1}\right)^2+1^2-2\bullet\sqrt{x-1}\bullet 1\geq 0\end{array}\right\}\overset{\substack{\alpha^2+2\bullet\alpha\bullet\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2\\ \alpha^2-2\bullet\alpha\bullet\beta+\beta^2=(\alpha-\beta)^2}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x \geq 1 \\ \left(\sqrt{x-1}+1\right)^2 \geq 0 \\ \left(\sqrt{x-1}-1\right)^2 \geq 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x \geq 1 \Leftrightarrow x \in [1,+\infty)$$

$\text{Οπότε}: D_f = [1,+\infty)$

$\text{Έχω}: \left(\sqrt{x-1}+1\right)^2 = x + 2\sqrt{x-1}, \left(\sqrt{x-1}-1\right)^2 = x - 2\sqrt{x-1}$

$$f(x) = \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \sqrt{\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2} \overset{\sqrt{a^2}=|a|}{=}$$

$$= \left|\sqrt{x-1}+1\right| + \left|\sqrt{x-1}-1\right| = \sqrt{x-1}+1+\left|\sqrt{x-1}-1\right|$$

$$\left(\sqrt{x-1} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x-1}+1 \geq 1 > 0 \Rightarrow \sqrt{x-1}+1 > 0 \Rightarrow \left|\sqrt{x-1}+1\right| = \sqrt{x-1}+1\right)$$

$\text{Θεωρώ την ανίσωση}:$

$$\left\{\begin{array}{c} \sqrt{x-1}-1 \geq 0 \\ x \geq 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \sqrt{x-1} \geq 1 \\ x \geq 1 \end{array}\right\} \overset{\substack{\text{Αν } \alpha,\beta\geq 0 \text{ ισχύει η ισοδυναμία} \\ \alpha\geq\beta \Leftrightarrow \alpha^2\geq\beta^2}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{c} \left(\sqrt{x-1}\right)^2 \geq 1^2 \\ x \geq 1 \end{array}\right\} \overset{\left(\sqrt{\alpha}\right)^2=\alpha,\alpha\geq 0}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left\{\begin{array}{r} x-1 \geq 1 \\ x \geq 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \geq 2 \\ x \geq 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x \geq 2$$

$$\text{Οπότε}: \left\{\begin{array}{c} \sqrt{x-1}-1 < 0 \\ x \geq 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow 1 \leq x < 2$$

$\text{Τότε θα έχω}:$

$\left|\sqrt{x-1}-1\right| = \sqrt{x-1}-1, x \geq 2$

$\left|\sqrt{x-1}-1\right| = 1-\sqrt{x-1}, 1 \leq x < 2$

$$f(x) = \sqrt{x-1}+1+\left|\sqrt{x-1}-1\right| = \begin{cases} \sqrt{x-1}+1+\left|\sqrt{x-1}-1\right|, x \geq 2 \\ \sqrt{x-1}+1+\left|\sqrt{x-1}-1\right|, 1 \leq x < 2 \end{cases} =$$

$$\begin{cases} \sqrt{x-1}+1+\sqrt{x-1}-1, x \geq 2 \\ \sqrt{x-1}+1+1-\sqrt{x-1}, 1 \leq x < 2 \end{cases} = \begin{cases} 2\sqrt{x-1}, x \geq 2 \\ 2, 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

5.

$Για\ ποιές\ του\ \lambda \in \mathbb{R}\ το\ πεδίο\ ορισμού\ της\ συνάρτησης$ $f(x)=\sqrt{(\lambda-2)x^2+2(\lambda-2)x+2}\ είναι\ το\ \mathbb{R}$

$Επειδή\ το\ D_f=\{x\in\mathbb{R}:(\lambda-2)x^2+2(\lambda-2)x+2\geq 0\}\ είναι\ το\ \mathbb{R}\ θα\ πρέπει$

$να\ ισχύει:$

$(\lambda-2)x^2+2(\lambda-2)x+2\geq 0\ για\ κάθε\ x\in\mathbb{R}$

$Διακρίνω\ τις\ περιπτώσεις:\left\{\begin{matrix}(\mathrm{I})\ \lambda-2=0\\(\mathrm{II})\ \lambda-2\neq 0\end{matrix}\right\}$

$\underline{Περίπτωση\ (\mathrm{I})}$

$\lambda-2=0\Leftrightarrow\lambda=2$

$Τότε\ θα\ έχω:$

$(\lambda-2)x^2+2(\lambda-2)x+2\overset{\lambda=2}{=}(2-2)x^2+2(2-2)x+2=2\geq 0\ για\ κάθε\ x\in\mathbb{R}$

$Συνεπώς\ αν\ \lambda=2\ θα\ έχω\ D_f=\mathbb{R}$

$\underline{Περίπτωση\ (\mathrm{II})}$

$\lambda-2\neq 0\Leftrightarrow\lambda\neq 2$

$Τότε\ θα\ έχω\ το\ τριώνυμο\ (\lambda-2)x^2+2(\lambda-2)x+2$

$\underline{Γνωρίζω\ οτι\ το\ τριώνυμο\ \alpha x^2+\beta x+\gamma\ είναι\ μη\ αρνητικό\ όταν\ ισχύει}$

$\underline{\alpha>0\ και\ \Delta\leq 0}.Οπότε\ θα\ έχω:$

$$\left\{\begin{matrix}\alpha>0\\\Delta\leq 0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\alpha>0\\\beta^2-4\alpha\gamma\leq 0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\lambda-2>0\\\left[2(\lambda-2)\right]^2-4(\lambda-2)\bullet 2\leq 0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix}\lambda>2\\4(\lambda-2)^2-8(\lambda-2)\leq 0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\lambda>2\\4(\lambda-2)(\lambda-2-2)\leq 0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\lambda>2\\(\lambda-2)(\lambda-4)\leq 0\end{matrix}\right\}$$

$Θεωρώ\ την\ δευτεροβάθμια\ εξίσωση\ (\lambda-2)(\lambda-4)=0$

$$(\lambda-2)(\lambda-4)=0\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\lambda-2=0\\ή\\\lambda-4=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\lambda=2\\ή\\\lambda=4\end{matrix}\right\}$$

x	$-\infty$ $\quad$ 2 $\quad$ 4 $\quad$ $+\infty$
$(\lambda-2)(\lambda-4)$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$

$(\lambda-2)(\lambda-4)\le 0 \Leftrightarrow \lambda\in[2,4]$

$\Gamma\iota\alpha\ \tau o\ \lambda\ \theta\alpha\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota:$

$$\left\{\begin{matrix}\lambda>2\\(\lambda-2)(\lambda-4)\le 0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\lambda>2\\\lambda\in[2,4]\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\lambda\in(2,4]$$

$\mathrm{A}\pi o\ \tau\iota\varsigma\ \pi\varepsilon\rho\iota\pi\tau\acute{\omega}\sigma\varepsilon\iota\varsigma\ (\mathrm{I}),(\mathrm{II})\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$\lambda\in(2,4]\ \acute{\eta}\ \lambda=2\Leftrightarrow\lambda\in[2,4]$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\ln\frac{2\pi-x}{x}+\frac{x^2}{\sqrt{2\eta\mu x-\sqrt{3}}}$

2.

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$f(x)=\frac{\ln(2x+\pi)}{\sqrt{-2x+\pi}}-\sqrt{2\sigma\upsilon\nu x-1}$

3.

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$f(x)=(x^2-1)^x$

4.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x+3+4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}$

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και στην συνέχεια να απλοποιηθεί ο τύπος της

Υπόδειξη: $x\ge 1, x+3+4\sqrt{x-1}=x-1+4+4\sqrt{x-1}=\left(\sqrt{x-1}\right)^2+2^2+2\cdot 2\sqrt{x-1}=\cdots$

5.

Για ποιές του $\lambda\in\mathbb{R}$ το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$f(x)=\sqrt{(\lambda-1)x^2+2(\lambda-1)x+4\lambda-7}$ είναι το $\mathbb{R}$