ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ ΣΤΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΗΣ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ

1.

Έστω οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(0) = 2e$, οι οποίες ικανοποιούν την σχέση: $2f(x) + f(1-y) + g(x) - g(y) = 2e^x + e^y + 3$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ (1)

(I) Να αποδείξετε ότι:

$f(x) = 2e^x - e^{1-x} + 1$ και $g(x) = -2e^x + 2e^{1-x} + 2$

(II) Να βρεθεί η συνάρτηση $h = f - g$ και να μελετηθεί ως προς την μονοτονία

(III) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f, C_g των συναρτήσεων f, g αντιστοιχούν σε ένα ακριβώς κοινό σημείο

(IV) Να λύσετε την ανίσωση: $4e^{x^2-2x} < 4e^{x-2} + 3e^{-x^2+2x+1} - 3e^{-x+3}$

(I) Θέτω $y = x$ στην σχέση (1):

$$2f(x) + f(1-x) + \cancel{g(x)} - \cancel{g(x)} = 2e^x + e^x + 3 \Rightarrow$$

$$2f(x) + f(1-x) = 3e^x + 3 \quad (2)$$

Στην σχέση (2) όπου x θέτω το $1-x$:

$$2f(1-x) + f(1-(1-x)) = 3e^{1-x} + 3 \Leftrightarrow 2f(1-x) + f(1-1+x) = 3e^{1-x} + 3$$

$$\Leftrightarrow 2f(1-x) + f(x) = 3e^{1-x} + 3 \quad (3)$$

Απο τις σχέσεις $(2),(3)$ έχω το σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{l} 2f(x) + f(1-x) = 3e^x + 3 \\ 2f(1-x) + f(x) = 3e^{1-x} + 3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -2\left(2f(x) + f(1-x)\right) = -2\left(3e^x + 3\right) \\ 2f(1-x) + f(x) = 3e^{1-x} + 3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} -4f(x) - 2f(1-x) = -6e^x - 6 \\ 2f(1-x) + f(x) = 3e^{1-x} + 3 \end{array}\right\} (+)$$

$$-4f(x) - \cancel{2f(1-x)} + \cancel{2f(1-x)} + f(x) = -6e^x - 6 + 3e^{1-x} + 3 \Leftrightarrow$$

$$-3f(x) = -6e^x + 3e^{1-x} - 3 \Leftrightarrow -3f(x) = -3\left(2e^x - e^{1-x} + 1\right) \Leftrightarrow$$

$$f(x) = 2e^x - e^{1-x} + 1$$

Θέτω $y = 0$ στην σχέση (1):

$$2f(x)+f(1)+g(x)-g(0)=2e^{x}+e^{0}+3 \overset{\substack{g(0)=2e \\ f(x)=2e^{x}-e^{1-x}+1 \\ f(1)=2e-e^{0}+1=2e}}{\Leftrightarrow}$$

$$2\left(2e^{x}-e^{1-x}+1\right)+\cancel{2e}+g(x)-\cancel{2e}=2e^{x}+4 \Leftrightarrow$$

$$4e^{x}-2e^{1-x}+2+g(x)=2e^{x}+4 \Leftrightarrow$$

$$g(x)=2e^{x}+4-4e^{x}+2e^{1-x}-2 \Leftrightarrow$$

$$g(x)=-2e^{x}+2e^{1-x}+2$$

$$(II)\, D_f=\mathbb{R}, D_g=\mathbb{R}, D_h \overset{h=f-g}{=} D_{f-g}=\left\{x\in\mathbb{R} : x\in D_f, x\in D_g\right\}=\left\{x\in\mathbb{R} : x\in\mathbb{R}\right\}=\mathbb{R}$$

$$h(x) \overset{h=f-g}{=} (f-g)(x)=f(x)-g(x)=2e^{x}-e^{1-x}+1-\left(-2e^{x}+2e^{1-x}+2\right)=$$

$$2e^{x}-e^{1-x}+1+2e^{x}-2e^{1-x}-2=4e^{x}-3e^{1-x}-1$$

Οπότε έχω τη συνάρτηση $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $h(x)=4e^{x}-3e^{1-x}-1$

$$x_1<x_2 \overset{\substack{\text{Αν } \alpha>1 \text{ τότε ισχύει η ισοδυναμία:} \\ x<y \Leftrightarrow a^{x}<a^{y}}}{\Longrightarrow} \begin{Bmatrix} e^{x_1}<e^{x_2} \\ -x_1>-x_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 4e^{x_1}<4e^{x_2} \\ 1-x_1>1-x_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 4e^{x_1}<4e^{x_2} \\ e^{1-x_1}>e^{1-x_2} \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} 4e^{x_1}<4e^{x_2} \\ -3e^{1-x_1}<-3e^{1-x_2} \end{Bmatrix} \overset{(+)}{\Longrightarrow} 4e^{x_1}-3e^{1-x_1}<4e^{x_2}-3e^{1-x_2} \Rightarrow$$

$$4e^{x_1}-3e^{1-x_1}-1<4e^{x_2}-3e^{1-x_2}-1 \Rightarrow h(x_1)<h(x_2)$$

Συνεπώς η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα

(III) Έστω $\mathrm{A}(x_0, y_0)$ κοινό σημείο των C_f, C_g. Τότε θα έχω:

$$\mathrm{A}(x_0,y_0)\in C_f\cap C_g \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \mathrm{A}(x_0,y_0)\in C_f \\ \mathrm{A}(x_0,y_0)\in C_g \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y_0=f(x_0) \\ f(x_0)=g(x_0) \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} y_0=f(x_0) \\ f(x_0)-g(x_0)=0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y_0=f(x_0) \\ (f-g)(x_0)=0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y_0=f(x_0) \\ h(x_0)=0 \end{Bmatrix}$$

$$h(x)=4e^{x}-3e^{1-x}-1, x\in\mathbb{R}$$

$$h(0)=4e^{0}-3e-1=3-3e=3(1-e)<0\left(\Gamma\iota\alpha\tau\acute{\iota}: 1<e \Leftrightarrow 1-e<0\right)$$

$$h(1)=4e-3e^{0}-1=4e-4=4(e-1)>0\left(\Gamma\iota\alpha\tau\acute{\iota}: e>1 \Leftrightarrow e-1>0\right)$$

$$\begin{Bmatrix} h(0)>0 \\ h(1)<0 \end{Bmatrix} \Rightarrow h(0)h(1)<0$$

Η $\textit{συνάρτηση } 4e^{x}$ *είναι συνεχής ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.*
Η $\textit{συνάρτηση } e^{1-x}$ *είναι συνεχής ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων* $1-x$ *και* e^{x}.Η *συνάρτηση* $-3e^{1-x}$ *είναι συνεχής ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων*.Ο*πότε η συνάρτηση h είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων*

$$\textit{Έχω}:\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\,\text{Η συνάρτηση } h \text{ είναι συνεχής στο } [0,1] \text{ ως άθροισμα συνεχών}\\ \text{συναρτήσεων}\\ (\mathrm{II})\, h(0)h(1)<0\end{array}\right\}$$

Ο*πότε η συνάρτηση h ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του Bolzano στο κλειστό διάστημα* $[0,1]$.Ο*πότε υπάρχει ένα τουλάχιστον* $x_0\in(0,1)$ *τέτοιο ώστε* $h(x_0)=0$

$$\left\{\begin{array}{l}x_0\in(0,1)\\ h(x_0)=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x_0\in(0,1)\\ (f-g)(x_0)=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x_0\in(0,1)\\ f(x_0)-g(x_0)=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x_0\in(0,1)\\ f(x_0)=g(x_0)\end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x_0\in(0,1)\\ f(x_0)=g(x_0)\\ \mathrm{A}(x_0,f(x_0))\in C_f\\ \mathrm{A}(x_0,g(x_0))\in C_g\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x_0\in(0,1)\\ f(x_0)=g(x_0)\\ \mathrm{A}(x_0,f(x_0))\in C_f\cap C_g\end{array}\right\}$$

Άρα οι γραφικές παραστάσεις C_f,C_g *των συναρτήσεων* f,g *έχουν κοινό σημείο*.Θ*α αποδείξω ότι αυτό το κοινό σημείο είναι μοναδικό*
Έστω $\mathrm{B}(x_1,y_1)$ *κοινό σημείο των* C_f,C_g *με* $x_1\neq x_0$.Τ*ότε θα έχω*:

$$\mathrm{B}(x_1,y_1)\in C_f\cap C_g\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\mathrm{B}(x_1,y_1)\in C_f\\ \mathrm{B}(x_1,y_1)\in C_g\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y_1=f(x_1)\\ f(x_1)=g(x_1)\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}y_1=f(x_1)\\ f(x_1)-g(x_1)=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y_1=f(x_1)\\ (f-g)(x_1)=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y_1=f(x_1)\\ h(x_1)=0\end{array}\right\}$$

Ε*πειδή η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα θα είναι και* "1−1"

$$\textit{Έχω}:\left\{\begin{array}{l}h(x_0)=0\\ h(x_1)=0\end{array}\right\}\Rightarrow h(x_0)=h(x_1)\xRightarrow{h\text{"}1-1\text{"}}x_0=x_1$$

Άρα οι γραφικές παραστάσεις C_f, C_g *των συναρτήσεων* f, g *έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο*

$(IV)\, h(x) = 4e^x - 3e^{1-x} - 1, x \in \mathbb{R}$

$$4e^{x^2-2x} < 4e^{x-2} + 3e^{-x^2+2x+1} - 3e^{-x+3} \Leftrightarrow 4e^{x^2-2x} - 3e^{-x^2+2x+1} < 4e^{x-2} - 3e^{-x+3} \Leftrightarrow$$

$$4e^{x^2-2x} - 3e^{1-\left(x^2-2x\right)} < 4e^{x-2} - 3e^{1+(-x+2)} \Leftrightarrow 4e^{x^2-2x} - 3e^{1-\left(x^2-2x\right)} < 4e^{x-2} - 3e^{1-(x-2)}$$

$$\Leftrightarrow 4e^{x^2-2x} - 3e^{1-\left(x^2-2x\right)} - 1 < 4e^{x-2} - 3e^{1-(x-2)} - 1 \Leftrightarrow h\left(x^2-2x\right) < h(x-2)$$

$$\overset{h\uparrow\mathbb{R}}{\Longleftrightarrow} x^2 - 2x < x - 2 \Leftrightarrow x(x-2) - (x-2) < 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-1) < 0 \, (4)$$

$$\Theta\varepsilon\omega\rho\acute{\omega}\ \tau\eta\nu\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta : (x-2)(x-1) = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x-2=0 \\ \acute{\eta} \\ x-1=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x=2 \\ \acute{\eta} \\ x=1 \end{matrix}\right\}$$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$(x-1)(x-2)$	+	0	−	0 +

$(4) \Leftrightarrow x \in (1,2)$

2.

Έστω μια συνάρτηση f *συνεχής στο* $\mathbb{R}$, *για την οποία ισχύουν* :

$$\frac{xf(x)+1}{1+f^2(x)} = \frac{1}{2}\ \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 1$$

(I) Να *αποδείξετε ότι ο τύπος της* f *είναι* $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}, x \in \mathbb{R}$

(II) Να *αποδείξετε ότι η* f *είναι* "1−1"

(III) Να *λύσετε την εξίσωση* :

$$\sqrt{x^6+1} + x^3 + e^x - 1 = \sqrt{e^{2x} - 2e^x + 2}$$

$$(I)\,\frac{xf(x)+1}{1+f^2(x)}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2\left[xf(x)+1\right]=1+f^2(x)\Leftrightarrow 2xf(x)+2=1+f^2(x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^2(x)-2xf(x)=1 \overset{\substack{\Pi\rho o\sigma\theta \acute{\varepsilon}\tau\omega\ \kappa\alpha\iota\ \sigma\tau\alpha \\ \delta\upsilon o\ \mu\acute{\varepsilon}\lambda\eta\ \tau o\ x^2}}{\Longleftrightarrow} \underbrace{f^2(x)-2\bullet f(x)\bullet x+x^2}_{a^2-2\bullet a\bullet\beta+\beta^2=(\alpha-\beta)^2}=x^2+1\Leftrightarrow$$

$$\left(f(x)-x\right)^2=x^2+1\Leftrightarrow\sqrt{\left(f(x)-x\right)^2}=\sqrt{x^2+1}\overset{\sqrt{a^2}=|a|}{\Longleftrightarrow}\left|f(x)-x\right|=\sqrt{x^2+1}$$

$\Theta\varepsilon\omega\rho\acute{\omega}\ \tau\eta\nu\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ g(x)=f(x)-x.\mathrm{T}\acute{o}\tau\varepsilon\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\left|g(x)\right|=\sqrt{x^2+1}$$

$\acute{E}\chi\omega: x^2\geq 0\Rightarrow x^2+1\geq 1>0\Rightarrow x^2+1>0\Rightarrow\sqrt{x^2+1}>0\Rightarrow\left|g(x)\right|>0\Rightarrow g(x)\neq 0$

$$\acute{E}\chi\omega:\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\mathrm{H}\ g\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ (-\infty,\infty)\ \omega\varsigma\ \delta\iota\alpha\varphi o\rho\acute{\alpha}\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\omega}\nu \\ \sigma\upsilon\nu\alpha\rho\tau\acute{\eta}\sigma\varepsilon\omega\nu \\ (\mathrm{II})\ g(x)\neq 0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in\mathbb{R}\end{array}\right\}$$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ g(x)>0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in\mathbb{R}\ \acute{\eta}\ g(x)<0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in\mathbb{R}.$

$$\acute{E}\chi\omega: g(0)=f(0)-0\overset{f(0)=1}{=}1>0$$

$\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ g(0)>0\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ g(x)>0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in\mathbb{R}$

$$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon:\left|g(x)\right|=\sqrt{x^2+1}\overset{g(x)>0}{\Longleftrightarrow}g(x)=\sqrt{x^2+1}\overset{g(x)=f(x)-x}{\Longleftrightarrow}f(x)-x=\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow$$

$$f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$$

$$(II)\ f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow x_1+\sqrt{x_1^{\ 2}+1}=x_2+\sqrt{x_2^{\ 2}+1}\Leftrightarrow\sqrt{x_1^{\ 2}+1}-\sqrt{x_2^{\ 2}+1}+x_1-x_2=0$$

$$\left\{\begin{array}{l}x_1^{\ 2}\geq 0\\ x_2^{\ 2}\geq 0\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x_1^{\ 2}+1\geq 1>0\\ x_2^{\ 2}+1\geq 1>0\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x_1^{\ 2}+1>0\\ x_2^{\ 2}+1>0\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\sqrt{x_1^{\ 2}+1}>0\\ \sqrt{x_2^{\ 2}+1}>0\end{array}\right\}\overset{(+)}{\Longrightarrow}$$

$$\sqrt{x_1^{\ 2}+1}+\sqrt{x_2^{\ 2}+1}>0\Rightarrow\sqrt{x_1^{\ 2}+1}+\sqrt{x_2^{\ 2}+1}\neq 0$$

$$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon: f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow\sqrt{x_1^{\ 2}+1}-\sqrt{x_2^{\ 2}+1}+x_1-x_2=0$$

$$\overset{\sqrt{x_1^{\ 2}+1}+\sqrt{x_2^{\ 2}+1}\neq 0}{\Longleftrightarrow}\frac{\left(\sqrt{x_1^{\ 2}+1}+\sqrt{x_2^{\ 2}+1}\right)\left(\sqrt{x_1^{\ 2}+1}-\sqrt{x_2^{\ 2}+1}\right)}{\sqrt{x_1^{\ 2}+1}+\sqrt{x_2^{\ 2}+1}}+x_1-x_2=0$$

$$\frac{\left(\sqrt{x_1^{\ 2}+1}\right)^2-\left(\sqrt{x_2^{\ 2}+1}\right)^2}{\sqrt{x_1^{\ 2}+1}+\sqrt{x_2^{\ 2}+1}}+x_1-x_2=0\Leftrightarrow\frac{x_1^{\ 2}-x_2^{\ 2}}{\sqrt{x_1^{\ 2}+1}+\sqrt{x_2^{\ 2}+1}}+x_1-x_2=0\Leftrightarrow$$

$$\frac{\left(x_1-x_2\right)\left(x_1+x_2\right)}{\sqrt{x_1^{\ 2}+1}+\sqrt{x_2^{\ 2}+1}}+x_1-x_2=0\Leftrightarrow\left(x_1-x_2\right)\left(\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^{\ 2}+1}+\sqrt{x_2^{\ 2}+1}}+1\right)=0$$

$$1>0\Rightarrow\left\{\begin{matrix}x_1^{\ 2}+1>x_1^{\ 2}\\x_2^{\ 2}+1>x_2^{\ 2}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\sqrt{x_1^{\ 2}+1}>\sqrt{x_1^{\ 2}}\\\sqrt{x_2^{\ 2}+1}>\sqrt{x_2^{\ 2}}\end{matrix}\right\}\overset{\sqrt{\alpha^2}=|\alpha|}{\Longrightarrow}\left\{\begin{matrix}\sqrt{x_1^{\ 2}+1}>\left|x_1\right|\\\sqrt{x_2^{\ 2}+1}>\left|x_2\right|\end{matrix}\right\}\overset{(+)}{\Longrightarrow}$$

$$\sqrt{x_1^{\ 2}+1}+\sqrt{x_2^{\ 2}+1}>\left|x_1\right|+\left|x_2\right|\Rightarrow\left|x_1\right|+\left|x_2\right|<\sqrt{x_1^{\ 2}+1}+\sqrt{x_2^{\ 2}+1}$$

Απο την τριγωνική ανισότητα έχω:

$$\left|x_1+x_2\right|\le\left|x_1\right|+\left|x_2\right|<\sqrt{x_1^{\ 2}+1}+\sqrt{x_2^{\ 2}+1}\Rightarrow\left|x_1+x_2\right|<\sqrt{x_1^{\ 2}+1}+\sqrt{x_2^{\ 2}+1}$$

$$\overset{\sqrt{x_1^{\ 2}+1}+\sqrt{x_2^{\ 2}+1}>0}{\Longrightarrow}\frac{\left|x_1+x_2\right|}{\sqrt{x_1^{\ 2}+1}+\sqrt{x_2^{\ 2}+1}}<\frac{\sqrt{x_1^{\ 2}+1}+\sqrt{x_2^{\ 2}+1}}{\sqrt{x_1^{\ 2}+1}+\sqrt{x_2^{\ 2}+1}}\Rightarrow\left|\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^{\ 2}+1}+\sqrt{x_2^{\ 2}+1}}\right|<1$$

$$\overset{|x|\le\theta,\theta\ge0\Leftrightarrow-\theta\le x\le\theta}{\Longrightarrow}-1<\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^{\ 2}+1}+\sqrt{x_2^{\ 2}+1}}<1\Rightarrow\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^{\ 2}+1}+\sqrt{x_2^{\ 2}+1}}>-1\Rightarrow$$

$$\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^{\ 2}+1}+\sqrt{x_2^{\ 2}+1}}+1>0\Rightarrow\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^{\ 2}+1}+\sqrt{x_2^{\ 2}+1}}+1\neq0$$

$$\text{Έχω}:\left(x_1-x_2\right)\left(\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^{\ 2}+1}+\sqrt{x_2^{\ 2}+1}}+1\right)=0\overset{\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^{\ 2}+1}+\sqrt{x_2^{\ 2}+1}}+1\neq0}{\Longleftrightarrow}x_1-x_2=0\Leftrightarrow x_1=x_2$$

Συνεπώς η συνάρτηση f είναι "1−1"

$$\left(III\right)\sqrt{x^6+1}+x^3+e^x-1=\sqrt{e^{2x}-2e^x+2}\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\left(x^3\right)^2+1}+x^3=\sqrt{\underbrace{1^2-2\bullet e^x\bullet1+\left(e^x\right)^2}_{a^2-2\bullet a\bullet\beta+\beta^2=(\alpha-\beta)^2}+1}-e^x+1\Leftrightarrow f\left(x^3\right)=\sqrt{\left(1-e^x\right)^2+1}+\left(1-e^x\right)$$

$$\Leftrightarrow f\left(x^3\right)=f\left(1-e^x\right)\overset{f\,\text{"1−1"}}{\Longleftrightarrow}x^3=1-e^x\Leftrightarrow x^3+e^x-1=0$$

Θεωρώ την συνάρτηση $h\left(t\right)=t^3+e^t-t,t\in\mathbb{R}$

$$_1<t_2\Rightarrow\left\{\begin{matrix}t_1^{\ 3}<t_2^{\ 3}\\e^{t_1}<e^{t_2}\end{matrix}\right\}\overset{(+)}{\Longrightarrow}t_1^{\ 3}+e^{t_1}<t_2^{\ 3}+e^{t_2}\Rightarrow t_1^{\ 3}+e^{t_1}-1<t_2^{\ 3}+e^{t_2}-1\Rightarrow h\left(t_1\right)<h\left(t_2\right)$$

$\Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma\ \eta\ h\underset{\wedge}{\uparrow}\ o\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ "1-1"$

$\acute{E}\chi\omega: h(0)=0^3+e^0-1=1-1=0$

$x^3+e^x-1=0 \Leftrightarrow h(x)=h(0) \overset{h"1-1"}{\Longleftrightarrow} x=0$

3.

$\Delta\acute{\iota}\nu\varepsilon\tau\alpha\iota\ \eta\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f(x)=\begin{cases} e^x+x, x\le 0 \\ 1-2x-\ln(x+1), x>0 \end{cases}$
(I) Να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής
(II) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία
(III) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
(IV) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δυο ρίζες ετερόσημες x_1, x_2 με $x_1<x_2$
(V) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{f(\alpha)-1}{x-1}+\dfrac{f(\beta)-1}{x-2}=210$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1,2)$ με $\alpha,\beta>0$
(VI) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x+f(x)=\eta\mu x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (x_1,x_2), όπου x_1,x_2 είναι οι ρίζες του ερωτήματος (IV)
(V) Να βρείτε τις θετικές λύσεις της εξίσωσης: $2^{x+1}+2x+\ln(2^x+x-1)=6+\ln 2$

$(I)\ \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(e^x+x)=e^0+0 \overset{a^0=1, a\neq 0}{=} 1$

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}[1-2x-\ln(x+1)]=1-2\bullet 0-\ln(0+1)=1-\ln 1 \overset{\ln 1=0}{=} 1-0=1$

$f(0)=e^0+0=1+0=1$

Επειδή $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$ η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$

Η συνάρτηση e^x είναι συνεχής στο $(-\infty,0)$ ως εκθετική

Η συνάρτηση x είναι συνεχής στο $(-\infty,0)$ ως πολυωνυμική

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(-\infty,0)$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων

Η *συνάρτηση* $\ln(x+1)$ *είναι συνεχής στο* $(0,+\infty)$ *ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων* $x+1$ *και* $\ln x$.Η *συνάρτηση* $1-2x$ *είναι συνεχής στο* $(0,+\infty)$ *ως πολυωνυμική*.Ο*πότε η συνάρτηση* f *είναι συνεχής στο* $(0,+\infty)$ *ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων*.Ε*πειδή η συνάρτηση* f *είναι συνεχής στα διαστήματα* $(-\infty,0),(0,+\infty)$ *και στο σημείο* $x_0=0$ *θα είναι συνεχής σε όλο το* $\mathbb{R}$

$$(II)\,\text{Αν}:\begin{cases}x_1,x_2\in(-\infty,0]\\ x_1<x_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1,x_2\in(-\infty,0]\\ e^{x_1}<e^{x_2}\\ x_1<x_2\end{cases}\overset{(+)}{\Longrightarrow}\begin{cases}x_1,x_2\in(-\infty,0]\\ x_1+e^{x_1}<x_2+e^{x_2}\end{cases}\Rightarrow$$

$$f(x_1)<f(x_2)$$

$$\Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma\ f\underset{\wedge}{\uparrow}(-\infty,0]$$

$$\text{Αν}:\begin{cases}x_1,x_2\in(0,+\infty)\\ x_1<x_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1,x_2\in(0,+\infty)\\ -2x_1>-2x_2\\ x_1+1<x_2+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1,x_2\in(0,+\infty)\\ -2x_1>-2x_2\\ \ln(x_1+1)<\ln(x_2+1)\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}x_1,x_2\in(0,+\infty)\\ -2x_1>-2x_2\\ -\ln(x_1+1)>\ln(x_2+1)\end{cases}\overset{(+)}{\Longrightarrow}\begin{cases}x_1,x_2\in(0,+\infty)\\ -2x_1-\ln(x_1+1)>-2x_2-\ln(x_2+1)\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}x_1,x_2\in(0,+\infty)\\ 1-2x_1-\ln(x_1+1)>1-2x_2-\ln(x_2+1)\end{cases}\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$$

$$\Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma\ f\overset{\vee}{\downarrow}(0,+\infty)$$

$$(III)\ \boxed{\lim_{x\to-\infty}a^x=\begin{cases}+\infty, a\in(0,1)\\ 0, a\in(1,+\infty)\end{cases}}$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(e^x+x\right)=\lim_{x\to-\infty}e^x+\lim_{x\to-\infty}x\overset{e>1}{=}0-\infty=-\infty$$

$$\acute{\text{Ε}}\chi\omega:\begin{cases}(\text{I})\text{Η } f \text{ είναι συνεχής στο διάστημα } (-\infty,0]\\ (\text{II})\ f\underset{\wedge}{\uparrow}(-\infty,0]\end{cases}$$

$$\text{Οπότε}: f\left((-\infty,0]\right)=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),f(0)\right]=(-\infty,1]$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} 0, a\in(0,1) \\ +\infty, a\in(1,+\infty) \end{cases}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(1-2x-\ln(x+1)\right) = 1-2\lim_{x\to+\infty} e^x - \lim_{x\to+\infty}\ln(x+1) \overset{e>1}{=}$$
$$=1-2(+\infty)-\infty = 1-\infty-\infty = -\infty$$

$$\acute{E}\chi\omega: \lim_{x\to+\infty}\ln(x+1) \overset{\substack{\Theta\acute{\varepsilon}\tau\omega\, t=x+1 \\ x\to+\infty\Rightarrow t\to+\infty}}{=} \lim_{t\to+\infty}\ln t = +\infty$$

$$\acute{E}\chi\omega: \begin{Bmatrix} (\mathrm{I})\,\mathrm{H}\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ \delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\mu\alpha\ (0,+\infty) \\ (\mathrm{II})\ f \overset{\vee}{\downarrow} (0,+\infty) \end{Bmatrix}$$

$$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon: f\left((0,+\infty)\right) = \left(\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to0^+} f(x)\right) = (-\infty,1)$$

$$f(\mathbb{R}) = f\left((-\infty,0]\cup(0,+\infty)\right) \overset{(-\infty,0]\cap(0,+\infty)=\varnothing}{=} f\left((-\infty,0]\right)\cup f\left((0,+\infty)\right) =$$
$$(-\infty,1]\cup(-\infty,1) = (-\infty,1]$$

(IV)

$\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ f\left((-\infty,0]\right) = (-\infty,1]\ \kappa\alpha\iota\ 0\in(-\infty,1]\ \upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota\ x_1\in(-\infty,0]\ \tau\acute{\varepsilon}\tau o\iota o$

$\acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon\ f(x_1)=0. \acute{E}\sigma\tau\omega\ x_1=0. \mathrm{T}\acute{o}\tau\varepsilon\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$f(x_1)=f(0)=1\neq 0\,(\acute{A}\tau o\pi o)$

$\Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma\ x_1\in(-\infty,0]\ \kappa\alpha\iota\ x_1\neq0. \mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ x_1\in(-\infty,0)$

$\acute{A}\rho\alpha\ \upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota\ x_1\in(-\infty,0)\ \tau\acute{\varepsilon}\tau o\iota o\ \acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon\ f(x_1)=0$

$\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ f\left((0,+\infty)\right)=(-\infty,1)\ \kappa\alpha\iota\ 0\in(-\infty,1)\ \ \upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota\ x_2\in(0,+\infty)$

$\tau\acute{\varepsilon}\tau o\iota o\ \acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon\ f(x_2)=0$

$\acute{E}\chi\omega: x_1<0<x_2 \Rightarrow x_1<x_2$

$(V)\,\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \alpha,\beta\in(0,+\infty)\ \kappa\alpha\iota\ f\left((0,+\infty)\right)=(-\infty,1)\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$f(\alpha)<1,\ f(\beta)<1$

$\Theta\varepsilon\omega\rho\acute{\omega}\ \tau\eta\nu\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ \mu\varepsilon\ \tau\acute{\upsilon}\pi o$

$g(x)=(x-2)\left(f(\alpha)-1\right)+(x-1)\left(f(\beta)-1\right)-210(x-1)(x-2)$

$g(1)=-\left(f(\alpha)-1\right)=1-f(\alpha)>0$

$\left(\acute{E}\chi\omega: f(\alpha)<1 \Leftrightarrow 1>f(\alpha) \Leftrightarrow 1-f(\alpha)>0\right)$

$g(2)=f(\beta)-1<0$

$\left(\text{Έ}\chi\omega: f(\beta)<1 \Leftrightarrow f(\beta)-1<0\right)$

$$\left.\begin{cases} g(1)>0 \\ g(2)<0 \end{cases}\right\} \Rightarrow g(1)g(2)<0$$

$$\text{Έ}\chi\omega: \left.\begin{cases} (\mathrm{I})\,\text{Η συνάρτηση } g \text{ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα} \\ [1,2] \text{ ως πολυωνυμική} \\ (\mathrm{II})\, g(1)g(2)<0 \end{cases}\right\}$$

Οπότε η συνάρτηση g ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του Bolzano στο κλειστό διάστημα $[1,2]$.Συνεπώς υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $g(\xi)=0$

$$\left.\begin{cases} g(\xi)=0 \\ \xi \in (1,2) \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} (\xi-2)\left(f(\alpha)-1\right)+(\xi-1)\left(f(\beta)-1\right)-210(\xi-1)(\xi-2)=0 \\ 1<\xi<2, \xi \neq 1, \xi \neq 2 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{cases} (\xi-2)\left(f(\alpha)-1\right)+(\xi-1)\left(f(\beta)-1\right)=210(\xi-1)(\xi-2) \\ 1<\xi<2, \xi-1 \neq 0, \xi-2 \neq 0 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{cases} (\xi-2)\left(f(\alpha)-1\right)+(\xi-1)\left(f(\beta)-1\right)=210(\xi-1)(\xi-2) \\ 1<\xi<2, (\xi-1)(\xi-2) \neq 0 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{cases} \dfrac{(\xi-2)\left(f(\alpha)-1\right)+(\xi-1)\left(f(\beta)-1\right)}{(\xi-1)(\xi-2)} = \dfrac{210\cancel{(\xi-1)(\xi-2)}}{\cancel{(\xi-1)(\xi-2)}} \\ \xi \in (1,2) \end{cases}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{cases} \dfrac{\cancel{(\xi-2)}\left(f(\alpha)-1\right)}{(\xi-1)\cancel{(\xi-2)}} + \dfrac{\cancel{(\xi-1)}\left(f(\beta)-1\right)}{\cancel{(\xi-1)}(\xi-2)} = 210 \\ \xi \in (1,2) \end{cases}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{cases} \dfrac{f(\alpha)-1}{\xi-1} + \dfrac{f(\beta)-1}{\xi-2} = 210 \\ \xi \in (1,2) \end{cases}\right\}$$

(VI) Θεωρώ την συνάρτηση $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $h(x)=x+f(x)-\eta\mu x$

Τότε θα έχω:

$$h(x_1)=x_1+f(x_1)-\eta\mu x_1 \overset{f(x_1)=0}{=} x_1+0-\eta\mu x_1=x_1-\eta\mu x_1$$

$$h(x_2)=x_2+f(x_2)-\eta\mu x_2 \overset{f(x_2)=0}{=} x_2+0-\eta\mu x_2=x_2-\eta\mu x_2$$

<u>Γνωρίζω ότι αν $\alpha\neq 0$ ισχύει $|\eta\mu\alpha|<|\alpha|$</u>

Επειδή $x_1<0$ θα έχω:

$$|\eta\mu x_1|<|x_1| \overset{\substack{\text{Επειδή } x_1<0 \text{ θα}\\ \text{έχω}: |x_1|=-x_1}}{\Leftrightarrow} |\eta\mu x_1|<-x_1 \overset{|x|<\theta,\theta>0\Leftrightarrow-\theta<x<\theta}{\Leftrightarrow} -(-x_1)<\eta\mu x_1<-x_1\Leftrightarrow$$

$$x_1<\eta\mu x_1<-x_1\Rightarrow x_1<\eta\mu x_1\Rightarrow x_1-\eta\mu x_1<0\Rightarrow h(x_1)<0$$

Επειδή $x_2>0$ θα έχω:

$$|\eta\mu x_2|<|x_2| \overset{\substack{\text{Επειδή } x_2>0 \text{ θα}\\ \text{έχω}: |x_2|=x_2}}{\Leftrightarrow} |\eta\mu x_2|<x_2 \overset{|x|<\theta,\theta>0\Leftrightarrow-\theta<x<\theta}{\Leftrightarrow} -x_2<\eta\mu x_2<x_2\Rightarrow$$

$$x_2>\eta\mu x_2\Rightarrow x_2-\eta\mu x_2>0\Rightarrow h(x_2)>0$$

$$\left.\begin{cases} h(x_1)<0\\ h(x_2)>0\end{cases}\right\}\Rightarrow h(x_1)h(x_2)<0$$

$$\text{Έχω}:\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\text{Η συνάρτηση } h \text{ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα}\\ [x_1,x_2] \text{ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων}\\ (\mathrm{II})\,h(x_1)h(x_2)<0\end{array}\right\}$$

Οπότε η συνάρτηση h ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του Bolzano στο κλειστό διάστημα $[x_1,x_2]$. Συνεπώς υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε $h(x_0)=0$

$$\left.\begin{cases} h(x_0)=0\\ x_0\in(x_1,x_2)\end{cases}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{cases} x_0+f(x_0)-\eta\mu x_0=0\\ x_0\in(x_1,x_2)\end{cases}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{cases} x_0+f(x_0)=\eta\mu x_0\\ x_0\in(x_1,x_2)\end{cases}\right\}$$

$$(V)\left.\begin{cases} 2^{x+1}+2x+\ln\left(2^x+x-1\right)=6+\ln 2\\ x>0\end{cases}\right\} \overset{2^x+x-1=\left(2^x+x-2\right)+1}{\Leftrightarrow}$$

$$\left.\begin{cases} 2^{x+1}+2x+\ln\left[\left(2^x+x-2\right)+1\right]=6+\ln 2\\ x>0\end{cases}\right\} \overset{\text{Προσθέτω και στα δυο μέλη το } -4}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \underbrace{22^x+2x-4}_{\text{Βγάζω κοινό παράγοντα το 2}} + \ln\left[\left(2^x+x-2\right)+1\right] = -4+6+\ln 2 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(2^x+x-2\right)+\ln\left[\left(2^x+x-2\right)+1\right] = 2+\ln 2 \\ x>0 \end{cases} \overset{\text{Αλλάζω τα πρόσημα και στα δυο μέλη της ισότητα}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\begin{cases} -2\left(2^x+x-2\right)-\ln\left[\left(2^x+x-2\right)+1\right] = -2\bullet 1-\ln\left(1+1\right) \\ x>0 \end{cases} \overset{\text{Προσθέτω και στα δυο μέλη της ισότητας την μονάδα για να εμφανιστεί η συνάρτηση } f}{\Longleftrightarrow}$$

$$\begin{cases} 1-2\left(2^x+x-2\right)-\ln\left[\left(2^x+x-2\right)+1\right] = 1-2\bullet 1-\ln\left(1+1\right) \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} f\left(2^x+x-2\right) = f\left(1\right) \\ x>0 \end{cases} \overset{f \overset{\vee}{\downarrow}(0,+\infty)}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 2^x+x-2=1 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x+x-3=0 \\ x>0 \end{cases}$$

Θεωρώ την συνάρτηση $\mathrm{H}:\left(0,+\infty\right)\to\mathbb{R}$ *με τύπο* $\mathrm{H}\left(x\right)=2^x+x-3$

$$x_1<x_2 \Rightarrow \begin{cases} 2^{x_1}<2^{x_2} \\ x_1<x_2 \\ x_1,x_2\in\left(0,+\infty\right) \end{cases} \overset{(+)}{\Longrightarrow} \begin{cases} 2^{x_1}+x_1<2^{x_2}+x_2 \\ x_1,x_2\in\left(0,+\infty\right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2^{x_1}+x_1-3<2^{x_2}+x_2-3 \\ x_1,x_2\in\left(0,+\infty\right) \end{cases} \Rightarrow \mathrm{H}\left(x_1\right)<\mathrm{H}\left(x_2\right)$$

Συνεπώς $\mathrm{H}\underset{\wedge}{\uparrow}\left(0,+\infty\right)$. *Άρα η* Η *είναι* "1−1"

$$\mathrm{H}\left(1\right)=2^1+1-3=3-3=0$$

$$\begin{cases} 2^x+x-3=0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{H}\left(x\right)=\mathrm{H}\left(1\right) \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$$

4.

Δίνονται η συνάρτηση f *η οποία είναι συνεχής στο διάστημα* $\left[2,8\right]$
με $f\left(2\right)f\left(4\right)f\left(8\right)=64$ *και* $f(x)\neq 0$ *για κάθε* $x\in\left[2,8\right]$
Να αποδείξετε οτι:
(I) $f(x)>0$ *για κάθε* $x\in\left[2,8\right]$
(II) Η *εξίσωση* $f(x)=4$ *έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα* $\left[2,8\right]$
(III) Η *εξίσωση* $f(x)=x$ *έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο* $\left[2,8\right]$

$$(\mathrm{I})\,Έχω:\begin{cases}(\mathrm{I})\,\mathrm{H}\ f\ είναι\ συνεχής\ στο\ [2,8]\\(\mathrm{II})\,f(x)\neq 0\ για\ κάθε\ x\in[2,8]\end{cases}$$

Οπότε $f(x)>0$ *για κάθε* $x\in[2,8]$ *ή* $f(x)<0$ *για κάθε* $x\in[2,8]$

Έστω $f(x)<0$ *για κάθε* $x\in[2,8]$.Τ*ότε θα έχω*:

$$\begin{rcases}f(2)<0\\f(4)<0\\f(8)<0\end{rcases}\Rightarrow f(2)f(4)f(8)<0\overset{f(2)f(4)f(8)=64}{\Longrightarrow}64<0(Άτοπο)$$

Οπότε $f(x)>0$ *για κάθε* $x\in[2,8]$

(II)Ε*πειδή η συνάρτηση* f *είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα* $[2,8]$

τότε παίρνει στο $[2,8]$ *μέγιστη τιμή* M *και ελάχιστη τιμή* m

Ο*πότε υπάρχουν* $x_1,x_2\in[2,8]$ *με* $f(x_1)=m, f(x_2)=M$ *τέτοια ώστε*

$m\leq f(x)\leq M$ *για κάθε* $x\in[2,8]$

$$\begin{rcases}m\leq f(2)\leq M\\m\leq f(4)\leq M\\m\leq f(8)\leq M\end{rcases}\overset{\substack{\text{Μπορώ να πολλαπλασιάσω}\\\text{ομόστροφες ανισώσεις κατα μέλη}\\\text{αρκεί όλα τα μέλη τους να}\\\text{είναι μη ανητικοί αριθμοί}}}{\Longrightarrow}\quad m\bullet m\bullet m\leq f(2)f(4)f(8)\leq M\bullet M\bullet M^2\Rightarrow$$

$$m^3\leq f(2)f(4)f(8)\leq M^3\Rightarrow\sqrt[3]{m^3}\leq\sqrt[3]{f(2)f(4)f(8)}\leq\sqrt[3]{M^3}\overset{\sqrt[\nu]{\theta^\nu}=\theta,\theta\geq 0}{\Longrightarrow}$$

$$m\leq\sqrt[3]{f(2)f(4)f(8)}\leq M$$

Δ*ιακρίνω τις περιπτώσεις* :

$$\begin{cases}(\mathrm{I})\,m=\sqrt[3]{f(2)f(4)f(8)}\\(\mathrm{II})\,M=\sqrt[3]{f(2)f(4)f(8)}\\(\mathrm{III})\,m<\sqrt[3]{f(2)f(4)f(8)}<M\end{cases}$$

$$Περίπτωση(\mathrm{I}):m=\sqrt[3]{f(2)f(4)f(8)}\overset{m=f(x_1),x_1\in[2,8]}{\Longrightarrow}$$

$$\begin{rcases}f(x_1)=\sqrt[3]{f(2)f(4)f(8)}\\x_1\in[2,8]\end{rcases}$$

Ο*πότε υπάρχει* $\xi\in[2,8]$ *με* $f(\xi)=\sqrt[3]{f(2)f(4)f(8)}$

$\Pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\pi\tau\omega\sigma\eta(\mathrm{II}): M=\sqrt[3]{f(2)f(4)f(8)} \overset{M=f(x_2),x_2\in[2,8]}{\Longrightarrow}$

$$\begin{cases} f(x_2)=\sqrt[3]{f(2)f(4)f(8)} \\ x_2\in[2,8] \end{cases}$$

$O\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota\ \xi\in[2,8]\ \mu\varepsilon\ f(\xi)=\sqrt[3]{f(2)f(4)f(8)}$

$\Pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\pi\tau\omega\sigma\eta(\mathrm{III}): m<\sqrt[3]{f(2)f(4)f(8)}<M \Rightarrow f(x_1)<\sqrt[3]{f(2)f(4)f(8)}<f(x_2)$

<u>$\mathrm{A}\nu\ x_1<x_2$</u>

$$\acute{E}\chi\omega:\begin{cases} (\mathrm{I})\,\mathrm{H}\ f\,\varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ \kappa\lambda\varepsilon\iota\sigma\tau\acute{o}\ \delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\mu\alpha\ [x_1,x_2] \\ (\mathrm{II})\,f(x_1)\neq f(x_2) \\ (\mathrm{III})\,f(x_1)<\sqrt[3]{f(2)f(4)f(8)}<f(x_2) \end{cases}$$

$\mathrm{T}\acute{o}\tau\varepsilon\ \sigma\acute{\upsilon}\mu\varphi\omega\nu\alpha\ \mu\varepsilon\ \tau o\ \theta\varepsilon\acute{\omega}\rho\eta\mu\alpha\ \tau\omega\nu\ \varepsilon\nu\delta\iota\acute{\alpha}\mu\varepsilon\sigma\omega\nu\ \tau\iota\mu\acute{\omega}\nu\ \theta\alpha$
$\upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota\ \xi\in(x_1,x_2)\ \tau\acute{\varepsilon}\tau o\iota o\ \acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon\ f(\xi)=\sqrt[3]{f(2)f(4)f(8)}$

$$\begin{cases} f(\xi)=\sqrt[3]{f(2)f(4)f(8)} \\ \xi\in(x_1,x_2) \end{cases} \overset{(x_1,x_2)\subseteq(2,8)}{\Longrightarrow} \begin{cases} f(\xi)=\sqrt[3]{f(2)f(4)f(8)} \\ \xi\in(2,8) \end{cases}$$

<u>$\mathrm{A}\nu\ x_1>x_2$</u>

$$\acute{E}\chi\omega:\begin{cases} (\mathrm{I})\,\mathrm{H}\ f\,\varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ \kappa\lambda\varepsilon\iota\sigma\tau\acute{o}\ \delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\mu\alpha\ [x_2,x_1] \\ (\mathrm{II})\,f(x_1)\neq f(x_2) \\ (\mathrm{III})\,f(x_1)<\sqrt[3]{f(2)f(4)f(8)}<f(x_2) \end{cases}$$

$\mathrm{T}\acute{o}\tau\varepsilon\ \sigma\acute{\upsilon}\mu\varphi\omega\nu\alpha\ \mu\varepsilon\ \tau o\ \theta\varepsilon\acute{\omega}\rho\eta\mu\alpha\ \tau\omega\nu\ \varepsilon\nu\delta\iota\acute{\alpha}\mu\varepsilon\sigma\omega\nu\ \tau\iota\mu\acute{\omega}\nu\ \theta\alpha$
$\upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota\ \xi\in(x_2,x_1)\ \tau\acute{\varepsilon}\tau o\iota o\ \acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon\ f(\xi)=\sqrt[3]{f(2)f(4)f(8)}$

$$\begin{cases} f(\xi)=\sqrt[3]{f(2)f(4)f(8)} \\ \xi\in(x_2,x_1) \end{cases} \overset{(x_2,x_1)\subseteq(2,8)}{\Longrightarrow} \begin{cases} f(\xi)=\sqrt[3]{f(2)f(4)f(8)} \\ \xi\in(2,8) \end{cases}$$

$O\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\begin{cases} f(\xi)=\sqrt[3]{f(2)f(4)f(8)} \\ \xi\in[2,8] \end{cases} \overset{f(2)f(4)f(8)=64}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} f(\xi)=\sqrt[3]{64} \\ \xi\in[2,8] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(\xi)=4 \\ \xi\in[2,8] \end{cases}$$

(III) <u>$\acute{E}\sigma\tau\omega\ f(x)\neq x\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in[2,8]$</u>

$$\begin{cases} f(x)\neq x \\ \Gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in[2,8] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)-x\neq 0 \\ \Gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in[2,8] \end{cases}$$

$\Theta\varepsilon\omega\rho\acute{\omega}\ \tau\eta\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ g(x)=f(x)-x, \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in[2,8]$

$$\acute{E}\chi\omega:\begin{cases}(\mathrm{I})\ \mathrm{H}\ g\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ [2,8]\ \omega\varsigma\ \delta\iota\alpha\varphi o\rho\acute{\alpha}\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\omega}\nu\ \sigma\upsilon\nu\alpha\rho\tau\acute{\eta}\sigma\varepsilon\omega\nu \\ (\mathrm{II})\ g(x)\neq 0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in[2,8]\end{cases}$$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ g(x)>0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in[2,8]\ \acute{\eta}\ g(x)<0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in[2,8]$

$\acute{E}\sigma\tau\omega\ g(x)>0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in[2,8]. \mathrm{T}\acute{o}\tau\varepsilon\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\left.\begin{cases}g(x)>0 \\ \Gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in[2,8]\end{cases}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{cases}f(x)-x>0 \\ \Gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in[2,8]\end{cases}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{cases}f(x)>x \\ \Gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in[2,8]\end{cases}\right\}$$

$$\left.\begin{cases}f(2)>2 \\ f(4)>4 \\ f(8)>8 \\ f(2), f(4), f(8)>0\end{cases}\right\}\xRightarrow{\substack{\mathrm{M}\pi o\rho\acute{\omega}\ \nu\alpha\ \pi o\lambda\lambda\alpha\pi\lambda\alpha\sigma\iota\acute{\alpha}\sigma\omega \\ o\mu\acute{o}\sigma\tau\rho o\varphi\varepsilon\varsigma\ \alpha\nu\iota\sigma\acute{\omega}\sigma\varepsilon\iota\varsigma\ \kappa\alpha\tau\alpha\ \mu\acute{\varepsilon}\lambda\eta \\ \alpha\rho\kappa\varepsilon\acute{\iota}\ \tau\alpha\ \mu\acute{\varepsilon}\lambda\eta\ \tau o\upsilon\varsigma\ \nu\alpha\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \mu\eta\ \alpha\rho\nu\eta\tau\iota\kappa o\acute{\iota} \\ \alpha\rho\iota\theta\mu o\acute{\iota}}} f(2)f(4)f(8)>2\bullet 4\bullet 8 \xRightarrow{f(2)f(4)f(8)=64}$$

$64>64(\acute{A}\tau o\pi o)$

$\acute{E}\sigma\tau\omega\ g(x)<0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in[2,8]. \mathrm{T}\acute{o}\tau\varepsilon\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\left.\begin{cases}g(x)<0 \\ \Gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in[2,8]\end{cases}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{cases}f(x)-x<0 \\ \Gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in[2,8]\end{cases}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{cases}f(x)<x \\ \Gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in[2,8]\end{cases}\right\}$$

$$\left.\begin{cases}f(2)<2 \\ f(4)<4 \\ f(8)<8 \\ f(2), f(4), f(8)>0\end{cases}\right\}\xRightarrow{\substack{\mathrm{M}\pi o\rho\acute{\omega}\ \nu\alpha\ \pi o\lambda\lambda\alpha\pi\lambda\alpha\sigma\iota\acute{\alpha}\sigma\omega \\ o\mu\acute{o}\sigma\tau\rho o\varphi\varepsilon\varsigma\ \alpha\nu\iota\sigma\acute{\omega}\sigma\varepsilon\iota\varsigma\ \kappa\alpha\tau\alpha\ \mu\acute{\varepsilon}\lambda\eta \\ \alpha\rho\kappa\varepsilon\acute{\iota}\ \tau\alpha\ \mu\acute{\varepsilon}\lambda\eta\ \tau o\upsilon\varsigma\ \nu\alpha\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \mu\eta\ \alpha\rho\nu\eta\tau\iota\kappa o\acute{\iota} \\ \alpha\rho\iota\theta\mu o\acute{\iota}}} f(2)f(4)f(8)>2\bullet 4\bullet 8 \xRightarrow{f(2)f(4)f(8)=64}$$

$64<64(\acute{A}\tau o\pi o)$

$\acute{A}\rho\alpha\ \delta\varepsilon\nu\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\ f(x)\neq x\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in[2,8]. \mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota\ \acute{\varepsilon}\nu\alpha\ \tau o\upsilon\lambda\acute{\alpha}\chi\iota\sigma\tau o\nu$

$\xi\in[2,8]\ \tau\acute{\varepsilon}\tau o\iota o\ \acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon\ f(\xi)=\xi$

5.

$\acute{E}\sigma\tau\omega\ \eta\ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ \mu\iota\alpha\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ \mu\varepsilon\ \tau\eta\nu\ \iota\delta\iota\acute{o}\tau\eta\tau\alpha$
$(f(x)-2000)(f(x)-2002)=0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in\mathbb{R}$
I)N$\alpha\ \alpha\pi o\delta\varepsilon\acute{\iota}\xi\varepsilon\tau\varepsilon\ o\tau\iota\ f(\mathbb{R})\subseteq\{2000,2002\}$
II)N$\alpha\ \alpha\pi o\delta\varepsilon\acute{\iota}\xi\varepsilon\tau\varepsilon\ o\tau\iota\ \eta\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\eta}$
III)N$\alpha\ \beta\rho\varepsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\ o\ \tau\acute{\upsilon}\pi o\varsigma\ \tau\eta\varsigma\ f$

$$\text{I)}(f(x)-2000)(f(x)-2002)=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} f(x)-2000=0 \\ \acute{\eta} \\ f(x)-2002=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} f(x)=2000 \\ \acute{\eta} \\ f(x)=2002 \end{matrix}\right\}$$

Ο*πότε* : $f(\mathbb{R}) \subseteq \{2000, 2002\}$

II)*Έστω η συνάρτηση* f *δεν είναι σταθερή τότε θα υπάρχουν* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ *με* $x_1 \neq x_2$, $f(x_1)=2000$, $f(x_2)=2002$

Δ*ιακρίνω τις περιπτώσεις* : $\begin{cases} 1^{\eta})x_1 < x_2 \\ 2^{\eta})x_1 > x_2 \end{cases}$

Π*ερίπτωση* 1^{η} :

$$\begin{cases} \text{I)Η } f \text{ είναι συνεχής στο διάστημα } [x_1, x_2] \\ \text{II)} f(x_1) \neq f(x_2) \end{cases}$$

Ο*πότε σύμφωνα με το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών κάθε αριθμός που βρίσκεται μεσταξύ του* $f(x_1)$ *και* $f(x_2)$ *είναι τιμή της συνάρτησης* f.*Άτοπο γιατί η συνάτηση* f *έχει μόνο ως τιμές τους αριθμούς* 2000, 2002

Π*ερίπτωση* 2^{η} :

$$\begin{cases} \text{I)Η } f \text{ είναι συνεχής στο διάστημα } [x_2, x_1] \\ \text{II)} f(x_1) \neq f(x_2) \end{cases}$$

Ο*πότε σύμφωνα με το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών κάθε αριθμός που βρίσκεται μεσταξύ του* $f(x_1)$ *και* $f(x_2)$ *είναι τιμή της συνάρτησης* f.*Άτοπο γιατί η συνάτηση* f *έχει μόνο ως τιμές τους αριθμούς* 2000, 2002

Σ*υνεπώς η* f *είναι σταθερή συνάρτηση*

III)Ε*πειδή* f *είναι μια σταθερή συνάρτηση θα έχω*:

$f(x)=c$, *για κάθε* $x \in \mathbb{R}$

$$\big(f(x)-2000\big)\big(f(x)-2002\big)=0 \overset{f(x)=c \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{matrix} c-2000=0 \\ \acute{\eta} \\ c-2002=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} c=2000 \\ \acute{\eta} \\ c=2002 \end{matrix}\right\}$$

6.

$\Delta\acute{\iota}\nu\varepsilon\tau\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ \gamma\iota\alpha\ \tau\eta\nu\ o\pi o\acute{\iota}\alpha\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota:$

$f^3(x)+2f(x)=x+2014\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in\mathbb{R}$

$(\mathrm{I})\ \mathrm{N}\alpha\ \alpha\pi o\delta\varepsilon\acute{\iota}\xi\varepsilon\tau\varepsilon\ o\tau\iota\ \eta\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma$

$(\mathrm{II})\ \mathrm{A}\nu\ \alpha<\beta\ \nu\alpha\ \alpha\pi o\delta\varepsilon\acute{\iota}\xi\varepsilon\tau\varepsilon\ o\tau\iota\ \upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota\ \xi\in[\alpha,\beta]\ \tau\acute{\varepsilon}\tau o\iota o\ \acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon:$

$$f(\xi)=\frac{1}{6}\left[f(\alpha)+2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+3f(\beta)\right]$$

$(\mathrm{I})\ \mathrm{A}\nu\ x_0\in\mathbb{R}.\ \Theta\alpha\ \alpha\pi o\delta\varepsilon\acute{\iota}\xi\omega\ o\tau\iota:\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

$$\left.\begin{cases}f^3(x)+2f(x)=x+2014\\ f^3(x_0)+2f(x_0)=x_0+2014\end{cases}\right\}(-)$$

$$f^3(x)+2f(x)-\left(f^3(x_0)+2f(x_0)\right)=x+2014-(x_0+2014)\Rightarrow$$

$$f^3(x)-f^3(x_0)+2f(x)-2f(x_0)=x+2014-x_0+2014\overset{\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}{\Longrightarrow}$$

$$[f(x)-f(x_0)]\left[f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)\right]+2[f(x)-f(x_0)]=x-x_0\Rightarrow$$

$$[f(x)-f(x_0)]\left[f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+2\right]=x-x_0\ (1)$$

$$f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+2=f^2(x)+2f(x)\frac{f(x_0)}{2}+\left(\frac{f(x_0)}{2}\right)^2-\left(\frac{f(x_0)}{2}\right)^2+f^2(x_0)+2$$

$$=\left[f(x)+\frac{f(x_0)}{2}\right]^2-\frac{f^2(x_0)}{4}+\frac{4f^2(x_0)}{4}+2=\left[f(x)+\frac{f(x_0)}{2}\right]^2+\frac{3f^2(x_0)}{4}+2$$

$$\left.\begin{cases}\left[f(x)+\dfrac{f(x_0)}{2}\right]^2\geq 0\\ \dfrac{3f^2(x_0)}{4}\geq 0\end{cases}\right\}(+)$$

$$\left[f(x)+\frac{f(x_0)}{2}\right]^2+\frac{3f^2(x_0)}{4}\geq 0\Rightarrow\left[f(x)+\frac{f(x_0)}{2}\right]^2+\frac{3f^2(x_0)}{4}+2\geq 2>0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[f(x)+\frac{f(x_0)}{2}\right]^2+\frac{3f^2(x_0)}{4}+2>0\Rightarrow\left[f(x)+\frac{f(x_0)}{2}\right]^2+\frac{3f^2(x_0)}{4}+2\neq 0$$

$\mathrm{A}\pi o\ \tau\eta\nu\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\eta\ (1)\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$[f(x)-f(x_0)]\left[f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+2\right]=x-x_0\overset{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+2\neq 0}{\Longrightarrow}$$

$$f(x)-f(x_0)=\frac{x-x_0}{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+2}\Rightarrow$$

$$\left|f(x)-f(x_0)\right|=\left|\frac{x-x_0}{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+2}\right|\Rightarrow$$

$$\left|f(x)-f(x_0)\right|=\frac{\left|x-x_0\right|}{\left|f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+2\right|}\xRightarrow[\left|f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+2\right|=f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+2]{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+2>0\Rightarrow}$$

$$\left|f(x)-f(x_0)\right|=\frac{\left|x-x_0\right|}{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+2}$$

$\acute{E}\chi\omega: f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+2\geq 2\Rightarrow \dfrac{1}{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+2}\leq\dfrac{1}{2}\Rightarrow$

$$\frac{\left|x-x_0\right|}{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+2}\leq\frac{\left|x-x_0\right|}{2}\Rightarrow\left|f(x)-f(x_0)\right|\leq\frac{\left|x-x_0\right|}{2}\Rightarrow$$

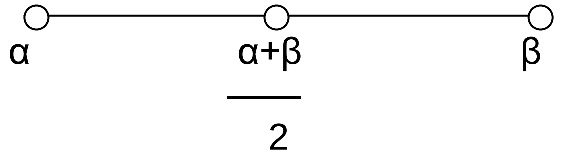
$$-\frac{\left|x-x_0\right|}{2}\leq f(x)-f(x_0)\leq\frac{\left|x-x_0\right|}{2}\Rightarrow-\frac{\left|x-x_0\right|}{2}+f(x_0)\leq f(x)\leq\frac{\left|x-x_0\right|}{2}+f(x_0)$$

$$\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})-\dfrac{\left|x-x_0\right|}{2}+f(x_0)\leq f(x)\leq\dfrac{\left|x-x_0\right|}{2}+f(x_0)\\(\mathrm{II})\lim\limits_{x\to x_0}\left(-\dfrac{\left|x-x_0\right|}{2}+f(x_0)\right)=\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{\left|x-x_0\right|}{2}+f(x_0)\right)=f(x_0)\end{array}\right\}$$

Ο*πότε απο το κριτήριο της παρεμβολής θα έχω* $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.*Άρα η* f *είναι συνεχής στο τυχαίο* $x_0\in\mathbb{R}$.Ε*πειδή η συνάρτηση* f *είναι συνεχής στο τυχαίο* $x_0\in\mathbb{R}$ *θα είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού οπότε θα είναι συνεχής.*

(ΙΙ)Ε*πειδή η συνάρτηση* f *είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα* $[\alpha,\beta]$*τότε παίρνει στο* $[\alpha,\beta]$ *μέγιστη τιμή* M *και ελάχιστη τιμή* m

Ο*πότε υπάρχουν* $x_1,x_2\in[\alpha,\beta]$ *με* $f(x_1)=m, f(x_2)=M$ *τέτοια ώστε* $m\leq f(x)\leq M$ *για κάθε* $x\in[\alpha,\beta]$



$$\left.\begin{cases} m \le f(\alpha) \le M \\ m \le f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) \le M \\ m \le f(\beta) \le M \end{cases}\right\} \Rightarrow \left.\begin{cases} m \le f(\alpha) \le M \\ 2m \le 2f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) \le 2M \\ 3m \le 3f(\beta) \le 3M \end{cases}\right\} \overset{(+)}{\Longrightarrow}$$

$$m+3m+3m \le f(\alpha)+2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+3f(\beta) \le M+2M+3M \Rightarrow$$

$$6m \le f(\alpha)+2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+3f(\beta) \le 5M \Rightarrow m \le \frac{f(\alpha)+2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+3f(\beta)}{6} \le M$$

$\Delta\iota\alpha\kappa\rho\acute{\iota}\nu\omega\ \tau\iota\varsigma\ \pi\varepsilon\rho\iota\pi\tau\acute{\omega}\sigma\varepsilon\iota\varsigma:$

$$\left\{\begin{array}{l} (\mathrm{I})\, m = \dfrac{f(\alpha)+2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+3f(\beta)}{6} \\ (\mathrm{II})\, M = \dfrac{f(\alpha)+2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+3f(\beta)}{6} \\ (\mathrm{III})\, m < \dfrac{f(\alpha)+2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+3f(\beta)}{6} < M \end{array}\right\}$$

$$\Pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\pi\tau\omega\sigma\eta(\mathrm{I}): m = \frac{f(\alpha)+2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+3f(\beta)}{6} \overset{m=f(x_1),x_1\in[\alpha,\beta]}{\Longrightarrow}$$

$$\left.\begin{cases} f(x_1) = \dfrac{f(\alpha)+2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+3f(\beta)}{6} \\ x_1 \in [\alpha,\beta] \end{cases}\right\}$$

$$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota\ \xi \in [\alpha,\beta]\ \ \mu\varepsilon\ f(\xi) = \frac{f(\alpha)+2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+3f(\beta)}{6}$$

$$\Pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\pi\tau\omega\sigma\eta(\mathrm{II}): M = \frac{f(\alpha)+2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+3f(\beta)}{6} \overset{M=f(x_2),x_2\in[\alpha,\beta]}{\Longrightarrow}$$

$$\left.\begin{cases} f(x_2) = \dfrac{f(\alpha)+2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+3f(\beta)}{6} \\ x_2 \in [\alpha,\beta] \end{cases}\right\}$$

$$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota\ \xi \in [\alpha,\beta]\ \ \mu\varepsilon\ f(\xi) = \frac{f(\alpha)+2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+3f(\beta)}{6}$$

$$\Pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\pi\tau\omega\sigma\eta\left(\mathrm{III}\right): m<\frac{f\left(\alpha\right)+2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+3f\left(\beta\right)}{6}<M\Rightarrow$$

$$f\left(x_1\right)<\frac{f\left(\alpha\right)+2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+3f\left(\beta\right)}{6}<f\left(x_2\right)$$

$\underline{\mathrm{A}\nu\ x_1<x_2}$

$$\acute{E}\chi\omega:\left\{\begin{array}{l}\left(\mathrm{I}\right)\mathrm{H}\ f\,\varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ \kappa\lambda\varepsilon\iota\sigma\tau\acute{o}\ \delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\mu\alpha\ \left[x_1,x_2\right]\\ \left(\mathrm{II}\right)f\left(x_1\right)\neq f\left(x_2\right)\\ \left(\mathrm{III}\right)f\left(x_1\right)<\frac{f\left(\alpha\right)+2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+3f\left(\beta\right)}{6}<f\left(x_2\right)\end{array}\right\}$$

Τότε σύμφωνα με το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών θα

υπάρχει $\xi\in\left(x_1,x_2\right)$ *τέτοιο ώστε* $f\left(\xi\right)=\frac{f\left(\alpha\right)+2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+3f\left(\beta\right)}{6}$

$$\left\{\begin{array}{l}f\left(\xi\right)=\frac{f\left(\alpha\right)+2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+3f\left(\beta\right)}{6}\\ \xi\in\left(x_1,x_2\right)\end{array}\right\}\overset{\left(x_1,x_2\right)\subseteq\left(\alpha,\beta\right)}{\Longrightarrow}\left\{\begin{array}{l}f\left(\xi\right)=\frac{f\left(\alpha\right)+2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+3f\left(\beta\right)}{6}\\ \xi\in\left(\alpha,\beta\right)\end{array}\right\}$$

$\underline{\mathrm{A}\nu\ x_1>x_2}$

$$\acute{E}\chi\omega:\left\{\begin{array}{l}\left(\mathrm{I}\right)\mathrm{H}\ f\,\varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ \kappa\lambda\varepsilon\iota\sigma\tau\acute{o}\ \delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\mu\alpha\ \left[x_2,x_1\right]\\ \left(\mathrm{II}\right)f\left(x_1\right)\neq f\left(x_2\right)\\ \left(\mathrm{III}\right)f\left(x_1\right)<\frac{f\left(\alpha\right)+2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+3f\left(\beta\right)}{6}<f\left(x_2\right)\end{array}\right\}$$

Τότε σύμφωνα με το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών θα

υπάρχει $\xi\in\left(x_2,x_1\right)$ *τέτοιο ώστε* $f\left(\xi\right)=\frac{f\left(\alpha\right)+2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+3f\left(\beta\right)}{6}$

$$\left\{\begin{array}{l}f\left(\xi\right)=\frac{f\left(\alpha\right)+2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+3f\left(\beta\right)}{6}\\ \xi\in\left(x_2,x_1\right)\end{array}\right\}\overset{\left(x_1,x_2\right)\subseteq\left(\alpha,\beta\right)}{\Longrightarrow}\left\{\begin{array}{l}f\left(\xi\right)=\frac{f\left(\alpha\right)+2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+3f\left(\beta\right)}{6}\\ \xi\in\left(\alpha,\beta\right)\end{array}\right\}$$

7.

Να $\chi\alpha\rho\alpha\kappa\tau\eta\rho\acute{\iota}\sigma\varepsilon\tau\varepsilon$ τις παρακάτω προτάσεις ως (Σ) ή (Λ)
(I) Αν οι συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f\circ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχείς τότε και η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής
(II) Αν οι συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f+g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχείς τότε και η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής
(III) Δίνονται οι συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x)=\lvert f(x)\rvert$ Αν η συνάρτηση $g(x)=\lvert f(x)\rvert$ είναι συνεχής τότε και η f είναι συνεχής
(IV) Δίνονται οι συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x)=\lvert f(x)\rvert$ Αν η συνάρτηση $g(x)=\lvert f(x)\rvert$ είναι συνεχής στο σημείο x_0 με $g(x_0)=0$ τότε και η f είναι συνεχής στο x_0
(V) Δίνονται οι συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x)=f(x)\eta\mu\frac{1}{x}$ όταν $x\neq 0$ Αν οι συναρτήσεις f,g είναι συνεχείς στο σημείο 0 με $f(0)=0$ τότε $g(0)=0$

(I) Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=\lvert x\rvert$ και $g(x)=\begin{cases}1, x\le 0\\ -1, x>0\end{cases}$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=1\neq -1=\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ η συνάρτηση g είναι ασυνεχής στο 0

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\lvert g(x)\rvert=\begin{cases}\lvert g(x)\rvert, x\le 0\\ \lvert g(x)\rvert, x>0\end{cases}=\begin{cases}\lvert 1\rvert, x\le 0\\ \lvert -1\rvert, x>0\end{cases}=1$$

Η συνάρτηση $f\circ g$ είναι συνεχής ως σταθερή

Οπότε αν $f, f\circ g$ συνεχείς συναρτήσεις δεν έπεται οτι και η g είναι συνεχή συνάρτηση.Συνεπώς $(\mathrm{I})\to(\Lambda)$

(II) Θεωρώ την συνάρτηση $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h=f+g$.Τότε θα έχω $g=h-f$

Η συνάρτηση g είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων

Οπότε $(\mathrm{II})\to(\Sigma)$

(III) Θεωρώ την συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}1, x\le 0\\ -1, x>0\end{cases}$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=1\neq -1=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ η συνάρτηση f είναι ασυνεχής στο 0

$$g(x)=\lvert f(x)\rvert=\begin{cases}\lvert f(x)\rvert, x\le 0\\ \lvert f(x)\rvert, x>0\end{cases}=\begin{cases}\lvert 1\rvert, x\le 0\\ \lvert -1\rvert, x>0\end{cases}=1$$

Η $\sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ g(x)=|f(x)|\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \omega\varsigma\ \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\eta}\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta$

Ο$\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \alpha\nu\ g(x)=|f(x)|\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \delta\varepsilon\nu\ \acute{\varepsilon}\pi\varepsilon\tau\alpha\iota\ \kappa\alpha\iota\ \eta\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma$

$\Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma\ (\mathrm{III})\rightarrow(\Lambda)$

$(\mathrm{IV})\,g(x_0)=0\Leftrightarrow|f(x_0)|=0\Leftrightarrow f(x_0)=0$

Ε$\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \eta\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ g(x)=|f(x)|\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\ x_0\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)=0$

$\Gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in\mathbb{R}\ \acute{\varepsilon}\chi\omega: |x|\le|x|\Leftrightarrow -|x|\le x\le|x|$

Ο$\pi\acute{o}\tau\varepsilon: -|f(x)|\le f(x)\le|f(x)|\Leftrightarrow -g(x)\le f(x)\le g(x)$

$$\acute{E}\chi\omega:\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})-g(x)\le f(x)\le g(x)\\ (\mathrm{II})\lim\limits_{x\to x_0}(-g(x))=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0\end{array}\right\}$$

Ο$\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \alpha\pi o\ \tau o\ \kappa\rho\iota\tau\acute{\eta}\rho\iota o\ \tau\eta\varsigma\ \pi\alpha\rho\varepsilon\mu\beta o\lambda\acute{\eta}\varsigma\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=0 \overset{f(x_0)=0}{\Longleftrightarrow} \lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

$\Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma\ \eta\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ x_0.\acute{A}\rho\alpha\ (\mathrm{I}V)\rightarrow(\Sigma)$

(V)Ε$\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \eta\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ 0\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0) \overset{f(0)=0}{\Longleftrightarrow} \lim_{x\to 0} f(x)=0$$

$$|g(x)|=\left|f(x)\eta\mu\frac{1}{x}\right|=|f(x)|\left|\eta\mu\frac{1}{x}\right|\le|f(x)|\bullet 1=|f(x)|$$

$$|g(x)|\le|f(x)|\Leftrightarrow -|f(x)|\le g(x)\le|f(x)|$$

$$\acute{E}\chi\omega:\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})-|f(x)|\le g(x)\le|f(x)|\\ (\mathrm{II})\lim\limits_{x\to 0}(-|f(x)|)=\lim\limits_{x\to 0}|f(x)|=0\end{array}\right\}$$

Ο$\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \alpha\pi o\ \tau o\ \kappa\rho\iota\tau\acute{\eta}\rho\iota o\ \tau\eta\varsigma\ \pi\alpha\rho\varepsilon\mu\beta o\lambda\acute{\eta}\varsigma\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$

Ε$\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \eta\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ g\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ 0\ \theta\alpha\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota:$

$g(0)=\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0\Rightarrow g(0)=0$

$\Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma\ (V)\rightarrow(\Sigma)$

8.

Δίνεται συνεχής και "1−1" συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1)f(2)<0$. Να αποδείξετε: (I) $f(3)f(4)>0$ (II) Η εξίσωση $\left(e^x-1\right)f\left(x\right)f\left(x+1\right)=3-x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(0,3\right)$

$$(\mathrm{I})\, Έχω: \left\{ \begin{array}{l} (\mathrm{I})\ \text{Η συνάρτηση } f \text{ είναι συνεχής στο κλειστό} \\ \text{διάστημα } [1,2] \\ (\mathrm{II})\ f(1)f(2)<0 \end{array} \right\}$$

Οπότε η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του Bolzano στο κλειστό διάστημα $[1,2]$. Οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=0$

$$Έστω\ f(3)f(4)\le 0. \text{ Διακρίνω τις περιπτώσεις}: \left\{ \begin{array}{l} (\mathrm{I})\ f(3)f(4)=0 \\ (\mathrm{II})\ f(3)f(4)<0 \end{array} \right\}$$

Περίπτωση (I):

$$f(3)f(4)=0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} f(3)=0 \\ ή \\ f(4)=0 \end{array} \right\}$$

Αν $f(3)=0$ θα έχω:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(3)=0 \\ f(\xi)=0 \\ \xi\in(1,2) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(\xi)=f(3) \\ \xi\in(1,2) \end{array} \right\} \overset{\text{Η συναρτηση } f \text{ είναι "1−1"}}{\Longrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} \xi=3 \\ \xi\in(1,2) \\ (Άτοπο) \end{array} \right\}$$

Αν $f(4)=0$ θα έχω:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(4)=0 \\ f(\xi)=0 \\ \xi\in(1,2) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(\xi)=f(4) \\ \xi\in(1,2) \end{array} \right\} \overset{\text{Η συναρτηση } f \text{ είναι "1−1"}}{\Longrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} \xi=4 \\ \xi\in(1,2) \\ (Άτοπο) \end{array} \right\}$$

$\Pi\varepsilon\rho i\pi\tau\omega\sigma\eta(\mathrm{II}):$

$$(\mathrm{I})\acute{E}\chi\omega:\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\mathrm{H}\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ \kappa\lambda\varepsilon\iota\sigma\tau\acute{o}\\ \delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\mu\alpha\ [3,4]\\ (\mathrm{II})\ f(3)f(4)<0\end{array}\right\}$$

Οπότε η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του Bolzano στο κλειστό διάστημα $[3,4]$.Οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1\in(3,4)$ τέτοιο ώστε $f(\xi_1)=0$

$$\left\{\begin{array}{l}f(\xi_1)=0\\ f(\xi)=0\\ \xi\in(1,2)\\ \xi_1\in(3,4)\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}f(\xi_1)=f(\xi)\\ \xi\in(1,2)\\ \xi_1\in(3,4)\end{array}\right\}\overset{\substack{\mathrm{H}\ \sigma\upsilon\nu\alpha\rho\tau\eta\sigma\eta\ f\\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ "1-1"}}{\Longrightarrow}\left\{\begin{array}{l}\xi_1=\xi\\ \xi\in(1,2)\\ \xi_1\in(3,4)\end{array}\right\}(\acute{A}\tau o\pi o)$$

$\Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma\ f(3)f(4)>0$

(II)Θεωρώ την συνάρτηση $g(x)=(e^x-1)f(x)f(x+1)-3+x$ με $x\in\mathbb{R}$

Η συνάρτηση $f(x+1)$ είναι συνεχής ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $x+1$ και f.Η συνάρτηση $(e^x-1)f(x)f(x+1)$ είναι συνεχής ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.Η συνάρτηση $g(x)=(e^x-1)f(x)f(x+1)-3+x$ είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων

$g(0)=(e^0-1)f(0)f(1)-3+0=-3<0$

$g(3)=(e-1)f(3)f(4)-3+3=(e-1)f(3)f(4)>0\left(\Gamma\iota\alpha\tau\iota\ e-1>0,\ f(3)f(4)>0\right)$

Οπότε$:g(0)g(3)<0$

$$\acute{E}\chi\omega:\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\mathrm{H}\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ g\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ \kappa\lambda\varepsilon\iota\sigma\tau\acute{o}\\ \delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\mu\alpha\ [0,3]\\ (\mathrm{II})\ g(0)g(3)<0\end{array}\right\}$$

Οπότε η συνάρτηση g ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του Bolzano στο κλειστό διάστημα $[0,3]$.Οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2\in(0,3)$ τέτοιο ώστε $g(\xi_2)=0$

$$\left\{\begin{array}{l}g(\xi_2)=0\\ \xi_2\in(0,3)\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}(e^{\xi_2}-1)f(\xi_2)f(\xi_2+1)-3+\xi_2=0\\ \xi_2\in(0,3)\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}(e^{\xi_2}-1)f(\xi_2)f(\xi_2+1)=3-\xi_2\\ \xi_2\in(0,3)\end{array}\right\}$$