

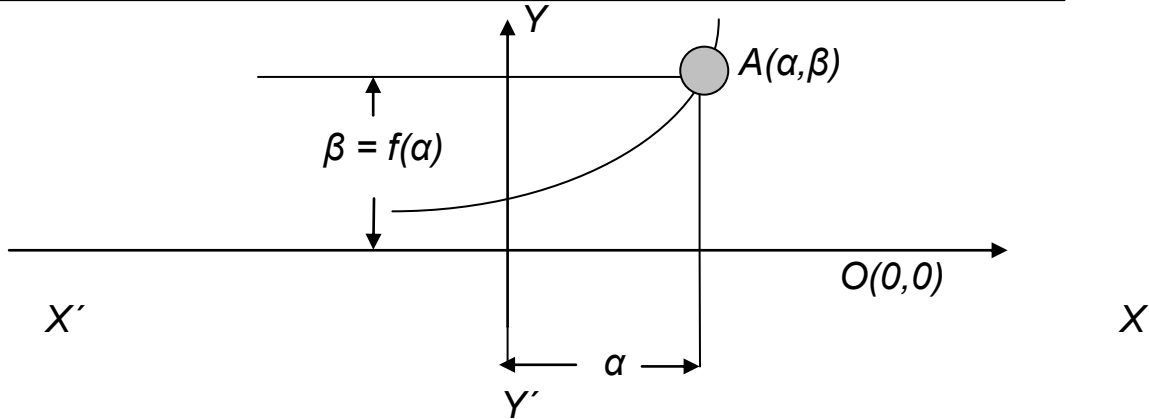
ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

Η συνάρτηση $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ (D_f : Το πεδίο ορισμού της f) είναι συνεχής στο σημείο $x_0 \in D_f$ όταν ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Το σημείο $A(\alpha, \beta)$ ανήκει στην γραφική παράσταση της συνάρτησης f όταν $\beta = f(\alpha)$ δηλ αν στο τύπο της f θέσω όπου x την τετμημένη του σημείου A θα πάρω την τεταγμένη του A

Το $A(\alpha, \beta)$ ανήκει στην γραφική παράσταση της συνάρτησης όταν : f (Τετμημένη του A) = Τεταγμένη του A



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1.

$$\text{Η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x}{x^2 - 7x + 6}, & x \in (-\infty, 1) \cup (1, 6) \cup (6, +\infty) \\ \alpha - \frac{\beta}{5}, & x = 1 \\ \alpha + \beta, & x = 6 \end{cases}$$

Να βρεθούν τα α, β όταν η συνάρτηση f είναι συνεχής στα σημείο $x_0 = 1$ και η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο $A(6, 7)$

Θεωρώ την δευτεροβάθμια εξίσωση $x^2 - 7x + 6 = 0$ (1)

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 49 - 24 = 25$$

Επειδή $\Delta > 0$ η δευτεροβάθμια εξίσωση (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες :

$$\rho_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2} = \begin{matrix} \nearrow \frac{7+5}{2} = \frac{12}{2} = 6 \\ \searrow \frac{7-5}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{matrix}$$

$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - \rho_1)(x - \rho_2)$
 ρ_1, ρ_2 : Οι ρίζες της δευτεροβάθμιας
 εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \alpha \neq 0$ με $\Delta > 0$

$$x^2 - 7x + 6 = (x - 6)(x - 1)$$

Αν $x \in (-\infty, 1) \cup (1, 6) \cup (6, +\infty)$ θα έχω :

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 7x + 6} = \frac{x \cancel{(x-1)}}{(x-6) \cancel{(x-1)}} = \frac{x}{x-6}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x-6} = \frac{1}{-5} = -\frac{1}{5}$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 1$ θα έχω :

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \stackrel{f(1) = \alpha - \frac{\beta}{5}}{\Leftrightarrow} \alpha - \frac{\beta}{5} = -\frac{1}{5} \Leftrightarrow 5\left(\alpha - \frac{\beta}{5}\right) = 5\left(-\frac{1}{5}\right) \Leftrightarrow 5\alpha - 5\frac{\beta}{5} = -1 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{5\alpha - \beta = -1} \quad (1)$$

$$A(6, 7) \in C_f \Leftrightarrow f(6) = 7 \stackrel{f(6) = \alpha + \beta}{\Leftrightarrow} \boxed{\alpha + \beta = 7} \quad (2)$$

Απο τις σχέσεις (1), (2) έχω :

$$\begin{cases} 5\alpha - \beta = -1 \\ \alpha + \beta = 7 \end{cases} (+)$$

$$5\alpha - \beta + \alpha + \beta = -1 + 7 \Leftrightarrow 6\alpha = 6 \Leftrightarrow \cancel{\beta} \cdot \alpha = \cancel{\beta} \cdot 1 \Leftrightarrow \alpha = 1$$

Αν $\alpha \neq 0$ ισχύει η
ισοδυναμία:
 $\alpha\beta = \alpha\gamma \Leftrightarrow \beta = \gamma$

Θέτω $\alpha = 1$ στην σχέση (2) :

$$\alpha + \beta = 7 \stackrel{\alpha=1}{\Leftrightarrow} 1 + \beta = 7 \Leftrightarrow \beta = 7 - 1 \Leftrightarrow \beta = 6$$

2.

$$\text{Η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2x^2+1}-3}{x^2-2x}, x \in (-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty) \\ 3\alpha^2 - 2\alpha + 1, x = 2 \\ \frac{(3\alpha+2)^{2013} + (6\alpha+1)^{2011} + (9\alpha)^{2009}}{(12\alpha-1)^{2009} + (24\alpha-5)^{2007} + (9\alpha^2+2)^{2005}}, x = 0 \end{cases}$$

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 2$ τότε :

(I) Να βρεθεί το α

(II) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο $A(0, 81)$

Αν $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$ θα έχω :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{2x^2+1}-3}{x^2-2x} \stackrel{\substack{\text{Πολλαπλασιάζω αριθμητή} \\ \text{και παρονομαστή με } \sqrt{2x^2+1+3} \\ \text{Παραγοντοποιώ το τριώνυμο} \\ x^2-2x=x(x-2)}}{=} \frac{(\sqrt{2x^2+1}-3)(\sqrt{2x^2+1+3})}{x(x-2)(\sqrt{2x^2+1+3})} \stackrel{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=\alpha^2-\beta^2}{=} \\ &= \frac{(\sqrt{2x^2+1})^2 - 3^2}{x(x-2)(\sqrt{2x^2+1+3})} \stackrel{(\sqrt{\alpha})^2=\alpha, \alpha \geq 0}{=} \frac{2x^2+1-9}{x(x-2)(\sqrt{2x^2+1+3})} \stackrel{\text{Βγάζω κοινό παράγοντα το 2}}{=} \\ &= \frac{2(x^2-4)}{x(x-2)(\sqrt{2x^2+1+3})} \stackrel{x^2-4=(x-2)(x+2)}{=} \frac{2\cancel{(x-2)}(x+2)}{x\cancel{(x-2)}(\sqrt{2x^2+1+3})} = \frac{2(x+2)}{x(\sqrt{2x^2+1+3})} \\ \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x+2)}{x(\sqrt{2x^2+1+3})} = \frac{\cancel{2} \cdot 4}{\cancel{2} (\sqrt{2 \cdot 2^2 + 1 + 3})} = \frac{4}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 2$ θα έχω:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \stackrel{f(2)=3\alpha^2-2\alpha+1}{\Leftrightarrow} 3\alpha^2 - 2\alpha + 1 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3(3\alpha^2 - 2\alpha + 1) = 3 \cdot \frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$$9\alpha^2 - 3 \cdot 2\alpha + 3 - 2 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{(3\alpha)^2 - 2 \cdot 3\alpha \cdot 1 + 1^2}_{x^2 - 2 \cdot x \cdot y + y^2 = (x-y)^2} = 0 \Leftrightarrow (3\alpha - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow 3\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$3\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{3}$$

$$(II) f(0) = \frac{(3\alpha + 2)^{2013} + (6\alpha + 1)^{2011} + (9\alpha)^{2009}}{(12\alpha - 1)^{2009} + (24\alpha - 5)^{2007} + (9\alpha^2 + 2)^{2005}} =$$

$$= \frac{\left(3\frac{1}{3} + 2\right)^{2013} + \left(6\frac{1}{3} + 1\right)^{2011} + \left(9\frac{1}{3}\right)^{2009}}{\left(12\frac{1}{3} - 1\right)^{2009} + \left(24\frac{1}{3} - 5\right)^{2007} + \left[9\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2\right]^{2005}} = \frac{3^{2013} + 3^{2011} + 3^{2009}}{3^{2009} + 3^{2007} + 3^{2005}} =$$

$$\frac{3^4 \cdot 3^{2009} + 3^{2009} 3^2 + 3^{2009}}{3^4 \cdot 3^{2005} + 3^{2005} 3^2 + 3^{2005}} = \frac{81 \cdot 3^{2009} + 9 \cdot 3^{2009} + 3^{2009}}{81 \cdot 3^{2005} + 9 \cdot 3^{2005} + 3^{2005}} = \frac{91 \cdot 3^{2009}}{91 \cdot 3^{2005}} = 3^4 = 81$$

Άρα $A(0, 81) \in C_f$

3.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{2x^2+1}}{\sqrt{2x^2+16} - 2\sqrt{x^2+4}}, & x \neq 0 \\ \alpha^3 + \alpha^2 - 2\alpha - 6, & x = 0 \end{cases}$$

Να βρεθεί το α όταν η συνάρτηση f είναι συνεχής στα σημείο $x_0 = 0$

Αν $x \neq 0$ θα έχω:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2x^2+1}}{\sqrt{2x^2+16}-2\sqrt{x^2+4}} \quad \begin{array}{l} \text{Πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρονομαστή με την παράσταση } \sqrt{x^2+1}+\sqrt{2x^2+1} \\ \text{Πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρονομαστή με την παράσταση } \sqrt{2x^2+16}+2\sqrt{x^2+4} \end{array} \\
 &= \frac{(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2x^2+1})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2x^2+1})(\sqrt{2x^2+16}+2\sqrt{x^2+4})}{(\sqrt{2x^2+16}-2\sqrt{x^2+4})(\sqrt{2x^2+16}+2\sqrt{x^2+4})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2x^2+1})} \quad (\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=\alpha^2-\beta^2 \\
 &= \frac{\left[(\sqrt{x^2+1})^2 - (\sqrt{2x^2+1})^2 \right] (\sqrt{2x^2+16}+2\sqrt{x^2+4})}{\left[(\sqrt{2x^2+16})^2 - (2\sqrt{x^2+4})^2 \right] (\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2x^2+1})} \quad \begin{array}{l} (\sqrt{\alpha})^2 = \alpha, \alpha \geq 0 \\ (\alpha\beta)^v = \alpha^v \beta^v \end{array} \\
 &= \frac{[x^2+1-(2x^2+1)](\sqrt{2x^2+16}+2\sqrt{x^2+4})}{[2x^2+16-4(x^2+4)](\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2x^2+1})} = \frac{(x^2+1-2x^2-1)(\sqrt{2x^2+16}+2\sqrt{x^2+4})}{(2x^2+16-4x^2-16)(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2x^2+1})} \\
 &= \frac{-x^2(\sqrt{2x^2+16}+2\sqrt{x^2+4})}{-2x^2(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2x^2+1})} = \frac{\sqrt{2x^2+16}+2\sqrt{x^2+4}}{2(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2x^2+1})} \\
 \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x^2+16}+2\sqrt{x^2+4}}{2(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2x^2+1})} = \frac{\sqrt{2 \cdot 0^2+16}+2\sqrt{0^2+4}}{2(\sqrt{0^2+1}+\sqrt{2 \cdot 0^2+1})} = \frac{2 \cdot 4}{2 \cdot 2} = 2
 \end{aligned}$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$ θα έχω:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} f(0) = \alpha^3 + \alpha^2 - 2\alpha - 6 \\ \alpha^3 + \alpha^2 - 2\alpha - 6 = 2 \Leftrightarrow \alpha^3 + \alpha^2 - 2\alpha - 8 = 0(1) \end{array}$$

Αν ρ ακέραια ρίζα της πολυωνυμικής εξίσωσης (1). Επειδή το ρ είναι ακέραια ρίζα μιας πολυωνυμικής εξίσωσης με ακεραίους συντελεστές θα πρέπει να διαιρεί το σταθερό όρο του πολυωνύμου. Οπότε ρ διαιρεί το -8 . Συνεπώς οι πιθανές τιμές του ρ είναι: $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$

Τότε απο το σχήμα του Horner για $\rho = 2$ θα έχω:

1	1	-2	-8	$\rho = 2$
/	$1 \cdot 2 = 2$	$3 \cdot 2 = 6$	$4 \cdot 2 = 8$	
1	$1 + 2 = 3$	$-2 + 6 = 4$	$-8 + 8 = 0$	

$$\pi(\alpha) = \alpha^2 + 3\alpha + 4, \nu = 0$$

$$\alpha^3 + \alpha^2 - 2\alpha - 8 = (x - \rho)\pi(\alpha) + \nu \stackrel{\substack{\rho=2 \\ \pi(\alpha)=\alpha^2+3\alpha+4 \\ \nu=0}}{=} (\alpha - 2)(\alpha^2 + 3\alpha + 4)$$

$$(1) \Leftrightarrow \alpha^3 + \alpha^2 - 2\alpha - 8 = 0 \Leftrightarrow (\alpha - 2)(\alpha^2 + 3\alpha + 4) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha - 2 = 0 \\ \text{ή} \\ \alpha^2 + 3\alpha + 4 = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 2 \\ \text{ή} \\ \alpha^2 + 3\alpha + 4 = 0(2) \end{array} \right.$$

$$\alpha^2 + 3\alpha + 4 = 0(2)$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9 - 16 = -7$$

Επειδή $\Delta < 0$ η δευτεροβάθμια εξίσωση (2) δεν έχει πραγματικές ρίζες

Οπότε $\alpha = 2$

4.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\eta\mu^2 x + 16} - 2\sqrt{4 + \eta\mu^2 x}}{\sqrt{\eta\mu^2 x + 1} - \eta\mu x - 1}, & x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ \alpha^2 \eta \mu \alpha + \eta \mu \alpha - \alpha^2 - 1, & x = 0 \end{cases}$$

Να βρεθεί το α ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\sqrt{\eta\mu^2x+16}-2\sqrt{4+\eta\mu^2x}}{\sqrt{\eta\mu^2x+1}-\eta\mu x-1} = \frac{\sqrt{\eta\mu^2x+16}-2\sqrt{4+\eta\mu^2x}}{\sqrt{\eta\mu^2x+1}-(\eta\mu x+1)} = \\
&= \frac{(\sqrt{\eta\mu^2x+16}-2\sqrt{4+\eta\mu^2x})(\sqrt{\eta\mu^2x+16}+2\sqrt{4+\eta\mu^2x})[\sqrt{\eta\mu^2x+1}+(\eta\mu x+1)]}{[\sqrt{\eta\mu^2x+1}-(\eta\mu x+1)][\sqrt{\eta\mu^2x+1}+(\eta\mu x+1)](\sqrt{\eta\mu^2x+16}+2\sqrt{4+\eta\mu^2x})} = \\
&= \frac{[(\sqrt{\eta\mu^2x+16})^2-(2\sqrt{4+\eta\mu^2x})^2](\sqrt{\eta\mu^2x+1}+\eta\mu x+1)}{[(\sqrt{\eta\mu^2x+1})^2-(\eta\mu x+1)^2](\sqrt{\eta\mu^2x+16}+2\sqrt{4+\eta\mu^2x})} = \\
&= \frac{[\eta\mu^2x+16-4(4+\eta\mu^2x)](\sqrt{\eta\mu^2x+1}+\eta\mu x+1)}{(\eta\mu^2x+1-\eta\mu^2x-1-2\eta\mu x)(\sqrt{\eta\mu^2x+16}+2\sqrt{4+\eta\mu^2x})} = \\
&= \frac{(\eta\mu^2x+16-16-4\eta\mu^2x)(\sqrt{\eta\mu^2x+1}+\eta\mu x+1)}{-2\eta\mu x(\sqrt{\eta\mu^2x+16}+2\sqrt{4+\eta\mu^2x})} = \\
&= \frac{-3\eta\mu^2x(\sqrt{\eta\mu^2x+1}+\eta\mu x+1)}{-2\eta\mu x(\sqrt{\eta\mu^2x+16}+2\sqrt{4+\eta\mu^2x})} = \frac{3\eta\mu x(\sqrt{\eta\mu^2x+1}+\eta\mu x+1)}{2(\sqrt{\eta\mu^2x+16}+2\sqrt{4+\eta\mu^2x})} \\
\lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x(\sqrt{\eta\mu^2x+1}+\eta\mu x+1)}{(\sqrt{\eta\mu^2x+16}+2\sqrt{4+\eta\mu^2x})} = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 0(\sqrt{\eta\mu^2 0+1}+\eta\mu 0+1)}{(\sqrt{\eta\mu^2 0+16}+2\sqrt{4+\eta\mu^2 0})} = 0
\end{aligned}$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$ θα έχω:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \alpha^2 \eta\mu \alpha + \eta\mu \alpha - \alpha^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \eta\mu \alpha (\alpha^2 + 1) - (\alpha^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha^2 + 1)(\eta\mu \alpha - 1) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha^2 + 1 = 0 \\ \eta\mu \alpha - 1 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha^2 = -1 \text{ (Άτοπο)} \\ \eta\mu \alpha = 1 \end{array} \right\}$$

$$\eta\mu \alpha = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \eta\mu x = \eta\mu \theta \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2\kappa\pi + \theta, \kappa \in \mathbb{Z} \\ x = 2\kappa\pi + (\pi - \theta), \kappa \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} \\ \eta\mu \alpha = \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z} \\ \eta\mu \alpha = \frac{\pi}{2} \\ x = 2\kappa\pi + \left(\pi - \frac{\pi}{2}\right), \kappa \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

$$\text{Η συνάρτηση } f = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 5x + 6}, x \in (-\infty, 2) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty) \\ \alpha - \frac{\beta}{3}, x = 2 \\ \alpha + \beta, x = 3 \end{cases}$$

Να βρεθούν τα α, β όταν η συνάρτηση f είναι συνεχής στα σημείο $x_0 = 2$ και η γραφική παράσταση της f να διέρχεται απο το σημείο $A(3, 2)$

2.

$$\text{Η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{8x^2 + 1} - 3}{x^2 - x}, x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty) \\ 3\alpha^2 - 4\alpha + 4, x = 1 \\ \frac{(3\alpha)^{3121} + (6\alpha - 2)^{3119} + (9\alpha - 4)^{3117}}{(12\alpha - 6)^{3117} + (15\alpha - 8)^{3115} + (9\alpha^2 - 2)^{3113}}, x = 0 \end{cases}$$

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 1$ τότε :

(I) Να βρεθεί το α

(II) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f να διέρχεται απο το σημείο $A(0, 16)$

3.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{3x^2 + 4}}{\sqrt{5x^2 + 81} - 3\sqrt{x^2 + 9}}, x \neq 0 \\ \alpha^3 + \alpha^2 + \frac{1}{4}, x = 0 \end{cases}$$

Να βρεθεί το α όταν η συνάρτηση f είναι συνεχής στα σημείο $x_0 = 0$

4.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\eta\mu^2 x + 64} - 2\sqrt{16 + \eta\mu^2 x}}{\sqrt{\eta\mu^2 x + 4} - \eta\mu x - 2}, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ \alpha^4 \eta\mu\alpha - \eta\mu\alpha - 3\alpha^4 + 3, x = 0 \end{cases}$$

Να βρεθεί το α ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$