ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ(Νο2)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1.

Δίνεται η συνάρτηση f *με την ιδιότητα :*
$f(x+y)=f(x)+f(y)$ *για κάθε* $x,y\in\mathbb{R}$
Αν η συνάρτηση f *είναι συνεχής στο σημείο* $x_0=\alpha$ *τότε η* f *είναι συνεχής*

Θα αποδείξω οτι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

Επειδή η f *είναι συνεχής στο σημείο* $x_0=a$ *θα έχω :*

$$\lim_{x\to\alpha} f(x)=f(\alpha)$$

Θέτω : $t=x-a$

Έχω : $t=x-a \Leftrightarrow x=t+a$

Έχω : $x\to\alpha \Rightarrow x-a\to 0 \Rightarrow t\to 0$

$$\lim_{x\to\alpha} f(x)=f(\alpha) \overset{\substack{x=t+a\\ t\to 0}}{\Longleftrightarrow} \lim_{t\to 0} f(t+a)=f(\alpha) \overset{f(t+a)=f(t)+f(a)}{\Longleftrightarrow} \lim_{t\to 0}\left(f(t)+f(a)\right)=f(\alpha)$$

$$\lim_{t\to 0} f(t)+\lim_{t\to 0} f(a)=f(\alpha) \overset{\lim\limits_{t\to 0} c=c,\, c:\Sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}}{\Longleftrightarrow} \lim_{t\to 0} f(t)+f(a)=f(\alpha) \Leftrightarrow \lim_{t\to 0} f(t)=0$$

Αν $x_0\in\mathbb{R}$ *θα αποδείξω ότι* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

Θέτω : $w=x-x_0$

Έχω : $w=x-x_0 \Leftrightarrow x=w+x_0$

Έχω : $x\to x_0 \Rightarrow x-x_0\to 0 \Rightarrow w\to 0$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \overset{\substack{x=w+x_0\\ w\to 0}}{=} \lim_{w\to 0} f(w+x_0) \overset{f(w+x_0)=f(w_0)+f(x_0)}{=} \lim_{w\to 0}\left(f(w)+f(x_0)\right)=$$

$$\lim_{w\to 0} f(w)+\lim_{w\to 0} f(x_0) \overset{\substack{\lim\limits_{w\to 0} c=c,\, c:\Sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}\\ \lim\limits_{w\to 0} f(w)=0}}{=} 0+f(x_0)=f(x_0)$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ *η συνάρτηση* f *είναι συνεχής στο τυχαίο σημείο* $x_0\in\mathbb{R}$*. Άρα η συνάρτηση* f *είναι συνεχής γιατί είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού*

2.

$\Delta \acute{\iota}\nu\varepsilon\tau\alpha\iota\ \eta\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}\ \mu\varepsilon\ \tau\eta\nu\ \iota\delta\iota\acute{o}\tau\eta\tau\alpha:$

$f(xy) = f(x)f(y)\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x, y \in \mathbb{R}^*$

$\text{A}\nu\ \eta\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\ x_0 = \alpha\ \mu\varepsilon\ f(\alpha) \neq 0$

$\tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \eta\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma$

$\underline{\Theta\alpha\ \alpha\pi o\delta\varepsilon\acute{\iota}\xi\omega\ o\tau\iota\ \lim_{x\to 1} f(x) = 1}$

$\text{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \eta\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\ x_0 = a\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = f(\alpha)$$

$$\Theta\acute{\varepsilon}\tau\omega: t = \frac{x}{\alpha}$$

$$\acute{E}\chi\omega: t = \frac{x}{\alpha} \Leftrightarrow x = at$$

$$\acute{E}\chi\omega: x \to \alpha \Rightarrow \frac{x}{a} \to 1 \Rightarrow t \to 1$$

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = f(\alpha) \overset{\substack{x=at\\ t\to 1}}{\Longleftrightarrow} \lim_{t\to 0} f(at) = f(\alpha) \overset{f(at)=f(a)f(t)}{\Longleftrightarrow} \lim_{t\to 0}\big(f(a)f(t)\big) = f(\alpha)$$

$$\cancel{f(a)}\lim_{t\to 0} f(t) = \cancel{f(\alpha)} \overset{f(\alpha)\neq 0}{\Longleftrightarrow} \lim_{t\to 0} f(t) = 1$$

$\text{A}\nu\ x_0 \in \mathbb{R}\ \theta\alpha\ \alpha\pi o\delta\varepsilon\acute{\iota}\xi\omega\ \acute{o}\tau\iota\ \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

$$\Theta\acute{\varepsilon}\tau\omega: w = \frac{x}{x_0}$$

$$\acute{E}\chi\omega: w = \frac{x}{x_0} \Leftrightarrow x = x_0 w$$

$$\acute{E}\chi\omega: x \to x_0 \Rightarrow \frac{x}{x_0} \to 1 \Rightarrow w \to 1$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \overset{\substack{x=w+x_0\\ w\to 0}}{=} \lim_{w\to 0} f(x_0 w) \overset{f(w+x_0)=f(x_0)f(w)}{=} \lim_{w\to 0}\big(f(x_0)f(w)\big) = \overset{\lim\limits_{w\to 0} cf(w)=c\lim\limits_{w\to 0} f(w),c:\Sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}}{=}$$

$$f(x_0)\lim_{w\to 0} f(w) \overset{\lim\limits_{w\to 0} f(w)=1}{=} f(x_0)\bullet 1 = f(x_0)$$

$\text{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)\ \eta\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ \tau\upsilon\chi\alpha\acute{\iota}o\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o$ $x_0 \in \mathbb{R}.\acute{A}\rho\alpha\ \eta\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \gamma\iota\alpha\tau\acute{\iota}\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\varepsilon\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon$ $\sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\ \tau o\upsilon\ \pi\varepsilon\delta\acute{\iota}o\upsilon\ o\rho\iota\sigma\mu o\acute{\upsilon}$

3.

$\Delta \acute{\iota}\nu\varepsilon\tau\alpha\iota\ \eta\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f\ \mu\varepsilon\ \tau\eta\nu\ \iota\delta\iota\acute{o}\tau\eta\tau\alpha:$

$f(x+y)=e^{y}f(x)+e^{x}f(y)\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x,y\in\mathbb{R}$

$\mathrm{A}\nu\ \eta\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ 0\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \eta\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma$

$\mathrm{A}\nu\ x=y=0\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$f(0+0)=e^{0}f(0)+e^{0}f(0)\Leftrightarrow f(0)=f(0)+f(0)\Leftrightarrow f(0)=2f(0)\Leftrightarrow$

$f(0)-2f(0)=0\Leftrightarrow -f(0)=0\Leftrightarrow f(0)=0$

$\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \eta\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ 0\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)\overset{f(0)=0}{\Longleftrightarrow}\lim_{x\to 0}f(x)=0$$

$\mathrm{A}\nu\ x_0\in\mathbb{R}\ \theta\alpha\ \alpha\pi o\delta\varepsilon\acute{\iota}\xi\omega\ o\tau\iota\ \lim_{x\to x_0}f(x)=x_0$

$\Theta\acute{\varepsilon}\tau\omega: t=x-x_0$

$\acute{E}\chi\omega: t=x-x_0\Leftrightarrow x=t+x_0$

$\acute{E}\chi\omega: x\to x_0\Rightarrow x-x_0\to 0\Rightarrow t\to 0$

$$\lim_{x\to x_0}f(x)\overset{\substack{x=t+x_0\\ t\to 0}}{=}\lim_{t\to 0}f(t+x_0)=\lim_{t\to 0}\left[e^{x_0}f(t)+e^{t}f(x_0)\right]=e^{x_0}\lim_{t\to 0}f(t)+f(x_0)\lim_{t\to 0}e^{t}$$

$$\overset{\lim_{t\to 0}f(t)=0}{=}e^{x_0}\bullet 0+f(x_0)\bullet 1=f(x_0)$$

$\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\ \eta\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ \tau\upsilon\chi\alpha\acute{\iota}o\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o$

$x_0\in\mathbb{R}.\acute{A}\rho\alpha\ \eta\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \gamma\iota\alpha\tau\acute{\iota}\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\varepsilon\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon$

$\sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\ \tau o\upsilon\ \pi\varepsilon\delta\acute{\iota}o\upsilon\ o\rho\iota\sigma\mu o\acute{\upsilon}$

4.

$\Theta\varepsilon\omega\rho o\acute{\upsilon}\mu\varepsilon\ \tau\eta\nu\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}\ \gamma\iota\alpha\ \tau\eta\nu\ o\pi o\acute{\iota}\alpha\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota:$

$f(xy)=xf(y)+yf(x)$

$(\mathrm{I})\ \mathrm{A}\nu\ \eta\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ 1\ \nu\alpha\ \delta\varepsilon\acute{\iota}\xi\varepsilon\tau\varepsilon\ o\tau\iota\ \eta\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma$

$(\mathrm{II})\ \mathrm{A}\nu\ \lim_{t\to 1}\dfrac{f(t)}{t-1}=0\ \nu\alpha\ \alpha\pi o\delta\varepsilon\acute{\iota}\xi\varepsilon\tau\varepsilon\ o\tau\iota\ \lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\dfrac{f(a)}{a},a>0$

$(\mathrm{I})\ \mathrm{A}\nu\ x=y=1\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:\ \cancel{f(1)}=\cancel{f(1)}+f(1)\Leftrightarrow f(1)=0$

$\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\eta\ \eta\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ 1\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega: \lim_{x\to 1}f(x)=f(1)\Leftrightarrow\lim_{x\to 1}f(x)=0$

$\mathrm{A}\nu\ x_0\in\mathbb{R}\ \theta\alpha\ \alpha\pi o\delta\varepsilon\acute{\iota}\xi\omega\ o\tau\iota\ \lim_{x\to x_0}f(x)=x_0$

$\Theta\acute{\varepsilon}\tau\omega : t = \dfrac{x}{x_0}$

$\acute{E}\chi\omega : t = \dfrac{x}{x_0} \Leftrightarrow x = x_0 t$

$\acute{E}\chi\omega : x \to x_0 \Rightarrow \dfrac{x}{x_0} \to 1 \Rightarrow t \to 1$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \overset{\substack{x=x_0t\\ t\to 1}}{=} \lim_{t\to 1} f(x_0 t) = \lim_{t\to 0}\left[x_0 f(t) + tf(x_0)\right] = x_0 \lim_{t\to 1} f(t) + f(x_0)\lim_{t\to 1} t =$$
$$= x_0 \bullet 0 + f(x_0)\bullet 1 = f(x_0)$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ *η συνάρτηση* f *είναι συνεχής στο τυχαίο σημείο* $x_0 \in \mathbb{R}$.*Άρα η συνάρτηση* f *είναι συνεχής γιατί είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού*

$(\mathrm{II})\,\Theta\acute{\varepsilon}\tau\omega : w = \dfrac{x}{a}$

$\acute{E}\chi\omega : w = \dfrac{x}{a} \Leftrightarrow x = aw$

$\acute{E}\chi\omega : x \to a \Rightarrow \dfrac{x}{a} \to 1 \Rightarrow w \to 1$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{w\to 1}\frac{f(aw)-f(a)}{aw-a} \overset{f(aw)=af(w)+wf(a)}{=} \lim_{w\to 1}\frac{af(w)+wf(a)-f(a)}{a(w-1)} =$$

$$\lim_{w\to 1}\frac{af(w)+f(a)(w-1)}{a(w-1)} = \lim_{w\to 1}\left[\frac{af(w)}{a(w-1)} + \frac{f(a)\cancel{(w-1)}}{a\cancel{(w-1)}}\right] =$$

$$= \lim_{w\to 1}\left[\frac{f(w)}{w-1} + \frac{f(a)}{a}\right] = \lim_{w\to 1}\frac{f(w)}{w-1} + \frac{f(a)}{a} \overset{\lim\limits_{w\to 1}\frac{f(w)}{w-1}=0}{=} 0 + \frac{f(a)}{a} = \frac{f(a)}{a}$$

5.

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \left(-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right) \to \mathbb{R}$ *η οποία είναι συνεχής στο* 0 *και ισχύει*:

$$f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)} \text{ για κάθε } x, y \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$$

Ν*α δείξετε οτι η* f *είναι συνεχής*

$\text{Αν } x=y=0 \text{ θα έχω}:$

$f\left(0\right)=\dfrac{f\left(0\right)+f\left(0\right)}{1-f\left(0\right)f\left(0\right)}\Leftrightarrow f\left(0\right)\left[1-f^{2}\left(0\right)\right]=2f\left(0\right)\Leftrightarrow f\left(0\right)\left(1-f^{2}\left(0\right)\right)-2f\left(0\right)=0$

$\Leftrightarrow f\left(0\right)\left(-1-f^{2}\left(0\right)\right)=0\Leftrightarrow -f\left(0\right)\left(1+f^{2}\left(0\right)\right)=0\Leftrightarrow f\left(0\right)\left(1+f^{2}\left(0\right)\right)=0$

$\text{Έχω}: f^{2}\left(0\right)\geq 0\Rightarrow f^{2}\left(0\right)+1\geq 1>0\Rightarrow f^{2}\left(0\right)+1>0\Rightarrow f^{2}\left(0\right)+1\neq 0$

$\text{Οπότε}: f\left(0\right)\left(1+f^{2}\left(0\right)\right)=0 \overset{f^{2}(0)+1\neq 0}{\Longleftrightarrow} f\left(0\right)=0$

$\text{Επειδή η συνάρτηση } f \text{ είναι συνεχής στο } 0 \text{ θα έχω}:$

$\lim\limits_{x\to 0} f\left(x\right)=f\left(0\right)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f\left(x\right)=0$

$\text{Αν } x_0\in\mathbb{R} \text{ θα αποδείξω οτι } \lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=x_0$

$\text{Θέτω}: t=x-x_0$

$\text{Έχω}: t=x-x_0\Leftrightarrow x=t+x_0$

$\text{Έχω}: x\to x_0\Rightarrow x-x_0\to 0\Rightarrow t\to 0$

$\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)\overset{\substack{x=t+x_0\\ t\to 0}}{=}\lim\limits_{t\to 0} f\left(t+x_0\right)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f\left(t\right)+f\left(x_0\right)}{1-f\left(t\right)f\left(x_0\right)}=\dfrac{\lim\limits_{t\to 0} f\left(t\right)+f\left(x_0\right)}{1-f\left(x_0\right)\lim\limits_{t\to 0} f\left(t\right)}\overset{\lim_{t\to 0} f(t)=0}{=}$

$=\dfrac{0+f\left(x_0\right)}{1-0\bullet f\left(x_0\right)}=f\left(x_0\right)$

$\text{Επειδή } \lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=f\left(x_0\right) \text{ η συνάρτηση } f \text{ είναι συνεχής στο τυχαίο σημείο}$

$x_0\in\mathbb{R}.\text{Άρα η συνάρτηση } f \text{ είναι συνεχής γιατί είναι συνεχής σε κάθε}$

$\text{σημείο του πεδίου ορισμού ορισμού}$

ΠΡΟΣΟΧΗ!!!!
$\text{Όταν έχω την σχέση } f\left(xy\right)=\text{Παράσταση των } x,y,f\left(x\right),f\left(y\right) \text{ και θέλω να αποδείξω οτι η συνάρτηση } f \text{ είναι συνεχής στο } x_0 \text{ τότε θεωρώ την αντικατάσταση } t=\dfrac{x}{x_0},x\to x_0$
$\text{Όταν έχω την σχέση } f\left(x+y\right)=\text{Παράσταση των } x,y,f\left(x\right),f\left(y\right) \text{ και θέλω να αποδείξω οτι η συνάρτηση } f \text{ είναι συνεχής στο } x_0 \text{ τότε θεωρώ την αντικατάσταση } t=x-x_0,\ x\to x_0$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Δίνεται η συνάρτηση f με την ιδιότητα:

$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=\alpha$ τότε η f είναι συνεχής

2.

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$f(xy)=f(x)f(y)+(y-1)(x-1)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}^*$

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=\alpha$ με $f(\alpha)\neq 0$ τότε η f είναι συνεχής

3.

Δίνεται η συνάρτηση f με την ιδιότητα:

$f(x+y)=e^y f(x)+e^x f(y)+x^2y^2$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0 τότε η f είναι συνεχής

4.

Θεωρούμε την συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$f(xy)=e^x f(y)+e^y f(x)+(x-1)(y-1)$

(Ι) Αν η f είναι συνεχής στο 1 να δείξετε οτι η f είναι συνεχής

5.

Δίνεται η συνάρτηση f με την ιδιότητα:

$f(x+y)=yf(x)+xf(y)+x^4y^4$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0 τότε η f είναι συνεχής

6.

Δίνεται η συνάρτηση f με την ιδιότητα:

$f(x+y)=f(x)-f(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο a τότε η f είναι συνεχής

Υπόδειξη: $x=x_0+h-a,\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{h\to a} f((x_0-a))=f(x_0-a)-\lim\limits_{h\to a} f(h)$

$$\overset{\lim_{h\to a} f(h)=f(a)}{=} f(x_0-a)-f(a)=f((x_0-a)+a)=f(x_0)$$