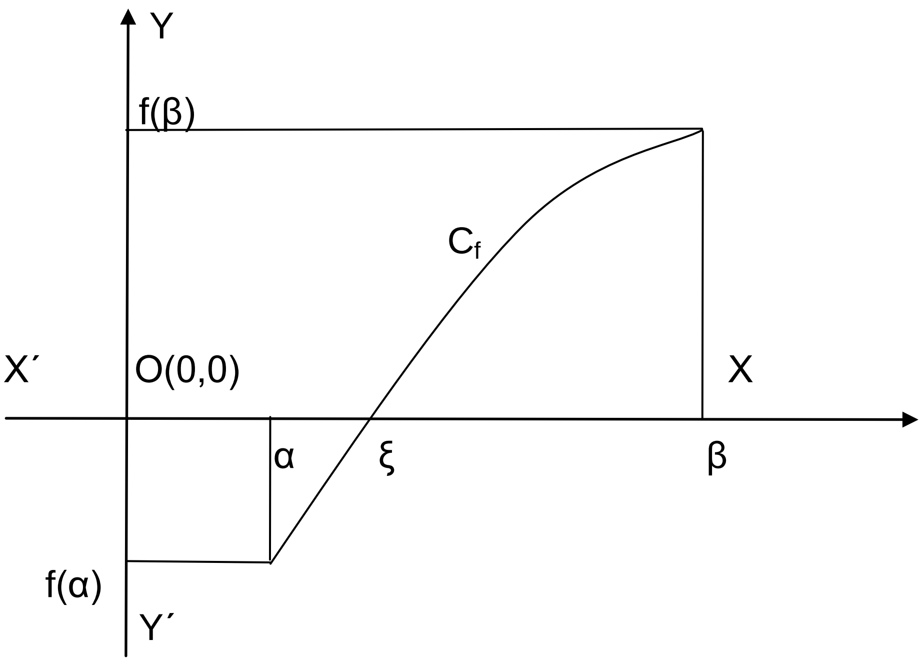
ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ BOLZANO

Το θεώρημα του Bolzano



$$\text{Αν}: \begin{cases} (\text{I})\,\text{Η } f \text{ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα } [\alpha,\beta] \\ (\text{II})\, f(\alpha)\, f(\beta) < 0 \end{cases}$$

Τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=0$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1.

Να αποδείξετε οτι η εξίσωση $(x+1)2^{x+1}=1$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(-1,0)$

Θεωρώ την συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=(x+1)2^{x+1}-1$

Η συνάρτηση 2^{x+1} είναι συνεχής στο $[-1,0]$ ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $x+1$ και 2^x. Η συνάρτηση $(x+1)2^{x+1}$ είναι συνεχής στο $[-1,0]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων. Οπότε η συνάρτηση $f(x)=(x+1)2^{x+1}-1$ είναι συνεχής στο $[-1,0]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων

$f(-1)=0\bullet 2^0-1=-1$

$f(0)=2-1=1$

Οπότε: $f(-1)\,f(0)=(-1)\bullet 1=-1<0$

$$\text{Έχω}:\begin{cases}(\mathrm{I})\ \text{Η συνάρτηση } f \text{ είναι συνεχής στο } [-1,0] \\ (\mathrm{II})\ f(-1)f(0)<0\end{cases}$$

Οπότε η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του Bolzano στο κλειστό διάστημα $[-1,0]$. Οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(-1,0)$ τετοιο ώστε $f(\xi)=0$

$$\begin{cases} f(\xi)=0 \\ \xi\in(-1,0)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(\xi+1)2^{\xi+1}-1=0 \\ \xi\in(-1,0)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(\xi+1)2^{\xi+1}=1 \\ \xi\in(-1,0)\end{cases}$$

2.

Να αποδείξετε οτι η εξίσωση $8x^3-12x^2-6x+5=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$

Θεωρώ την συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=8x^3-12x^2-6x+5$

Οπότε η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική

$f(0)=8\bullet0^3-12\bullet0^2-6\bullet0+5=5$

$f(1)=8\bullet1^3-12\bullet1^2-6\bullet1+5=8-12-6+5=13-18=-5$

Οπότε: $f(0)f(1)=5(-5)=-25<0$

$$\text{Έχω}:\begin{cases}(\mathrm{I})\ \text{Η συνάρτηση } f \text{ είναι συνεχής στο } [0,1] \\ (\mathrm{II})\ f(0)f(1)<0\end{cases}$$

Οπότε η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του Bolzano στο κλειστό διάστημα $[0,1]$. Οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,1)$ τετοιο ώστε $f(\xi)=0$

$$\begin{cases} f(\xi)=0 \\ \xi\in(0,1)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}8\xi^3-12\xi^2-6\xi+5=0 \\ \xi\in(0,1)\end{cases}$$

3.

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)\neq f(\beta)$ να αποδείξετε οτι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τετοίο ώστε: $f(\xi)=\dfrac{2f(\alpha)+f(\beta)}{3}$

Θεωρώ την συνάρτηση $F:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ με τύπο $F(x)=f(x)-\dfrac{2f(\alpha)+f(\beta)}{3}$

Η $\sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta$ F $\varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota$ $\sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma$ $\sigma\tau o$ $[\alpha,\beta]$ $\omega\varsigma$ $\delta\iota\alpha\varphi o\rho\acute{\alpha}$ $\sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\omega}\nu$ $\sigma\upsilon\nu\alpha\rho\tau\acute{\eta}\sigma\varepsilon\omega\nu$

$$f(\alpha)=f(\alpha)-\frac{2f(\alpha)+f(\beta)}{3}=\frac{3f(\alpha)-2f(\alpha)-f(\beta)}{3}=\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{3}$$

$$f(\beta)=f(\beta)-\frac{2f(\alpha)+f(\beta)}{3}=\frac{3f(\beta)-2f(\alpha)-f(\beta)}{3}=\frac{-2\left[f(\alpha)-f(\beta)\right]}{3}$$

$$f(\alpha)f(\beta)=\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{3}\bullet\frac{-2\left[f(\alpha)-f(\beta)\right]}{3}=-\frac{2}{9}\left[f(\alpha)-f(\beta)\right]^2<0$$

$$f(\alpha)\neq f(\beta)\Rightarrow f(\alpha)-f(\beta)\neq 0\overset{\acute{O}\tau\alpha\nu\ \alpha\neq 0\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ \alpha^2>0}{\Longrightarrow}\left[f(\alpha)-f(\beta)\right]^2>0\Rightarrow$$

$$-\frac{2}{9}\left[f(\alpha)-f(\beta)\right]^2<0$$

$$\acute{E}\chi\omega:\begin{Bmatrix}(\mathrm{I})\,\mathrm{H}\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ F\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ [\alpha,\beta]\\ (\mathrm{II})\,F(\alpha)F(\beta)<0\end{Bmatrix}$$

Οπότε η συνάρτηση F ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του Bolzano στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τετοιο ώστε $F(\xi)=0$

$$\begin{Bmatrix}F(\xi)=0\\ \xi\in(\alpha,\beta)\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}f(\xi)-\dfrac{2f(\alpha)+f(\beta)}{3}=0\\ \xi\in(\alpha,\beta)\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}f(\xi)=\dfrac{2f(\alpha)+f(\beta)}{3}\\ \xi\in(\alpha,\beta)\end{Bmatrix}$$

4.

Αν $1<\kappa<2$ να αποδείξετε οτι η εξίσωση $x^2+x=4-2^\kappa$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(-1,1)$

Θεωρώ την συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x^2+x-4+2^\kappa$

Οπότε η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-1,1]$ ως πολυωνυμική

$$f(-1)=(-1)^2-1-4+2^\kappa=2^\kappa-4$$

$$f(1)=1^2+1-4+2^\kappa=2^\kappa-2$$

$$\acute{E}\chi\omega: f(-1)f(1)=(2^\kappa-4)(2^\kappa-2)<0$$

$$\Gamma\iota\alpha\tau\iota: 1<\kappa<2\overset{\substack{\mathrm{A}\nu\ \alpha>1\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\ \eta\ \iota\sigma o\delta\upsilon\nu\alpha\mu\acute{\iota}\alpha:\\ x<y\Leftrightarrow\alpha^x<\alpha^y}}{\Longrightarrow}2^1<2^\kappa<2^2\Rightarrow 2<2^\kappa<4\Rightarrow\begin{Bmatrix}2^\kappa>2\\ 2^\kappa<4\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}2^\kappa-2>0\\ 2^\kappa-4<0\end{Bmatrix}\Rightarrow(2^\kappa-2)(2^\kappa-4)<0\Rightarrow f(-1)f(1)<0$$

$$\acute{E}\chi\omega:\begin{cases}(\mathrm{I})\,\mathrm{H}\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ [-1,1]\\(\mathrm{II})\ f(-1)\,f(1)<0\end{cases}$$

Οπότε η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του Bolzano στο κλειστό διάστημα $[-1,1]$.Οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(-1,1)$ τετοιο ώστε $f(\xi)=0$

$$\begin{cases}f(\xi)=0\\\xi\in(-1,1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\xi^2+\xi-4+2^{\kappa}=0\\\xi\in(-1,1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\xi^2+\xi=4-2^{\kappa}\\\xi\in(-1,1)\end{cases}$$

5.

Δίνονυαι δυο συνεχείς συναρτήσεις $f:[0,1]\to\mathbb{R}, g:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $f(0)=g(1)$, $f(1)=g(0)$ και $g(0)\neq g(1)$.Να αποδείξετε οτι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ με $f(\xi)=g(\xi)$

Θεωρώ την συνάρτηση $F:[0,1]\to\mathbb{R}$ με τύπο $F(x)=f(x)-g(x)$

Οπότε η συνάρτηση F είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων

$$F(0)=f(0)-g(0)\overset{f(0)=g(1)}{=}g(1)-g(0)$$

$$F(1)=f(1)-g(1)\overset{f(1)=g(0)}{=}g(0)-g(1)=-\left(g(1)-g(0)\right)$$

$$\acute{E}\chi\omega: F(0)F(1)=\left(g(1)-g(0)\right)\left[-\left(g(1)-g(0)\right)\right]=-\left(g(1)-g(0)\right)^2<0$$

$$\Gamma\iota\alpha\tau\acute{\iota}: g(1)\neq g(0)\Rightarrow g(1)-g(0)\neq 0\overset{\acute{O}\tau\alpha\nu\ \alpha\neq 0\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ \alpha^2>0}{\Longrightarrow}\left(g(1)-g(0)\right)^2>0\Rightarrow$$

$$-\left(g(1)-g(0)\right)^2<0\Rightarrow F(0)F(1)<0$$

$$\acute{E}\chi\omega:\begin{cases}(\mathrm{I})\,\mathrm{H}\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ F\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ [0,1]\\(\mathrm{II})\,F(0)F(1)<0\end{cases}$$

Οπότε η συνάρτηση F ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του Bolzano στο κλειστό διάστημα $[0,1]$.Οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,1)$ τετοιο ώστε $F(\xi)=0$

$$\begin{cases}F(\xi)=0\\\xi\in(0,1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(\xi)-g(\xi)=0\\\xi\in(0,1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(\xi)=g(\xi)\\\xi\in(0,1)\end{cases}$$

6.

Δίνεται η συνεχή συνάρτηση $f:[-1,2]\to\mathbb{R}$ Να αποδείξετε οτι η εξίσωση $\dfrac{2^x}{x+1}+\dfrac{3^x}{x-2}=f(x)$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(-1,2)$

$$\left\{\begin{matrix}\dfrac{2^x}{x+1}+\dfrac{3^x}{x-2}=f(x)\\ x\in(-1,2)\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}(x+1)(x-2)\left(\dfrac{2^x}{x+1}+\dfrac{3^x}{x-2}\right)=(x+1)(x-2)f(x)\\ x\in(-1,2)\end{matrix}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}(x+1)(x-2)\dfrac{2^x}{x+1}+(x+1)(x-2)\dfrac{3^x}{x-2}-(x+1)(x-2)f(x)=0\\ x\in(-1,2)\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}2^x(x-2)+3^x(x+1)-f(x)(x+1)(x-2)=0\\ x\in(-1,2)\end{matrix}\right\}$$

Θεωρώ την συνάρτηση $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$F(x)=2^x(x-2)+3^x(x+1)-f(x)(x+1)(x-2)$

Οι συναρτήσεις $2^x(x-2),3^x(x+1),-f(x)(x+1)(x-2)$ είναι συνεχείς στο $[-1,2]$ ως γινόμενα συνεχών συναρτήσεων. Οπότε η συνάρτηση F είναι συνεχής στο $[-1,2]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων

$F(-1)=-3\bullet 2^{-1}+0\bullet 3^{-1}-f(-1)\bullet 0\bullet(-3)=-3\bullet 2^{-1}$

$F(2)=0\bullet 2^2+3\bullet 3^2-f(2)\bullet 3\bullet 0=3^3$

$F(-1)f(2)=-3\bullet 2^{-1}\bullet 3^3=-2^{-1}\bullet 3^4<0$

$$\text{Έχω}:\left\{\begin{matrix}(\mathrm{I})\ \text{Η συνάρτηση } F \text{ είναι συνεχής στο } [-1,2]\\ (\mathrm{II})\ F(-1)F(2)<0\end{matrix}\right\}$$

Οπότε η συνάρτηση F ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του Bolzano στο κλειστό διάστημα $[-1,2]$. Οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(-1,2)$ τετοιο ώστε $F(\xi)=0$

$$\left\{\begin{matrix}F(\xi)=0\\ \xi\in(-1,2)\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}2^\xi(\xi-2)+3^x(\xi+1)-f(\xi)(\xi+1)(\xi-2)=0\\ -1<\xi<2\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix}2^\xi(\xi-2)+3^x(\xi+1)=f(\xi)(\xi+1)(\xi-2)\\ \xi+1>0,\xi-2<0\end{matrix}\right\}\overset{\text{Διαιρώ και τα δυο μέλη με το }(\xi+1)(\xi-2)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left(\acute{E}\chi\omega : \begin{cases} \xi+1>0 \\ \xi-2<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi+1\neq 0 \\ \xi-2\neq 0 \end{cases} \Rightarrow (\xi+1)(\xi-2)\neq 0 \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \dfrac{2^{\xi}(\xi-2)+3^{\xi}(\xi+1)}{(\xi+1)(\xi-2)} = \dfrac{f(\xi)(\xi+1)(\xi-2)}{(\xi+1)(\xi-2)} \\ -1<\xi<2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \dfrac{2^{\xi}(\xi-2)}{(\xi+1)(\xi-2)} + \dfrac{3^{\xi}(\xi+1)}{(\xi+1)(\xi-2)} = f(\xi) \\ \xi\in(-1,2) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{2^{\xi}}{\xi+1} + \dfrac{3^{\xi}}{\xi-2}\, f(\xi) \\ \xi\in(-1,2) \end{array} \right\}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Aν $\kappa\in(-1,1)$ να αποδείξετε οτι η εξίσωση $x^2+x=4-2^{\frac{\kappa+3}{2}}$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(-1,1)$

Υπόδειξη: $-1<\kappa<1 \Leftrightarrow 2<\kappa+3<4 \Leftrightarrow 1<\dfrac{\kappa+3}{2}<2$

2.

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α,β και γ για τους οποίους ισχύουν:

$\alpha<0$ και $2\alpha+\beta+\gamma>0$

Nα αποδείξετε οτι η εξίσωση $\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+a=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$

3.

Δίνονυαι δυο συνεχείς συναρτήσεις $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}, g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ $(\alpha<\beta)$ με $f(\alpha)=g(\beta)$, $f(\beta)=g(\alpha)$ και $g(\alpha)\neq g(\beta)$. Nα αποδείξετε οτι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ με $f(\xi)=g(\xi)$

4.

Aν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)\neq f(\beta)$ και $\kappa,\lambda\in(0,+\infty)$ να αποδείξετε οτι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τετοίο ώστε:

$$f(\xi)=\frac{\kappa f(\alpha)+\lambda f(\beta)}{\kappa+\lambda}$$

5.

Δίνεται η συνεχή συνάρτηση $f:[1,4]\to\mathbb{R}$ Nα αποδείξετε οτι η εξίσωση $f(x)+\dfrac{2^x}{x-1}+\dfrac{3^x}{x-4}=0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(1,4)$