ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ BOLZANO(Νο2)

1.

Αν $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ με $\alpha<\beta<\gamma$ και $\lambda\mu\rho\neq 0$ να αποδείξετε οτι η εξίσωση

$$\lambda^2(x-\beta)(x-\gamma)+\mu^2(x-\gamma)(x-\alpha)+\rho^2(x-\alpha)(x-\beta)=0$$

έχει δυο πραγματικές ρίζες

Θεωρώ την συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x)=\lambda^2(x-\beta)(x-\gamma)+\mu^2(x-\gamma)(x-\alpha)+\rho^2(x-\alpha)(x-\beta)$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ ως πολυωνυμική

$$f(\alpha)=\lambda^2(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)+\mu^2(\alpha-\gamma)\bullet 0+\rho^2\bullet 0(\alpha-\beta)=\lambda^2(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)$$

$$f(\beta)=\lambda^2\bullet 0(\beta-\gamma)+\mu^2(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)+\rho^2(\beta-\alpha)\bullet 0=\mu^2(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)$$

$$f(\alpha)f(\beta)=\lambda^2(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)\mu^2(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)=$$

$$=\lambda^2\mu^2(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)\left[-(\alpha-\beta)\right]=-\lambda^2\mu^2(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)$$

$$\left\{\begin{array}{l}\lambda\neq 0\\ \mu\neq 0\\ \alpha<\beta\\ \alpha<\gamma\\ \beta<\gamma\end{array}\right\}\overset{\text{Αν } x\neq 0 \text{ τότε } x^2>0}{\Longrightarrow}\left\{\begin{array}{l}\lambda^2>0\\ \mu^2>0\\ \alpha-\beta<0\\ \alpha-\gamma<0\\ \beta-\gamma<0\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\lambda^2>0\\ \mu^2>0\\ (\alpha-\beta)^2>0\\ \alpha-\gamma<0\\ \beta-\gamma<0\end{array}\right\}\Rightarrow\lambda^2\mu^2(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)>0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow-\lambda^2\mu^2(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)<0\Rightarrow f(\alpha)f(\beta)<0$$

$$\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\text{Η } f \text{ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα } [\alpha,\beta]\\ (\mathrm{II})\ f(\alpha)f(\beta)<0\end{array}\right\}$$

Οπότε η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του Bolzano στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$.Άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi_1)=0$

$$\left\{\begin{array}{l}f(\xi_1)=0\\ \xi_1\in(\alpha,\beta)\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}\lambda^2(\xi_1-\beta)(\xi_1-\gamma)+\mu^2(\xi_1-\gamma)(\xi_1-\alpha)+\rho^2(\xi_1-\alpha)(\xi_1-\beta)=0\\ \xi_1\in(\alpha,\beta)\end{array}\right\}$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\beta,\gamma]$ ως πολυωνυμική

$$f(\beta)=\lambda^2\bullet 0(\beta-\gamma)+\mu^2(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)+\rho^2(\beta-\alpha)\bullet 0=\mu^2(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)$$

$$f(\gamma)=\lambda^2(\gamma-\beta)\bullet 0+\mu^2\bullet 0(\gamma-\alpha)+\rho^2(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)=\rho^2(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)$$

$$f(\beta)f(\gamma)=\mu^2(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)\rho^2(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)=$$

$$=\mu^2\rho^2(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)\left[-(\beta-\gamma)\right]=-\mu^2\rho^2(\beta-\gamma)^2(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)$$

$$\left\{\begin{matrix}\mu\neq 0\\ \rho\neq 0\\ \beta<\gamma\\ \beta>\alpha\\ \gamma>\alpha\end{matrix}\right\}\overset{\substack{\text{Αν } x\neq 0 \text{ τότε}\\ x^2>0}}{\Longrightarrow}\left\{\begin{matrix}\mu^2>0\\ \rho^2>0\\ \beta-\gamma<0\\ \beta-\alpha>\\ \gamma-\alpha>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\mu^2>0\\ \rho^2>0\\ (\beta-\gamma)^2>0\\ \beta-\alpha>0\\ \gamma-\alpha>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow \mu^2\rho^2(\beta-\gamma)^2(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)>0$$

$$\Rightarrow -\mu^2\rho^2(\beta-\gamma)^2(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)<0\Rightarrow f(\beta)f(\gamma)<0$$

$$\left\{\begin{matrix}(\mathrm{I})\,\text{Η } f \text{ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα } [\alpha,\beta]\\ (\mathrm{II})\, f(\alpha)f(\beta)<0\end{matrix}\right\}$$

Οπότε η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του Bolzano στο κλειστό διάστημα $[\beta,\gamma]$.Άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2\in(\beta,\gamma)$ τέτοιο ώστε $f(\xi_2)=0$

$$\left\{\begin{matrix}f(\xi_2)=0\\ \xi_2\in(\beta,\gamma)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\lambda^2(\xi_2-\beta)(\xi_2-\gamma)+\mu^2(\xi_2-\gamma)(\xi_2-\alpha)+\rho^2(\xi_2-\alpha)(\xi_2-\beta)=0\\ \xi_2\in(\beta,\gamma)\end{matrix}\right\}$$

Έχω: $\alpha<\xi_1<\beta<\xi_2<\gamma\Rightarrow\xi_1<\xi_2\Rightarrow\xi_1\neq\xi_2$

2.

Αν $\lambda>0$ και $\mu+\lambda+1<0$ να αποδείξετε οτι η εξίσωση $x^3+\mu x^2+\lambda=0$ έχει δυο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $(-1,1)$

Θεωρώ την συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x^3+\mu x^2+\lambda$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[-1,0]$ ως πολυωνυμική

$$f(-1)=(-1)^3+\mu(-1)^2+\lambda=\mu+\lambda-1$$

$$f(0)=0^3+\mu\bullet 0^2+\lambda=\lambda$$

Έχω: $\left\{\begin{matrix}\mu+\lambda+1<0\\ \lambda>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\mu+\lambda<-1\\ \lambda>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\mu+\lambda-1<-2<0\\ \lambda>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\mu+\lambda-1<0\\ \lambda>0\end{matrix}\right\}$

$$\overset{\substack{f(-1)=\mu+\lambda-1\\ f(0)=\lambda}}{\Longrightarrow}\left\{\begin{matrix}f(-1)<0\\ >0\end{matrix}\right\}\Rightarrow f(-1)f(0)<0$$

$$\left\{\begin{matrix}(\mathrm{I})\,\text{Η } f \text{ είναι συνεχής στο κλειστο διάστημα } [-1,0]\\ (\mathrm{II})\, f(-1)f(0)<0\end{matrix}\right\}$$

Άρα η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του Bolzano στο κλειστό διάστημα $[-1,0]$.Οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (-1,0)$ τέτοιο ώστε $f(\xi_1)=0$

$$\left\{\begin{array}{l} f(\xi_1)=0 \\ \xi_1 \in (-1,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \xi_1^3+\mu\xi_1^2+\lambda=0 \\ \xi_1 \in (-1,0) \end{array}\right\}$$

Η *συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[0,1]$ ως πολυωνυμική*

$$f(0)=0^3+\mu \bullet 0^2+\lambda=\lambda$$

$$f(1)=1^3+\mu \bullet 1^2+\lambda=\mu+\lambda+1$$

$$Έχω:\left\{\begin{array}{c} \mu+\lambda+1<0 \\ \lambda>0 \end{array}\right\} \overset{\substack{f(1)=\mu+\lambda+1 \\ f(0)=\lambda}}{\Longrightarrow} \left\{\begin{array}{l} f(1)<0 \\ f(0)>0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)f(1)<0$$

$$\left\{\begin{array}{l} (\mathrm{I})\,\mathrm{H}\ f \text{ είναι συνεχής στο κλειστο διάστημα } [0,1] \\ (\mathrm{II})\ f(0)f(1)<0 \end{array}\right\}$$

Οπότε η συνάρτηση f είναι ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο κλειστό διάστημα $[0,1]$.Οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi_2)=0$

$$\left\{\begin{array}{l} f(\xi_2)=0 \\ \xi_2 \in (0,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \xi_2^3+\mu\xi_2^2+\lambda=0 \\ \xi_2 \in (0,1) \end{array}\right\}$$

$$Έχω:-1<\xi_1<0<\xi_2<1 \Rightarrow \xi_1<\xi_2 \Rightarrow \xi_1 \neq \xi_2$$

3.

> *Έστω f,g συναρτήσεις συνεχείς στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x)<g(x)$*
> *Αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί α,β με $\alpha<\beta$ τέτοιοι ώστε $f(\alpha)=\alpha$*
> *και $g(\beta)=\beta$ να αποδείξετε οτι υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε:*
> $\lambda f(\xi)+(1-\lambda)g(\xi)=\xi$ *με* $\lambda \in (0,1)$

Θεωρώ την συνάρτηση $F:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $F(x)=\lambda f(x)+(1-\lambda)g(x)-x$

Οι συναρτήσεις $\lambda f(x),(1-\lambda)g(x)$ είναι συνεχείς στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.Η συνάρτηση $-x$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως πολυωνυμική.Οπότε η συνάρτηση F είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων

$$F(\alpha)=\lambda f(\alpha)+(1-\lambda)g(\alpha)-\alpha \overset{\substack{\text{Επειδή } f(\alpha)=\alpha \text{ θέτω} \\ \text{όπου } \alpha \text{ το } f(\alpha)}}{=} \lambda f(\alpha)+(1-\lambda)g(\alpha)-f(\alpha)=$$

$$\underbrace{\lambda f(\alpha)-f(\alpha)}_{\substack{\text{Βγάζω κοινό παράγοντα} \\ \text{το } -f(\alpha)}}+(1-\lambda)g(\alpha)=-f(\alpha)(1-\lambda)+(1-\lambda)g(\alpha)=(1-\lambda)\big(g(\alpha)-f(\alpha)\big)$$

$$F(\beta)=\lambda f(\beta)+(1-\lambda)g(\beta)-\beta \overset{\substack{\text{Επειδή } g(\beta)=\beta \text{ θέτω} \\ \text{όπου } \beta \text{ το } g(\beta)}}{=} \lambda f(\beta)+(1-\lambda)g(\beta)-g(\beta)=$$

$$\lambda f(\beta)+\cancel{g(\beta)}-\lambda g(\beta)-\cancel{g(\beta)}=\lambda\big(f(\beta)-g(\beta)\big)$$

$\text{Επειδή } f(x)<g(x) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \text{ και } \lambda\in(0,1) \text{ θα έχω}:$

$$\left.\begin{cases} g(\alpha)>f(\alpha) \\ \lambda>1 \end{cases}\right\}\Rightarrow\left.\begin{cases} g(\alpha)-f(\alpha)>0 \\ \lambda-1>0 \end{cases}\right\}\Rightarrow(1-\lambda)\big(g(\alpha)-f(\alpha)\big)\Rightarrow F(\alpha)>0$$

$$\left.\begin{cases} f(\beta)<g(\beta) \\ \lambda>0 \end{cases}\right\}\Rightarrow\left.\begin{cases} f(\beta)-g(\beta)<0 \\ \lambda>0 \end{cases}\right\}\Rightarrow\lambda\big(f(\beta)-g(\beta)\big)<0\Rightarrow F(\beta)<0$$

$$\text{Έχω}:\left.\begin{cases} F(\alpha)>0 \\ F(\beta)<0 \end{cases}\right\}\Rightarrow F(\alpha)F(\beta)<0$$

$$\left.\begin{cases} (\mathrm{I})\ \text{Η συνάρτηση είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα } [\alpha,\beta] \\ (\mathrm{II})\ F(\alpha)F(\beta)<0 \end{cases}\right\}$$

Οπότε η συνάρτηση F ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του Bolzano *στο κλειστό διάστημα* $[\alpha,\beta]$.*Οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον* $\xi\in(\alpha,\beta)$ *τέτοιο ώστε* $F(\xi)=0$

$$\left.\begin{cases} F(\xi)=0 \\ \xi\in(\alpha,\beta) \end{cases}\right\}\Rightarrow\left.\begin{cases} \lambda f(\xi)+(1-\lambda)g(\xi)-\xi=0 \\ \xi\in(\alpha,\beta) \end{cases}\right\}\Rightarrow\left.\begin{cases} \lambda f(\xi)+(1-\lambda)g(\xi)=\xi \\ \xi\in(\alpha,\beta) \end{cases}\right\}$$

4.

Να αποδείξετε οτι για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ *η εξίσωση*
$(2\alpha^4+7)x^6-\alpha^2x^5+(\alpha-1)x^3-\alpha x-3=0$
έχει μια τουλάχιστον θετική ρίζα μικρότερη του 1

Θεωρώ την συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *με τύπο*

$$f(x)=(2\alpha^4+7)x^6-\alpha^2x^5+(\alpha-1)x^3-\alpha x-3$$

Η *συνάρτηση* f *είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα* $[0,1]$ *ως πολυωνυμική*

$$f(0)=(2\alpha^4+7)\bullet0^6-\alpha^2\bullet0^5+(\alpha-1)\bullet0^3-\alpha\bullet0-3=-3<0$$

$$f(1)=\left(2\alpha^4+7\right)\bullet 1^6-\alpha^2\bullet 1^5+(\alpha-1)\bullet 1^3-\alpha\bullet 1-3=$$

$$=2\alpha^4+7-\alpha^2+\cancel{\alpha}-1-\cancel{\alpha}-3=2\alpha^4-\alpha^2+3=2\left(\alpha^4-\frac{\alpha^2}{2}+\frac{3}{2}\right)=$$

$$2\left[\left(\alpha^2\right)^2-2\bullet\alpha^2\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\right]\overset{\substack{\Gamma\iota\alpha\ \nu\alpha\ \varepsilon\mu\varphi\alpha\nu\iota\sigma\tau\varepsilon\acute{\iota}\ \eta\ \tau\alpha\upsilon\tau\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ \left(\alpha^2\right)^2-2\bullet\alpha^2\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2=\left(\alpha^2-\frac{1}{4}\right)^2 \\ \pi\rho o\sigma\theta\alpha\varphi\alpha\iota\rho\acute{\omega}\ \tau o\left(\frac{1}{4}\right)^2}}{=}$$

$$2\left[\underbrace{\left(\alpha^2\right)^2-2\bullet\alpha^2\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2}_{A^2-2\bullet A\bullet B+B^2=(A-B)^2}-\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{2}\right]=2\left[\left(\alpha^2-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}+\frac{3}{2}\right]=$$

$$=2\left[\left(\alpha^2-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}+\frac{24}{16}\right]=2\left[\left(\alpha^2-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{23}{16}\right]=2\left(\alpha^2-\frac{1}{4}\right)^2+2\bullet\frac{23}{16}=$$

$$=2\left(\alpha^2-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{23}{8}$$

$$\left(\alpha^2-\frac{1}{4}\right)^2\geq 0\Rightarrow 2\left(\alpha^2-\frac{1}{4}\right)^2\geq 0\Rightarrow 2\left(\alpha^2-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{23}{8}\geq\frac{23}{8}>0\Rightarrow$$

$$2\left(\alpha^2-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{23}{8}>0\Rightarrow f(1)>0$$

$$\acute{E}\chi\omega:\left.\begin{cases}f(0)<0\\ f(1)>0\end{cases}\right\}\Rightarrow f(0)f(1)<0$$

$$\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\ \mathrm{H}\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ \kappa\lambda\varepsilon\iota\sigma\tau\acute{o}\ \delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\mu\alpha\ [0,1]\\ (\mathrm{II})\ f(0)\,f(1)<0\end{array}\right\}$$

Άρα η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προυποθάσεις του θεωρήματος του Bolzano *στο κλειστό διάστημα* $[0,1]$.Ο*πότε υπάρχει ένα τουλάχιστον* $\xi\in(0,1)$ *τέτοιο ώστε* $f(\xi)=0$

$$\left.\begin{cases}f(\xi)=0\\ \xi\in(0,1)\end{cases}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\left(2\alpha^4+7\right)\xi^6-\alpha^2\xi^5+(\alpha-1)\xi^3-\alpha\xi-3=0\\ \xi\in(0,1)\end{array}\right\}$$

5.

Ν*α αποδείξετε οτι η εξίσωση* $x^3-5x^2+5x=(3-x)\ln x$ *έχει δυο τουλάχιστον δυο ρίζες στο διάστημα* $(1,4)$

Θεωρώ την συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ *με τύπο*

$f(x)=x^3-5x^2+5x-(3-x)\ln x$

Η *συνάρτηση* x^3-5x^2+5x *είναι συνεχής στο* $[1,3]$ *ως πολυωνυμική*

Η *συνάρτηση* $-(3-x)\ln x$ *είναι συνεχής στο* $[1,3]$ *ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων*.Ο*πότε η συνάρτηση* f *είναι συνεχής στο* $[1,3]$ *ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων*

$f(1)=1^3-5\bullet1^2+5\bullet1-2\ln1\overset{\ln1=0}{=}1-\cancel{5}+\cancel{5}-2\bullet0=1>0$

$f(3)=3^3-5\bullet3^2+5\bullet3-0\bullet\ln3=27-45+15=27-30=-3<0$

$\acute{E}\chi\omega:\left.\begin{cases}f(1)>0\\ f(3)<0\end{cases}\right\}\Rightarrow f(1)f(3)<0$

$\left.\begin{cases}(\mathrm{I})\,\mathrm{H}\ f\ \textit{είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα}\ [1,3]\\ (\mathrm{II})\ f(1)\,f(3)<0\end{cases}\right\}$

Ο*πότε η συνάρτηση* f *ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του* Bolzano *στο κλειστό διάστημα* $[1,3]$.*Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον* $\xi_1\in(1,3)$ *τέτοιο ώστε* $f(\xi_1)=0$

$\left.\begin{cases}f(\xi_1)=0\\ \xi_1\in(1,3)\end{cases}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{cases}\xi_1^{\,3}-5\xi_1^{\,2}+5\xi_1-(3-\xi_1)\ln\xi_1=0\\ \xi_1\in(1,3)\end{cases}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{cases}\xi_1^{\,3}-5\xi_1^{\,2}+5\xi_1=(3-\xi_1)\ln\xi_1\\ \xi_1\in(1,3)\end{cases}\right\}$

Η *συνάρτηση* x^3-5x^2+5x *είναι συνεχής στο* $[3,4]$ *ως πολυωνυμική*

Η *συνάρτηση* $-(3-x)\ln x$ *είναι συνεχής στο* $[3,4]$ *ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων*.Ο*πότε η συνάρτηση* f *είναι συνεχής στο* $[3,4]$ *ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων*

$f(3)=3^3-5\bullet3^2+5\bullet3-0\bullet\ln3=-3<0$

$f(4)=4^3-5\bullet4^2+5\bullet4+\ln4=64-80+20+\ln4=4+\ln4>0$

$\left(\begin{array}{l}\Gamma\iota\alpha\tau\iota:4>1\Rightarrow\ln4>\ln1\Rightarrow\ln4>0\Rightarrow4+\ln4>4>0\Rightarrow4+\ln4>0\\ \Rightarrow f(4)>0\end{array}\right)$

$$Έχω:\left.\begin{cases} f(3)<0 \\ f(4)>0 \end{cases}\right\} \Rightarrow f(3)f(4)<0$$

$$\left.\begin{cases} (\mathrm{I})\ \text{Η συνάρτηση } f \text{ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα } [3,4] \\ (\mathrm{II})\ f(3)f(4)<0 \end{cases}\right\}$$

Οπότε η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προυποθέσεις θεωρήματος του Bolzano στο κλειστό διάστημα $[3,4]$.Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (3,4)$ τέτοιο ώστε $f(\xi_2)=0$

$$\left.\begin{cases} f(\xi_2)=0 \\ \xi_2 \in (3,4) \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} \xi_2{}^3-5\xi_2{}^2+5\xi_2-(3-\xi_2)\ln\xi_2=0 \\ \xi_2 \in (3,4) \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} \xi_2{}^3-5\xi_2{}^2+5\xi_2=(3-\xi_2)\ln\xi_2 \\ \xi_2 \in (3,4) \end{cases}\right\}$$

$$Έχω:1<\xi_1<3<\xi_2<4 \Rightarrow \xi_1<\xi_2 \Rightarrow \xi_1 \neq \xi_2$$

6.

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση: $f^3(x)+\beta f^2(x)+\gamma f(x)=x^3-2x^2+6x-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, όπου $\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ με $\beta^2<3\gamma$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$

Θεωρώ το τριώνυμο: $t^2+\beta t+\gamma$

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=\beta^2-4\gamma=\left(\beta^2-3\gamma\right)+(-\gamma)<0$$

$$\beta^2<3\gamma \Leftrightarrow \beta^2-3\gamma<0$$

$$3\gamma>\beta^2\geq 0 \Rightarrow 3\gamma>0 \Rightarrow \gamma>0 \Rightarrow -\gamma<0$$

$$\left.\begin{cases} \beta^2-3\gamma<0 \\ -\gamma<0 \end{cases}\right\} \overset{(+)}{\Longrightarrow} \left(\beta^2-3\gamma\right)+(-\gamma)<0 \Rightarrow \Delta<0$$

Επειδή ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου του τριωνύμου είναι θετικός αριθμός και $\Delta<0$ το τριώνυμο $t^2+\beta t+\gamma$ είναι παντού θετικό

Οπότε θα έχω $f(x)^2+\beta f(x)+\gamma>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$$f^3(x)+\beta f^2(x)+\gamma f(x)=x^3-2x^2+6x-1 \Leftrightarrow$$

$$f(x)\left(f^2(x)+\beta f(x)+\gamma\right)=x^3-2x^2+6x-1 \overset{\substack{\text{Επειδή } f^2(x)+\beta f(x)+\gamma>0 \text{ θα} \\ \text{έχω } f^2(x)+\beta f(x)+\gamma\neq 0}}{\Longleftrightarrow}$$

$$f(x)=\frac{x^3-2x^2+6x-1}{f^2(x)+\beta f(x)+\gamma}$$

$$f(0)=\frac{0^3-2\bullet 0^2+6\bullet 0-1}{f^2(0)+\beta f(0)+\gamma}=-\frac{1}{f^2(0)+\beta f(0)+\gamma}<0$$

$$f(1)=\frac{1^3-2\bullet 1^2+6\bullet 1-1}{f^2(1)+\beta f(1)+\gamma}=\frac{4}{f^2(1)+\beta f(1)+\gamma}>0$$

$$\left.\begin{cases} f(0)<0 \\ f(1)>0 \end{cases}\right\}\Rightarrow f(0)\,f(1)<0$$

$$\left.\begin{cases} (\mathrm{I})\ \text{Η } \textit{συνάρτηση } f \textit{ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα } [0,1] \\ (\mathrm{II})\ f(0)\,f(1)<0 \end{cases}\right\}$$

Οπότε η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του Bolzano *στο κλειστό διάστημα* $[0,1]$*.Οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον* $\xi\in(0,1)$ *τέτοιο ώστε* $f(\xi)=0$

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

1.

Αν $\kappa,\lambda,\mu,\rho\in\mathbb{R}$ *με* $\lambda\mu\rho\neq 0$ *να αποδείξετε οτι η εξίσωση*

$$\lambda^2\left(x-\kappa^2\right)\left(x-\kappa^2-1\right)+\mu^2\left(x-\kappa^2\right)\left(x-\kappa^2-2\right)+\rho^2\left(x-\kappa^2-1\right)\left(x-\kappa^2-2\right)=0$$

έχει δυο πραγματικές ρίζες

2.

Αν $\lambda<0$ *και* $\mu-\lambda+1<0$ *να αποδείξετε οτι η εξίσωση* $x^3+\mu x^2-\lambda=0$ *έχει δυο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα* $(-1,1)$

3.

Έστω f,g *συναρτήσεις συνεχείς στο* $\mathbb{R}$ *και για κάθε* $x\in\mathbb{R}$ *ισχύει* $f(x)<2g(x)$

Αν *υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί* α,β *με* $\alpha<\beta$ *τέτοιοι ώστε* $f(\alpha)=\alpha$ *και* $g(\beta)=\frac{\beta}{2}$ *να αποδείξετε οτι υπάρχει* $\xi\in\mathbb{R}$ *τέτοιο ώστε:*

$$\lambda f(\xi)+2(1-\lambda)g(\xi)=\xi \text{ με } \lambda\in(0,1)$$

4.

Να *αποδείξετε οτι για κάθε* $\alpha\in\mathbb{R}$ *η εξίσωση*

$$\left(2\alpha^4+7\right)x^6+\alpha^2x^5+(1-\alpha)x^3+\alpha x-3=0$$

έχει μια τουλάχιστον μια αρνητική ρίζα μεγαλύτερη του -1