ΠΡΟΣΗΜΟ ΜΙΑΣ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ
$\text{Αν}:\left\{\begin{array}{l}(\text{I})\text{Η } f \textit{ είναι συνεχής στο διάστημα } \Delta \\ (\text{II})\ f(x)\neq 0 \textit{ για κάθε } x\in\Delta \\ (\text{III})\text{Υ}\textit{πάρχει } x_0\in\Delta \textit{ τέτοιο ώστε } f(x_0)>0\end{array}\right\}$ $\text{Τ}\acute{o}\text{τε } f(x)>0 \textit{ για κάθε } x\in\Delta$
$\text{Αν}:\left\{\begin{array}{l}(\text{I})\text{Η } f \textit{ είναι συνεχής στο διάστημα } \Delta \\ (\text{II})\ f(x)\neq 0 \textit{ για κάθε } x\in\Delta \\ (\text{III})\text{Υ}\textit{πάρχει } x_0\in\Delta \textit{ τέτοιο ώστε } f(x_0)<0\end{array}\right\}$ $\text{Τ}\acute{o}\text{τε } f(x)<0 \textit{ για κάθε } x\in\Delta$

Πως θα βρω το πρόσημο της συνάρτησης $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$
όταν η συνάρτηση f *είναι συνεχής στο* (α,β)

↓

Θεωρώ εξίσωση: $\left\{\begin{array}{l} f(x)=0 \\ x\in(\alpha,\beta)\end{array}\right\}$

Έχω: $\left\{\begin{array}{l} f(x)=0 \\ x\in(\alpha,\beta)\end{array}\right\}\Leftrightarrow x=x_1 \text{ ή } x=x_2 \text{ ή } \cdots\ x=x_\nu \text{ με } x_1<x_2<\cdots<x_\nu$

↓

(I) *Χωρίζω το διάστημα* (α,β) *στα διαστήματα*
$(\alpha,x_1),(x_1,x_2),(x_2,x_3),\cdots,(x_\nu,\beta)$
(II) *Για κάθε διαστημα* $(\alpha,x_1),(x_1,x_2),(x_2,x_3),\cdots,(x_\nu,\beta)$ *επιλέγω ένα σημείο* x_0 *που να ανήκει σε αυτό το διάστημα*
(III) *Αν ισχύει* $f(x_0)>0$ *τότε η συνάρτηση είναι θετική σε όλο το διάστημα που έχω επιλέξει*
Αν ισχύει $f(x_0)<0$ *τότε η συνάρτηση είναι αρνητική σε όλο το διάστημα που έχω επιλέξει*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1.

Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x)=\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x-1$ *ως προς τα πρόσημα στο διάστημα* $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

$$\left\{\begin{array}{l} f(x)=0 \\ x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x-1=0 \\ x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \sigma\upsilon\nu x=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} \\ x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\left(\begin{array}{l} x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{4},\kappa\in\mathbb{Z} \\ -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\end{array}\right) ή \left(\begin{array}{l} x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{4},\kappa\in\mathbb{Z} \\ -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\end{array}\right)\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\left(\begin{array}{l} x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{4},\kappa\in\mathbb{Z} \\ -\frac{\pi}{2}\le 2\kappa\pi+\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{2}\end{array}\right) ή \left(\begin{array}{l} x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{4},\kappa\in\mathbb{Z} \\ -\frac{\pi}{2}\le 2\kappa\pi-\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{2}\end{array}\right)\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\left(\begin{array}{l} x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{4},\kappa\in\mathbb{Z} \\ -\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\le 2\kappa\pi\le\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\end{array}\right) ή \left(\begin{array}{l} x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{4},\kappa\in\mathbb{Z} \\ -\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\le 2\kappa\pi\le\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\end{array}\right)\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\left(\begin{array}{l} x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{4},\kappa\in\mathbb{Z} \\ -\frac{3\pi}{4}\le 2\kappa\pi\le\frac{\pi}{4}\end{array}\right) ή \left(\begin{array}{l} x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{4},\kappa\in\mathbb{Z} \\ -\frac{\pi}{4}\le 2\kappa\pi\le\frac{3\pi}{4}\end{array}\right)\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\left(\begin{array}{l} x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{4},\kappa\in\mathbb{Z} \\ -\frac{3}{4}\le 2\kappa\le\frac{1}{4}\end{array}\right) ή \left(\begin{array}{l} x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{4},\kappa\in\mathbb{Z} \\ -\frac{1}{4}\le 2\kappa\le\frac{3}{4}\end{array}\right)\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\left(\begin{array}{l} x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{4},\kappa\in\mathbb{Z} \\ 2\kappa=0\end{array}\right) ή \left(\begin{array}{l} x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{4},\kappa\in\mathbb{Z} \\ 2\kappa=0\end{array}\right)\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\left(\begin{array}{l} x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{4},\kappa\in\mathbb{Z} \\ \kappa=0\end{array}\right) ή \left(\begin{array}{l} x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{4},\kappa\in\mathbb{Z} \\ \kappa=0\end{array}\right)\right\} \Leftrightarrow \left\{\left(x=\frac{\pi}{4}\right) ή \left(x=-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

$Χωρίζω\ το\ διάστημα\ \left[-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right]\ στα\ διαστήματα:$

$$\left[-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right),\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right),\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$$

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{2}\right)-1=\sqrt{2}\bullet 0-1=-1$$

$$\textit{Έχω}:\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\,\mathrm{H}\ f\ \textit{είναι συνεχής στο}\ \left[-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right)\ \textit{ως άθροισμα συνεχών}\\ \textit{συναρτήσεων}\\ (\mathrm{II})\ f(x)\neq 0\ \textit{για κάθε}\ x\in\left[-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right)\\ (\mathrm{III})\ f\left(-\frac{\pi}{2}\right)<0\end{array}\right\}$$

$$\mathrm{O}\textit{πότε}\ f(x)<0\ \textit{για κάθε}\ x\in\left[-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$f(0)=\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu 0-1=\sqrt{2}\bullet 1-1=\sqrt{2}-1>0$$

$$\left(\textit{Έχω}:2>1\Leftrightarrow\sqrt{2}>\sqrt{1}\Leftrightarrow\sqrt{2}-1>0\right)$$

$$\textit{Έχω}:\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\,\mathrm{H}\ f\ \textit{είναι συνεχής στο}\ \left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)\ \textit{ως άθροισμα συνεχών}\\ \textit{συναρτήσεων}\\ (\mathrm{II})\ f(x)\neq 0\ \textit{για κάθε}\ x\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)\\ (\mathrm{III})\ f(0)>0\end{array}\right\}$$

$$\mathrm{O}\textit{πότε}\ f(x)>0\ \textit{για κάθε}\ x\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$$

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}-1=\sqrt{2}\bullet 0-1=-1$$

$$\textit{Έχω}:\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\,\mathrm{H}\ f\ \textit{είναι συνεχής στο}\ \left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]\ \textit{ως άθροισμα συνεχών}\\ \textit{συναρτήσεων}\\ (\mathrm{II})\ f(x)\neq 0\ \textit{για κάθε}\ x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]\\ (\mathrm{III})\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0\end{array}\right\}$$

$$\mathrm{O}\textit{πότε}\ f(x)<0\ \textit{για κάθε}\ x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$$

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2.

Να βρείτε όλες συνεχείς συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:
$f^2(x)-4x^2=-8x+4$

$$f^2(x)-4x^2=-8x+4 \Leftrightarrow f^2(x)=\underbrace{(2x)^2-2\bullet 2x\bullet 2+2^2}_{\alpha^2-2\bullet\alpha\bullet\beta+\beta^2=(\alpha-\beta)^2} \Leftrightarrow f^2(x)=(2x-2)^2 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{f^2(x)}=\sqrt{(2x-2)^2} \overset{\sqrt{a^2}=|a|}{\Longleftrightarrow} |f(x)|=|2x-2| \Leftrightarrow |f(x)|=|2(x-1)| \Leftrightarrow |f(x)|=2|x-1|$$

Θεωρώ την εξίσωση $f(x)=0$:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow |f(x)|=0 \Leftrightarrow 2|x-1|=0 \Leftrightarrow |x-1|=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$$

Οπότε: $f(x)\neq 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

$$\text{Έχω}:\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\ \text{Η } f \text{ είναι συνεχής στο διάστημα } (-\infty,1)\\ (\mathrm{II})\ f(x)\neq 0 \text{ για κάθε } x\in(-\infty,1)\end{array}\right\}$$

Οπότε $f(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,1)$ ή $f(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,1)$

$$\text{Έχω}:\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\ \text{Η } f \text{ είναι συνεχής στο διάστημα } (1,+\infty)\\ (\mathrm{II})\ f(x)\neq 0 \text{ για κάθε } x\in(1,+\infty)\end{array}\right\}$$

Οπότε $f(x)>0$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$ ή $f(x)<0$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$

Διακρίνω τις περιπτώσεις:

$$\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\ f(x)>0\ ,\ x\in(-\infty,1) \text{ και } f(x)>0\ ,\ x\in(-\infty,1)\\ (\mathrm{II})\ f(x)>0\ ,\ x\in(-\infty,1) \text{ και } f(x)<0\ ,\ x\in(-\infty,1)\\ (\mathrm{III})\ f(x)<0\ ,\ x\in(-\infty,1) \text{ και } f(x)>0\ ,\ x\in(-\infty,1)\\ (\mathrm{IV})\ f(x)<0\ ,\ x\in(-\infty,1) \text{ και } f(x)<0\ ,\ x\in(-\infty,1)\end{array}\right\}$$

Περίπτωση (I):

Αν $x\in(-\infty,1)$ θα έχω $f(x)>0$:

$$|f(x)|=2|x-1| \overset{\substack{f(x)>0\Rightarrow|f(x)|=f(x)\\ x<1\Rightarrow x-1<0\Rightarrow|x-1|=-(x-1)}}{\Longrightarrow} f(x)=2\left[-(x-1)\right] \Rightarrow f(x)=-2(x-1)$$

Οπότε: $f(x)=-2(x-1), x\in(-\infty,1)$

Γνωρίζω οτι το $f(1)=0$. Οπότε αν στον παραπάνω τύπο θέσω όπου $x=1$ θα έχω $f(1)=0$. Συνεπώς ο παραπάνω τύπος ισχύει όταν $x\in(-\infty,1]$

$Άρα: \boxed{f(x) = -2(x-1), x \in (-\infty, 1]}$

Αν $x \in (1, +\infty)$ $θα\ έχω$ $f(x) > 0$:

$$|f(x)| = 2|x-1| \overset{\substack{f(x)>0 \\ x>1 \Rightarrow x-1>0 \Rightarrow |x-1|=x-1}}{\Longrightarrow} f(x) = 2(x-1)$$

Ο$πότε$: $\boxed{f(x) = 2(x-1), x \in (1, +\infty)}$

$$Άρα: f(x) = \begin{cases} -2(x-1), x \in (-\infty, 1] \\ 2(x-1), x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

Π$ερίπτωση$ (ΙΙ):

Αν $x \in (-\infty, 1)$ $θα\ έχω$ $f(x) > 0$:

$$|f(x)| = 2|x-1| \overset{\substack{f(x)>0 \Rightarrow |f(x)|=f(x) \\ x<1 \Rightarrow x-1<0 \Rightarrow |x-1=-(x-1)|}}{\Longrightarrow} f(x) = 2[-(x-1)] \Rightarrow f(x) = -2(x-1)$$

Ο$πότε$: $f(x) = -2(x-1), x \in (-\infty, 1)$

Γ$νωρίζω\ οτι\ το$ $f(1) = 0$.Ο$πότε\ αν\ στον\ παραπάνω\ τύπο\ θέσω\ όπου$ $x = 1$ $θα\ έχω$ $f(1) = 0$.Σ$υνεπώς\ ο\ παραπάνω\ τύπος\ ισχύει\ όταν$ $x \in (-\infty, 1]$

$Άρα: \boxed{f(x) = -2(x-1), x \in (-\infty, 1]}$

Αν $x \in (1, +\infty)$ $θα\ έχω$ $f(x) < 0$:

$$|f(x)| = 2|x-1| \overset{\substack{f(x)<0 \Rightarrow |f(x)|=-f(x) \\ x>1 \Rightarrow x-1>0 \Rightarrow |x-1|=x-1}}{\Longrightarrow} -f(x) = 2(x-1) \Rightarrow f(x) = -2(x-1)$$

Ο$πότε$: $\boxed{f(x) = -2(x-1), x \in (1, +\infty)}$

$$Άρα: f(x) = \begin{cases} -2(x-1), x \in (-\infty, 1] \\ -2(x-1), x \in (1, +\infty) \end{cases} = -2(x-1)$$

Π$ερίπτωση$ (ΙΙΙ):

Αν $x \in (-\infty, 1)$ $θα\ έχω$ $f(x) < 0$:

$$|f(x)| = 2|x-1| \overset{\substack{f(x)<0 \Rightarrow |f(x)|=-f(x) \\ x<1 \Rightarrow x-1<0 \Rightarrow |x-1|=-(x-1)}}{\Longrightarrow} -f(x) = 2[-(x-1)] \Rightarrow -f(x) = -2(x-1) \Rightarrow$$
$$f(x) = 2(x-1)$$

Ο$πότε$: $f(x) = 2(x-1), x \in (-\infty, 1)$

Γ$νωρίζω\ οτι\ το$ $f(1) = 0$.Ο$πότε\ αν\ στον\ παραπάνω\ τύπο\ θέσω\ όπου$ $x = 1$ $θα\ έχω$ $f(1) = 0$.Σ$υνεπώς\ ο\ παραπάνω\ τύπος\ ισχύει\ όταν$ $x \in (-\infty, 1]$

$Άρα: \boxed{f(x) = 2(x-1), x \in (-\infty, 1]}$

Αν $x \in (1, +\infty)$ $θα\ έχω$ $f(x) > 0$:

$$\left|f(x)\right| = 2\left|x-1\right| \overset{\substack{f(x)>0 \Rightarrow \left|f(x)\right| = f(x) \\ x>1 \Rightarrow x-1>0 \Rightarrow \left|x-1\right| = x-1}}{\Longrightarrow} f(x) = 2(x-1)$$

$Ο\pi ό\tau\varepsilon: \boxed{f(x) = 2(x-1), x \in (1,+\infty)}$

$$Ά\rho\alpha: f(x) = \begin{cases} 2(x-1), x \in (-\infty,1] \\ 2(x-1), x \in (1,+\infty) \end{cases} = 2(x-1)$$

$Π\varepsilon\rho ί\pi\tau\omega\sigma\eta (IV)$

$Α\nu\ x \in (-\infty,1)\ \theta\alpha\ έ\chi\omega\ f(x) < 0:$

$$\left|f(x)\right| = 2\left|x-1\right| \overset{\substack{f(x)<0 \Rightarrow \left|f(x)\right| = -f(x) \\ x<1 \Rightarrow x-1<0 \Rightarrow \left|x-1\right| = -(x-1)}}{\Longrightarrow} -f(x) = 2\left[-(x-1)\right] \Rightarrow -f(x) = -2(x-1) \Rightarrow$$
$$f(x) = 2(x-1)$$

$Γ\nu\omega\rho ί\zeta\omega\ o\tau\iota\ \tau o\ f(1) = 0.$ $Ο\pi ό\tau\varepsilon\ \alpha\nu\ \sigma\tau o\nu\ \pi\alpha\rho\alpha\pi ά\nu\omega\ \tau ύ\pi o\ \theta έ\sigma\omega\ ό\pi o\upsilon\ x = 1$
$\theta\alpha\ έ\chi\omega\ f(1) = 0.$ $Σ\upsilon\nu\varepsilon\pi ώ\varsigma\ o\ \pi\alpha\rho\alpha\pi ά\nu\omega\ \tau ύ\pi o\varsigma\ \iota\sigma\chi ύ\varepsilon\iota\ ό\tau\alpha\nu\ x \in (-\infty,1]$

$Ά\rho\alpha: \boxed{f(x) = 2(x-1), x \in (-\infty,1]}$

$Α\nu\ x \in (1,+\infty)\ \theta\alpha\ έ\chi\omega\ f(x) < 0:$

$$\left|f(x)\right| = 2\left|x-1\right| \overset{\substack{f(x)<0 \Rightarrow \left|f(x)\right| = -f(x) \\ x>1 \Rightarrow x-1>0 \Rightarrow \left|x-1\right| = x-1}}{\Longrightarrow} -f(x) = 2(x-1) \Rightarrow f(x) = -2(x-1)$$

$Ο\pi ό\tau\varepsilon: \boxed{f(x) = -2(x-1), x \in (1,+\infty)}$

$$Ά\rho\alpha: f(x) = \begin{cases} 2(x-1), x \in (-\infty,1] \\ -2(x-1), x \in (1,+\infty) \end{cases}$$

3.

$Ν\alpha\ \beta\rho\varepsilon ί\tau\varepsilon\ ό\lambda\varepsilon\varsigma\ \tau\iota\varsigma\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\varepsilon ί\varsigma\ \sigma\upsilon\nu\alpha\rho\tau ή\sigma\varepsilon\iota\varsigma\ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ \gamma\iota\alpha\ \tau\iota\varsigma\ o\pi o ί\varepsilon\varsigma\ \iota\sigma\chi ύ\varepsilon\iota:$ $e^{2x} f^2(x) - 2x^2 e^x f(x) = 2x^2 + 1\ \gamma\iota\alpha\ \kappa ά\theta\varepsilon\ x \in \mathbb{R}$

$$e^{2x} f^2(x) - 2x^2 e^x f(x) = 2x^2 + 1 \Leftrightarrow \left(e^x f(x)\right)^2 - 2 \bullet e^x f(x) \bullet x^2 = 2x^2 + 1^2 \Leftrightarrow$$

$$\overset{\substack{Π\rho o\sigma\theta έ\tau\omega\ \kappa\alpha\iota\ \sigma\tau\alpha \\ \delta\upsilon o\ μέ\lambda\eta\ \tau o\ \left(x^2\right)^2}}{\Longleftrightarrow} \left(e^x f(x)\right)^2 - 2 \bullet e^x f(x) \bullet x^2 + \left(x^2\right)^2 = \left(x^2\right)^2 + 2 \bullet x^2 \bullet 1 + 1^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(e^x f(x) - x^2\right)^2 = \left(x^2 + 1\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{\left(e^x f(x) - x^2\right)^2} = \sqrt{\left(x^2 + 1\right)^2} \overset{\sqrt{a^2} = |a|}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left|e^x f(x) - x^2\right| = \left|x^2 + 1\right| \overset{\substack{x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 1 \geq 1 > 0 \Rightarrow \\ x^2 + 1 > 0 \Rightarrow \left|x^2 + 1\right| = x^2 + 1}}{\Longleftrightarrow} \left|e^x f(x) - x^2\right| = x^2 + 1$$

$Θ\varepsilon\omega\rho ώ\ \tau\eta\ \sigma\upsilon\nu ά\rho\tau\eta\sigma\eta\ g(x) = e^x f(x) - x^2, x \in \mathbb{R}.$ $Τ ό\tau\varepsilon\ \theta\alpha\ έ\chi\omega:$

$$\left|e^x f(x) - x^2\right| = x^2 + 1 \overset{g(x) = e^x f(x) - x^2}{\Longleftrightarrow} \left|g(x)\right| = x^2 + 1$$

$Έ\chi\omega: x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 1 \geq 1 > 0 \Rightarrow x^2 + 1 > 0 \Rightarrow x^2 + 1 \neq 0 \Rightarrow \left|g(x)\right| \neq 0 \Rightarrow g(x) \neq 0$

$$\acute{E}\chi\omega:\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\mathrm{H}\ g\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ \mathbb{R}\ \omega\varsigma\ \acute{\alpha}\theta\rho o\iota\sigma\mu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\omega}\nu\ \sigma\upsilon\nu\alpha\rho\tau\acute{\eta}\sigma\varepsilon\omega\nu \\ (\mathrm{II})g(x)\neq 0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in\mathbb{R}\end{array}\right\}$$

Οπότε $g(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ή $g(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Αν $g(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ θα έχω:

$$|g(x)|=x^2+1 \overset{g(x)>0\Rightarrow|g(x)|=g(x)}{\Longleftrightarrow} g(x)=x^2+1 \overset{g(x)=e^x f(x)-x^2}{\Longleftrightarrow} e^x f(x)-x^2=x^2+1\Leftrightarrow$$

$$e^x f(x)=2x^2+1 \overset{e^x\neq 0}{\Longleftrightarrow} f(x)=\frac{2x^2+1}{e^x}$$

Αν $g(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ θα έχω:

$$|g(x)|=x^2+1 \overset{g(x)<0\Rightarrow|g(x)|=-g(x)}{\Longleftrightarrow} -g(x)=x^2+1\Leftrightarrow g(x)=-x^2-1 \overset{g(x)=e^x f(x)-x^2}{\Longleftrightarrow}$$

$$e^x f(x)-x^2=-x^2-1\Leftrightarrow e^x f(x)=-1 \overset{e^x\neq 0}{\Longleftrightarrow} f(x)=-\frac{1}{e^x}$$

4.

Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:
$f^2(x)-2xf(x)+e^{2\ln x}=x^4+1$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

$$f^2(x)-2xf(x)+e^{2\ln x}=x^4+1 \overset{\ln\theta^\kappa=\kappa\ln\theta,\theta>0}{\Longleftrightarrow} f^2(x)-2xf(x)+e^{\ln x^2}=x^4+1 \overset{e^{\ln\theta}=\theta,\theta>0}{\Longleftrightarrow}$$

$$\underbrace{f^2(x)-2\bullet x\bullet f(x)+x^2}_{\alpha^2-2\bullet\alpha\bullet\beta+\beta^2=(\alpha-\beta)^2}=x^4+1\Leftrightarrow\left(f(x)-x\right)^2=x^4+1\Leftrightarrow\sqrt{\left(f(x)-x\right)^2}=\sqrt{x^4+1}$$

$$\overset{\sqrt{a^2}=|a|}{\Longleftrightarrow} |f(x)-x|=\sqrt{x^4+1}$$

Θεωρώ τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-x, x\in(0,+\infty)$. Τότε θα έχω:

$$|f(x)-x|=\sqrt{x^4+1} \overset{g(x)=f(x)-x}{\Longleftrightarrow} |g(x)|=\sqrt{x^4+1}$$

$$x>0\Rightarrow x^4>0\Rightarrow x^4+1>1>0\Rightarrow x^4+1>0\Rightarrow\sqrt{x^4+1}>0 \overset{|g(x)|=\sqrt{x^4+1}}{\Longrightarrow} |g(x)|>0\Rightarrow$$
$$g(x)\neq 0$$

$$\acute{E}\chi\omega:\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\mathrm{H}\ g\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ (0,+\infty)\ \omega\varsigma\ \acute{\alpha}\theta\rho o\iota\sigma\mu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\omega}\nu\ \sigma\upsilon\nu\alpha\rho\tau\acute{\eta}\sigma\varepsilon\omega\nu \\ (\mathrm{II})g(x)\neq 0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in(0,+\infty)\end{array}\right\}$$

Οπότε $g(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ή $g(x)<0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

Αν $g(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ θα έχω:

$$|g(x)|=\sqrt{x^4+1} \overset{g(x)>0\Rightarrow|g(x)|=g(x)}{\Longleftrightarrow} g(x)=\sqrt{x^4+1} \overset{g(x)=f(x)-x}{\Longleftrightarrow} f(x)-x=\sqrt{x^4+1}\Leftrightarrow$$
$$f(x)=\sqrt{x^4+1}+x$$

$A\nu\ g(x)<0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in(0,+\infty)\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$|g(x)|=\sqrt{x^4+1}\overset{g(x)<0\Rightarrow|g(x)|=-g(x)}{\Longleftrightarrow}-g(x)=\sqrt{x^4+1}\Leftrightarrow g(x)=-\sqrt{x^4+1}\overset{g(x)=f(x)-x}{\Longleftrightarrow}$$

$$f(x)-x=-\sqrt{x^4+1}\Leftrightarrow f(x)=x-\sqrt{x^4+1}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

$N\alpha$ *μελετήσετε τη συνάρτηση* $f(x)=2\eta\mu x-1$ *ως προς τα πρόσημα στο διάστημα* $[0,\pi]$

2.

Δίνεταιησυνάρτηση $f:\left[-\pi,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$ *με τύπο*

$$f(x)=4\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x-2\sigma\upsilon\nu x+2\sqrt{2}\eta\mu x-\sqrt{2}$$

$N\alpha$ *βρεθεί το πρόσημο της* f

Υπόδειξη: $f(x)=0\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x(2\eta\mu x-1)+\sqrt{2}(2\eta\mu x-1)=0\Leftrightarrow$

$$(2\eta\mu x-1)\left(2\sigma\upsilon\nu x+\sqrt{2}\right)=0\Leftrightarrow\left(2\eta\mu x-1=0\ \acute{\eta}\ 2\sigma\upsilon\nu x+\sqrt{2}=0\right)$$

3.

$N\alpha$ *βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *για τις οποίες ισχύει*:

$$f^2(x)-9x^2=-6x+1$$

4.

$N\alpha$ *βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις* $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ *για τις οποίες ισχύει*:

$$f^2(x)-2xe^x f(x)+e^{2x+\ln x^2}=x^4+1$$

Υπόδειξη: $f^2(x)-2xe^x f(x)+e^{2x+\ln x^2}=x^4+1\Leftrightarrow$

$$f^2(x)-2xe^x f(x)+e^{2x}e^{\ln x^2}=x^4+1\overset{e^{\ln\theta}=\theta,\theta>0}{\Longleftrightarrow}f^2(x)-2xe^x f(x)+\left(e^x\right)^2x^2=x^4+1$$

$$\overset{\left(a^\nu\right)^\mu=\alpha^{\nu\mu}}{\Longleftrightarrow}\underbrace{f^2(x)-2\bullet f(x)\bullet e^{x+\ln x}+\left(e^x x\right)^2}_{\alpha^2-2\bullet\alpha\bullet\beta+\beta^2=(\alpha-\beta)^2}=x^4+1\Leftrightarrow\left(f(x)-xe^x\right)^2=x^4+1$$

4.

$N\alpha$ *βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις* $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$ *για τις οποίες ισχύει*:

$$f(x)\left(f(x)-2x\right)=1-x^2-2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

Υπόδειξη: $f^2(x)-2xf(x)+x^2=1-2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x\overset{\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x=1}{\Longleftrightarrow}$

$$\left(f(x)-x\right)^2=\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x-2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow\left(f(x)-x\right)^2=\left(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x\right)^2\Leftrightarrow\bullet\bullet\bullet$$

$$\Leftrightarrow|f(x)-x|=|\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x|,|\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x|=0\Leftrightarrow\eta\mu x=\sigma\upsilon\nu x\overset{0<x<\frac{\pi}{2}}{\Longleftrightarrow}\bullet\bullet\bullet x=\frac{\pi}{4}$$