ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΩΝ ΕΝΔΙΑΜΕΣΩΝ ΤΙΜΩΝ ΚΑΙ ΜΕΓΙΣΤΗΣ - ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ ΤΙΜΗΣ

ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΩΝ ΕΝΔΙΑΜΕΣΩΝ ΤΙΜΩΝ

$$\text{Αν}:\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\,\text{Η } \textit{συνάρτηση } f \textit{ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα } [\alpha,\beta] \\ (\mathrm{II})\, f(\alpha)\neq f(\beta)\end{array}\right\}$$

Τότε για κάθε αριθμό η που βρίσκεται μεταξύ των $f(\alpha)$ *και* $f(\beta)$ *υπάρχει ένα τουλάχιστον* $\xi\in(\alpha,\beta)$ *τέτοιο ώστε* $f(\xi)=\eta$

ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ ΤΙΜΗΣ

Αν η συνάρτηση f *είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα τότε παίρνει στο* $[\alpha,\beta]$ *μια μέγιστη τιμή Μ και μια ελάχιστη τιμή m*

Δηλ: *Αν η συνάρτηση* f *είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα* $[\alpha,\beta]$ *τότε υπάρχουν* $x_1,x_2\in[\alpha,\beta]$ *με* $f(x_1)=m, f(x_2)=M$ *τέτοια ώστε* $m\leq f(x)\leq M$ *για κάθε* $x\in[\alpha,\beta]$

Πως θα βρω τον τύπο της συνάρτησης $f:D_f\to\mathbb{R}$ *όταν γνωρίζω ότι:*

(I) Η f *είναι συνεχής*

$(\mathrm{II})\,(f(x)-c_1)(f(x)-c_2)=0$ *για κάθε* $x\in D_f$ (D_f : Τ*οπεδίο ορισμού της* f)

με $c_1<c_2$

↓

$$(f(x)-c_1)(f(x)-c_2)=0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} f(x)-c_1=0\\ \acute{\eta}\\ f(x)-c_2=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} f(x)=c_1\\ \acute{\eta}\\ f(x)=c_2\end{array}\right\}$$

Ο*πότε*: $f(D_f)\subseteq\{c_1,c_2\}$

↓

Έστω η συνάρτηση f *δεν είναι σταθερή τότε θα υπάρχουν* $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ *με* $x_1\neq x_2$, $f(x_1)=c_1$, $f(x_2)=c_2$

$$\textit{Διακρίνω τις περιπτώσεις}:\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\,x_1<x_2\\ (\mathrm{II})\,x_1>x_2\end{array}\right.$$

↓

$\Pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\pi\tau\omega\sigma\eta(\mathrm{I})$

$\begin{cases} \mathrm{I})\mathrm{H}\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ \delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\mu\alpha\ \kappa\lambda\varepsilon\sigma\tau\acute{o}\ [x_1,x_2] \\ \mathrm{II})\ f(x_1)\neq f(x_2) \end{cases}$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών κάθε αριθμός που βρίσκεται μεταξύ του $f(x_1)$ και $f(x_2)$ είναι τιμή της συνάρτησης f. Άτοπο γιατί η συνάτηση f έχει μόνο ως τιμές τους αριθμούς c_1, c_2

$\Pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\pi\tau\omega\sigma\eta(\mathrm{II})$

$\begin{cases} \mathrm{I})\mathrm{H}\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ \delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\mu\alpha\ \kappa\lambda\varepsilon\sigma\tau\acute{o}\ [x_2,x_1] \\ \mathrm{II})\ f(x_1)\neq f(x_2) \end{cases}$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών κάθε αριθμός που βρίσκεται μεταξύ του $f(x_2)$ και $f(x_1)$ είναι τιμή της συνάρτησης f. Άτοπο γιατί η συνάτηση f έχει μόνο ως τιμές τους αριθμούς c_1, c_2

↓

Συνεπώς η f είναι σταθερή συνάρτηση. Άρα $f(x)=c$ για κάθε $x\in D_f$

↓

$$\left(f(x)-c_1\right)\left(f(x)-c_2\right)=0 \overset{f(x)=c\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in D_f}{\Longleftrightarrow} \begin{Bmatrix} c-c_1=0 \\ \acute{\eta} \\ c-c_2=0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} c=c_1 \\ \acute{\eta} \\ c=c_2 \end{Bmatrix}$$

Εστω η συνάρτηση f συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $x_1,x_2,\dots,x_\nu\in[\alpha,\beta]$ και $\kappa_1,\kappa_2,\dots,\kappa_\nu>0$. Πως θα αποδείξω ότι υπάρχει $\xi\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε:

$$f(\xi)=\frac{\kappa_1 f(x_1)+\kappa_2 f(x_2)+\dots+\kappa_\nu f(x_\nu)}{\kappa_1+\kappa_2+\dots+\kappa_\nu}$$

↓

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα τότε παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μέγιστη τιμή M και ελάχιστη τιμή m

Οπότε υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in[\alpha,\beta]$ με $f(\xi_1)=m, f(\xi_2)=M$ τέτοια ώστε $m\leq f(x)\leq M$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$

↓

$$\downarrow$$

$$\left.\begin{cases} m \le f\left(x_1\right) \le M \\ m \le f\left(x_2\right) \le M \\ \quad\vdots \\ m \le f\left(x_\nu\right) \le M \end{cases}\right\} \overset{\kappa_1,\kappa_2,\cdots,\kappa_\nu>0}{\Longrightarrow} \left.\begin{cases} \kappa_1 m \le \kappa_1 f\left(x_1\right) \le \kappa_1 M \\ \kappa_2 m \le \kappa_2 f\left(x_2\right) \le \kappa_2 M \\ \quad\vdots \\ \kappa_\nu m \le \kappa_\nu f\left(x_\nu\right) \le \kappa_\nu M \end{cases}\right\} \overset{(+)}{\Longrightarrow}$$

$$\kappa_1 m + \kappa_2 m + \cdots + \kappa_\nu m \le \kappa_1 f\left(x_1\right) + \kappa_2 f\left(x_2\right) + \cdots + \kappa_\nu f\left(x_\nu\right) \le \kappa_\nu M + \kappa_2 M + \cdots + \kappa_1 M \Rightarrow$$

$$\left(\kappa_1 + \kappa_2 + \cdots + \kappa_\nu\right) m \le \kappa_1 f\left(x_1\right) + \kappa_2 f\left(x_2\right) + \cdots + \kappa_\nu f\left(x_\nu\right) \le \left(\kappa_1 + \kappa_2 + \cdots + \kappa_\nu\right) M \overset{\kappa_1+\kappa_2+\cdots+\kappa_\nu>0}{\Longrightarrow}$$

$$\frac{\left(\kappa_1 + \kappa_2 + \cdots + \kappa_\nu\right) m}{\kappa_1 + \kappa_2 + \cdots + \kappa_\nu} \le \frac{\kappa_1 f\left(x_1\right) + \kappa_2 f\left(x_2\right) + \cdots + \kappa_\nu f\left(x_\nu\right)}{\kappa_1 + \kappa_2 + \cdots + \kappa_\nu} \le \frac{\left(\kappa_1 + \kappa_2 + \cdots + \kappa_\nu\right) M}{\kappa_1 + \kappa_2 + \cdots + \kappa_\nu} \Rightarrow$$

$$m \le \frac{\kappa_1 f\left(x_1\right) + \kappa_2 f\left(x_2\right) + \cdots + \kappa_\nu f\left(x_\nu\right)}{\kappa_1 + \kappa_2 + \cdots + \kappa_\nu} \le M$$

$$\downarrow$$

$\Delta\iota\alpha\kappa\rho\acute{\iota}\nu\omega\ \tau\iota\varsigma\ \pi\varepsilon\rho\iota\pi\tau\acute{\omega}\sigma\varepsilon\iota\varsigma:$

$$\left.\begin{cases} (\mathrm{I})\, m = \dfrac{\kappa_1 f\left(x_1\right) + \kappa_2 f\left(x_2\right) + \cdots + \kappa_\nu f\left(x_\nu\right)}{\kappa_1 + \kappa_2 + \cdots + \kappa_\nu} \\ (\mathrm{II})\, \dfrac{\kappa_1 f\left(x_1\right) + \kappa_2 f\left(x_2\right) + \cdots + \kappa_\nu f\left(x_\nu\right)}{\kappa_1 + \kappa_2 + \cdots + \kappa_\nu} = M \\ (\mathrm{III})\, m < \dfrac{\kappa_1 f\left(x_1\right) + \kappa_2 f\left(x_2\right) + \cdots + \kappa_\nu f\left(x_\nu\right)}{\kappa_1 + \kappa_2 + \cdots + \kappa_\nu} < M \end{cases}\right\}$$

$$\Pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\pi\tau\omega\sigma\eta\,(\mathrm{I}): m = \frac{\kappa_1 f\left(x_1\right) + \kappa_2 f\left(x_2\right) + \cdots + \kappa_\nu f\left(x_\nu\right)}{\kappa_1 + \kappa_2 + \cdots + \kappa_\nu} \overset{m=f(\xi_1),\xi_1\in[\alpha,\beta]}{\Longrightarrow}$$

$$\left.\begin{cases} f\left(\xi_1\right) = \dfrac{\kappa_1 f\left(x_1\right) + \kappa_2 f\left(x_2\right) + \cdots + \kappa_\nu f\left(x_\nu\right)}{\kappa_1 + \kappa_2 + \cdots + \kappa_\nu} \\ \xi_1 \in [\alpha, \beta] \end{cases}\right\}$$

$$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota\ \xi \in [\alpha, \beta]\ \ \mu\varepsilon\ \ f\left(\xi\right) = \frac{\kappa_1 f\left(x_1\right) + \kappa_2 f\left(x_2\right) + \cdots + \kappa_\nu f\left(x_\nu\right)}{\kappa_1 + \kappa_2 + \cdots + \kappa_\nu}$$

$$\Pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\pi\tau\omega\sigma\eta\,(\mathrm{II}): M = \frac{\kappa_1 f\left(x_1\right) + \kappa_2 f\left(x_2\right) + \cdots + \kappa_\nu f\left(x_\nu\right)}{\kappa_1 + \kappa_2 + \cdots + \kappa_\nu} \overset{M=f(\xi_2),\xi_2\in[\alpha,\beta]}{\Longrightarrow}$$

$$\left.\begin{cases} f\left(\xi_2\right) = \dfrac{\kappa_1 f\left(x_1\right) + \kappa_2 f\left(x_2\right) + \cdots + \kappa_\nu f\left(x_\nu\right)}{\kappa_1 + \kappa_2 + \cdots + \kappa_\nu} \\ \xi_2 \in [\alpha, \beta] \end{cases}\right\}$$

$$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota\ \xi \in [\alpha, \beta]\ \ \mu\varepsilon\ \ f\left(\xi\right) = \frac{\kappa_1 f\left(x_1\right) + \kappa_2 f\left(x_2\right) + \cdots + \kappa_\nu f\left(x_\nu\right)}{\kappa_1 + \kappa_2 + \cdots + \kappa_\nu}$$

$$\Pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\pi\tau\omega\sigma\eta(\mathrm{III}): m<\frac{\kappa_1 f(x_1)+\kappa_2 f(x_2)+\bullet\bullet\bullet+\kappa_\nu f(x_\nu)}{\kappa_1+\kappa_2+\bullet\bullet\bullet+\kappa_\nu}<M \Rightarrow$$

$$f(\xi_1)<\frac{\kappa_1 f(x_1)+\kappa_2 f(x_2)+\bullet\bullet\bullet+\kappa_\nu f(x_\nu)}{\kappa_1+\kappa_2+\bullet\bullet\bullet+\kappa_\nu}<f(\xi_2)$$

$\underline{\mathrm{A}\nu\ \xi_1<\xi_2}$

$$\acute{E}\chi\omega:\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\mathrm{H}\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ \kappa\lambda\varepsilon\iota\sigma\tau\acute{o}\ \delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\mu\alpha\ [\xi_1,\xi_2]\\(\mathrm{II})\, f(\xi_1)\neq f(\xi_2)\\(\mathrm{III})\, f(\xi_1)<\dfrac{\kappa_1 f(x_1)+\kappa_2 f(x_2)+\bullet\bullet\bullet+\kappa_\nu f(x_\nu)}{\kappa_1+\kappa_2+\bullet\bullet\bullet+\kappa_\nu}<f(\xi_2)\end{array}\right\}$$

$\mathrm{T\acute{o}\tau\varepsilon}\ \sigma\acute{\upsilon}\mu\varphi\omega\nu\alpha\ \mu\varepsilon\ \tau o\ \theta\varepsilon\acute{\omega}\rho\eta\mu\alpha\ \tau\omega\nu\ \varepsilon\nu\delta\iota\acute{\alpha}\mu\varepsilon\sigma\omega\nu\ \tau\iota\mu\acute{\omega}\nu\ \theta\alpha$

$\upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota\ \xi\in(\xi_1,\xi_2)\ \tau\acute{\varepsilon}\tau o\iota o\ \acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon\ f(\xi)=\dfrac{\kappa_1 f(x_1)+\kappa_2 f(x_2)+\bullet\bullet\bullet+\kappa_\nu f(x_\nu)}{\kappa_1+\kappa_2+\bullet\bullet\bullet+\kappa_\nu}$

$$\left\{\begin{array}{l}f(\xi)=\dfrac{\kappa_1 f(x_1)+\kappa_2 f(x_2)+\bullet\bullet\bullet+\kappa_\nu f(x_\nu)}{\kappa_1+\kappa_2+\bullet\bullet\bullet+\kappa_\nu}\\\xi\in(\xi_1,\xi_2)\end{array}\right\}\overset{(\xi_1,\xi_2)\subseteq(\alpha,\beta)}{\Longrightarrow}$$

$$\left\{\begin{array}{l}f(\xi)=\dfrac{\kappa_1 f(x_1)+\kappa_2 f(x_2)+\bullet\bullet\bullet+\kappa_\nu f(x_\nu)}{\kappa_1+\kappa_2+\bullet\bullet\bullet+\kappa_\nu}\\\xi\in(\alpha,\beta)\end{array}\right\}$$

$\underline{\mathrm{A}\nu\ \xi_1>\xi_2}$

$$\acute{E}\chi\omega:\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\mathrm{H}\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ \kappa\lambda\varepsilon\iota\sigma\tau\acute{o}\ \delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\mu\alpha\ [\xi_2,\xi_1]\\(\mathrm{II})\, f(\xi_1)\neq f(\xi_2)\\(\mathrm{III})\, f(\xi_1)<\dfrac{\kappa_1 f(x_1)+\kappa_2 f(x_2)+\bullet\bullet\bullet+\kappa_\nu f(x_\nu)}{\kappa_1+\kappa_2+\bullet\bullet\bullet+\kappa_\nu}<f(\xi_2)\end{array}\right\}$$

$\mathrm{T\acute{o}\tau\varepsilon}\ \sigma\acute{\upsilon}\mu\varphi\omega\nu\alpha\ \mu\varepsilon\ \tau o\ \theta\varepsilon\acute{\omega}\rho\eta\mu\alpha\ \tau\omega\nu\ \varepsilon\nu\delta\iota\acute{\alpha}\mu\varepsilon\sigma\omega\nu\ \tau\iota\mu\acute{\omega}\nu\ \theta\alpha$

$\upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota\ \xi\in(\xi_2,\xi_1)\ \tau\acute{\varepsilon}\tau o\iota o\ \acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon\ f(\xi)=\dfrac{\kappa_1 f(x_1)+\kappa_2 f(x_2)+\bullet\bullet\bullet+\kappa_\nu f(x_\nu)}{\kappa_1+\kappa_2+\bullet\bullet\bullet+\kappa_\nu}$

$$\left\{\begin{array}{l}f(\xi)=\dfrac{\kappa_1 f(x_1)+\kappa_2 f(x_2)+\bullet\bullet\bullet+\kappa_\nu f(x_\nu)}{\kappa_1+\kappa_2+\bullet\bullet\bullet+\kappa_\nu}\\\xi\in(\xi_2,\xi_1)\end{array}\right\}\overset{(\xi_2,\xi_1)\subseteq(\alpha,\beta)}{\Longrightarrow}$$

$$\left\{\begin{array}{l}f(\xi)=\dfrac{\kappa_1 f(x_1)+\kappa_2 f(x_2)+\bullet\bullet\bullet+\kappa_\nu f(x_\nu)}{\kappa_1+\kappa_2+\bullet\bullet\bullet+\kappa_\nu}\\\xi\in(\alpha,\beta)\end{array}\right\}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1.

Έστω η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *μια συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα*
$(f(x)-2000)(f(x)-2002)=0$ *για κάθε* $x\in\mathbb{R}$
I)Ν*α αποδείξετε οτι* $f(\mathbb{R})\subseteq\{2000,2002\}$
II)Ν*α αποδείξετε οτι η* f *είναι σταθερή*
III)Ν*α βρεθεί ο τύπος της* f

I)$(f(x)-2000)(f(x)-2002)=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} f(x)-2000=0 \\ \acute{\eta} \\ f(x)-2002=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} f(x)=2000 \\ \acute{\eta} \\ f(x)=2002 \end{matrix}\right\}$

Ο*πότε* : $f(\mathbb{R})\subseteq\{2000,2002\}$

II)*Έστω η συνάρτηση* f *δεν είναι σταθερή τότε θα υπάρχουν*

$x_1,x_2\in\mathbb{R}$ *με* $x_1\neq x_2$, $f(x_1)=2000$, $f(x_2)=2002$

Δ*ιακρίνω τις περιπτώσεις* : $\begin{cases} 1^{\eta})x_1<x_2 \\ 2^{\eta})x_1>x_2 \end{cases}$

Π*ερίπτωση* 1^{η} :

$\begin{cases} \text{I)Η } f \text{ είναι συνεχής στο διάστημα } [x_1,x_2] \\ \text{II) } f(x_1)\neq f(x_2) \end{cases}$

Ο*πότε σύμφωνα με το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών κάθε αριθμός που βρίσκεται μεγταξύ του* $f(x_1)$ *και* $f(x_2)$ *είναι τιμή της συνάρτησης* f.*Άτοπο γιατί η συνάτηση* f *έχει μόνο ως τιμές τους αριθμούς* $2000, 2002$

Π*ερίπτωση* 2^{η} :

$\begin{cases} \text{I)Η } f \text{ είναι συνεχής στο διάστημα } [x_2,x_1] \\ \text{II) } f(x_1)\neq f(x_2) \end{cases}$

Ο*πότε σύμφωνα με το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών κάθε αριθμός που βρίσκεται μεγταξύ του* $f(x_1)$ *και* $f(x_2)$ *είναι τιμή της συνάρτησης* f.*Άτοπο γιατί η συνάτηση* f *έχει μόνο ως τιμές τους αριθμούς* $2000, 2002$

Σ*υνεπώς η* f *είναι σταθερή συνάρτηση*

III)Επειδή f είναι μια σταθερή συνάρτηση θα έχω:

$f(x)=c$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$$\left(f(x)-2000\right)\left(f(x)-2002\right)=0 \overset{f(x)=c \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}D_f}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{matrix} c-2000=0 \\ \text{ή} \\ c-2002=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} c=2000 \\ \text{ή} \\ c=2002 \end{matrix}\right\}$$

2.

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ να αποδείξετε οτι υπάρχει $\xi\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε:

$$f(\xi)=\frac{1}{5}\left[2f(\alpha)+3f(\beta)\right]$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ τότε παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μέγιστη τιμή M και ελάχιστη τιμή m

Οπότε υπάρχουν $x_1,x_2\in[\alpha,\beta]$ με $f(x_1)=m, f(x_2)=M$ τέτοια ώστε

$m\le f(x)\le M$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$

$$\left\{\begin{matrix} m\le f(\alpha)\le M \\ m\le f(\beta)\le M \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} 2m\le 2f(\alpha)\le 2M \\ 3m\le 3f(\beta)\le 3M \end{matrix}\right\} \overset{(+)}{\Longrightarrow}$$

$$2m+3m\le 2f(\alpha)+3f(\beta)\le 2M+3M \Rightarrow 5m\le 2f(\alpha)+3f(\beta)\le 5M \Rightarrow$$

$$m\le \frac{2f(\alpha)+3f(\beta)}{5}\le M$$

Διακρίνω τις περιπτώσεις:

$$\left\{\begin{matrix} (\mathrm{I})\, m=\dfrac{2f(\alpha)+3f(\beta)}{5} \\ (\mathrm{II})\, M=\dfrac{2f(\alpha)+3f(\beta)}{5} \\ (\mathrm{III})\, m<\dfrac{2f(\alpha)+3f(\beta)}{5}<M \end{matrix}\right\}$$

$$\text{Περίπτωση}(\mathrm{I}): m=\frac{2f(\alpha)+3f(\beta)}{5} \overset{m=f(x_1),\, x_1\in[\alpha,\beta]}{\Longrightarrow}$$

$$\left\{\begin{matrix} f(x_1)=\dfrac{\kappa_1 f(x_1)+\kappa_2 f(x_2)+\cdots+\kappa_\nu f(x_\nu)}{\kappa_1+\kappa_2+\cdots+\kappa_\nu} \\ x_1\in[\alpha,\beta] \end{matrix}\right\}$$

Οπότε υπάρχει $\xi\in[\alpha,\beta]$ με $f(\xi)=\dfrac{2f(\alpha)+3f(\beta)}{5}$

$$\text{Περίπτωση}(\mathrm{II}): M=\frac{2f(\alpha)+3f(\beta)}{5} \overset{M=f(x_2),\, x_2\in[\alpha,\beta]}{\Longrightarrow}$$

$$\left\{\begin{matrix} f(x_2)=\dfrac{2f(\alpha)+3f(\beta)}{5} \\ x_2\in[\alpha,\beta] \end{matrix}\right\}$$

Οπότε υπάρχει $\xi\in[\alpha,\beta]$ με $f(\xi)=\dfrac{2f(\alpha)+3f(\beta)}{5}$

Περίπτωση(III): $m<\dfrac{2f(\alpha)+3f(\beta)}{5}<M\Rightarrow f(x_1)<\dfrac{2f(\alpha)+3f(\beta)}{5}<f(x_2)$

<u>Αν $x_1<x_2$</u>

$$\text{Έχω}:\left\{\begin{matrix} (\mathrm{I})\ \text{Η } f \text{ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα } [x_1,x_2] \\ (\mathrm{II})\ f(x_1)\neq f(x_2) \\ (\mathrm{III})\ f(x_1)<\dfrac{2f(\alpha)+3f(\beta)}{5}<f(x_2) \end{matrix}\right\}$$

Τότε σύμφωνα με το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών θα υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=\dfrac{2f(\alpha)+3f(\beta)}{5}$

$$\left\{\begin{matrix} f(\xi)=\dfrac{2f(\alpha)+3f(\beta)}{5} \\ \xi\in(x_1,x_2) \end{matrix}\right\}\overset{(x_1,x_2)\subseteq(\alpha,\beta)}{\Longrightarrow}\left\{\begin{matrix} f(\xi)=\dfrac{2f(\alpha)+3f(\beta)}{5} \\ \xi\in(\alpha,\beta) \end{matrix}\right\}$$

<u>Αν $x_1>x_2$</u>

$$\text{Έχω}:\left\{\begin{matrix} (\mathrm{I})\ \text{Η } f \text{ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα } [x_2,x_1] \\ (\mathrm{II})\ f(x_1)\neq f(x_2) \\ (\mathrm{III})\ f(x_1)<\dfrac{2f(\alpha)+3f(\beta)}{5}<f(x_2) \end{matrix}\right\}$$

Τότε σύμφωνα με το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών θα υπάρχει $\xi\in(x_2,x_1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=\dfrac{2f(\alpha)+3f(\beta)}{5}$

$$\left\{\begin{matrix} f(\xi)=\dfrac{2f(\alpha)+3f(\beta)}{5} \\ \xi\in(x_2,x_1) \end{matrix}\right\}\overset{(x_2,x_1)\subseteq(\alpha,\beta)}{\Longrightarrow}\left\{\begin{matrix} f(\xi)=\dfrac{2f(\alpha)+3f(\beta)}{5} \\ \xi\in(\alpha,\beta) \end{matrix}\right\}$$

3.

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:[0,3]\to(0,+\infty)$. Να αποδείξετε οτι υπάρχει $\xi\in[0,3]$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=\sqrt[12]{f^2(3)f^4(1)f^6(2)}$

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[0,3]$ τότε παίρνει στο $[0,3]$ μέγιστη τιμή M και ελάχιστη τιμή m

$\text{Οπότε υπάρχουν } x_1, x_2 \in [0,3] \text{ με } f(x_1)=m, f(x_2)=M \text{ τέτοια ώστε}$
$m \le f(x) \le M \text{ για κάθε } x \in [0,3]$

$$\left\{\begin{array}{l} m \le f(1) \le M \\ m \le f(2) \le M \\ m \le f(3) \le M \end{array}\right\} \overset{\substack{\text{Αν } \alpha,\beta\ge 0 \text{ και } \nu\in\mathbb{N}^* \text{ τότε ισχύει} \\ \text{η ισοδυναμία:} \\ \alpha\le\beta\Leftrightarrow\alpha^{2\nu}\le\beta^{2\nu}}}{\Longrightarrow} \left\{\begin{array}{l} m^4 \le f^4(1) \le M^4 \\ m^6 \le f^6(2) \le M^6 \\ m^2 \le f^2(3) \le M^2 \end{array}\right\} \overset{\substack{\text{Μπορώ να πολλαπλασιάσω} \\ \text{ομόστροφες ανισώσεις κατα μέλή} \\ \text{αρκεί όλα τα μέλη τους να} \\ \text{είναι μη ανητικοί αριθμοί}}}{\Longrightarrow}$$

$$m^4m^6m^2 \le f^4(1)\,f^6(2)\,f^2(3) \le M^4M^6M^2 \Rightarrow m^{12} \le f^4(1)\,f^6(2)\,f^2(3) \le M^{12} \Rightarrow$$

$$\sqrt[12]{m^{12}} \le \sqrt[12]{f^4(1)\,f^6(2)\,f^2(3)} \le \sqrt[12]{M^{12}} \overset{\sqrt[\nu]{\theta^\nu}=\theta,\theta\ge 0}{\Longrightarrow} m \le \sqrt[12]{f^4(1)\,f^6(2)\,f^2(3)} \le M$$

$\text{Διακρίνω τις περιπτώσεις:}$

$$\left\{\begin{array}{l} (\text{I})\, m = \sqrt[12]{f^4(1)\,f^6(2)\,f^2(3)} \\ (\text{II})\, M = \sqrt[12]{f^4(1)\,f^6(2)\,f^2(3)} \\ (\text{III})\, m < \sqrt[12]{f^4(1)\,f^6(2)\,f^2(3)} < M \end{array}\right\}$$

$$\text{Περίπτωση}(\text{I}): m = \sqrt[12]{f^4(1)\,f^6(2)\,f^2(3)} \overset{m=f(x_1),x_1\in[\alpha,\beta]}{\Longrightarrow}$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(x_1) = \sqrt[12]{f^4(1)\,f^6(2)\,f^2(3)} \\ x_1 \in [\alpha,\beta] \end{array}\right\}$$

$\text{Οπότε υπάρχει } \xi \in [\alpha,\beta] \text{ με } f(\xi) = \sqrt[12]{f^4(1)\,f^6(2)\,f^2(3)}$

$$\text{Περίπτωση}(\text{II}): M = \frac{2f(\alpha)+3f(\beta)}{5} \overset{M=f(x_2),x_2\in[\alpha,\beta]}{\Longrightarrow}$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(x_2) = \sqrt[12]{f^4(1)\,f^6(2)\,f^2(3)} \\ x_2 \in [\alpha,\beta] \end{array}\right\}$$

$\text{Οπότε υπάρχει } \xi \in [\alpha,\beta] \text{ με } f(\xi) = \sqrt[12]{f^4(1)\,f^6(2)\,f^2(3)}$

$$\text{Περίπτωση}(\text{III}): m < \sqrt[12]{f^4(1)\,f^6(2)\,f^2(3)} < M \Rightarrow f(x_1) < \sqrt[12]{f^4(1)\,f^6(2)\,f^2(3)} < f(x_2)$$

$\underline{\text{Αν } x_1 < x_2}$

$$\text{Έχω}: \left\{\begin{array}{l} (\text{I})\,\text{Η } f \text{ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα } [x_1,x_2] \\ (\text{II})\, f(x_1) \ne f(x_2) \\ (\text{III})\, f(x_1) < \sqrt[12]{f^4(1)\,f^6(2)\,f^2(3)} < f(x_2) \end{array}\right\}$$

$\text{Τότε σύμφωνα με το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών θα}$
$\text{υπάρχει } \xi \in (x_1,x_2) \text{ τέτοιο ώστε } f(\xi) = \sqrt[12]{f^4(1)\,f^6(2)\,f^2(3)}$

$$\left\{\begin{array}{l} f(\xi) = \sqrt[12]{f^4(1)\,f^6(2)\,f^2(3)} \\ \xi \in (x_1,x_2) \end{array}\right\} \overset{(x_1,x_2)\subseteq(\alpha,\beta)}{\Longrightarrow} \left\{\begin{array}{l} f(\xi) = \sqrt[12]{f^4(1)\,f^6(2)\,f^2(3)} \\ \xi \in (\alpha,\beta) \end{array}\right\}$$

<u>$A\nu\ x_1 > x_2$</u>

$$\text{Έ}\chi\omega:\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\,\mathrm{H}\ f\,\varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ \kappa\lambda\varepsilon\iota\sigma\tau\acute{o}\ \delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\mu\alpha\ [x_2,x_1]\\(\mathrm{II})\,f(x_1)\neq f(x_2)\\(\mathrm{III})\,f(x_1)<\sqrt[12]{f^4(1)\,f^6(2)\,f^2(3)}<f(x_2)\end{array}\right\}$$

Τότε σύμφωνα με το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών θα υπάρχει $\xi\in(x_2,x_1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=\sqrt[12]{f^4(1)\,f^6(2)\,f^2(3)}$

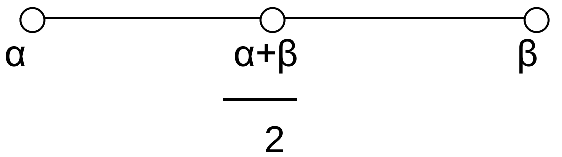
$$\left\{\begin{array}{l}f(\xi)=\sqrt[12]{f^4(1)\,f^6(2)\,f^2(3)}\\\xi\in(x_2,x_1)\end{array}\right\}\overset{(x_2,x_1)\subseteq(\alpha,\beta)}{\Longrightarrow}\left\{\begin{array}{l}f(\xi)=\sqrt[12]{f^4(1)\,f^6(2)\,f^2(3)}\\\xi\in(\alpha,\beta)\end{array}\right\}$$

4.

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ να αποδείξετε οτι υπάρχει $\xi\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε:

$$f(\xi)=\frac{1}{6}\left[f(\alpha)+2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+3f(\beta)\right]$$

6 2



Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ τότε παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μέγιστη τιμή M και ελάχιστη τιμή m

Οπότε υπάρχουν $x_1,x_2\in[\alpha,\beta]$ με $f(x_1)=m,\ f(x_2)=M$ τέτοια ώστε $m\le f(x)\le M$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$

$$\left\{\begin{array}{l}m\le f(\alpha)\le M\\m\le f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\le M\\m\le f(\beta)\le M\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}m\le f(\alpha)\le 2M\\2m\le 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\le 2M\\3m\le 3f(\beta)\le 3M\end{array}\right\}\overset{(+)}{\Longrightarrow}$$

$$m+3m+3m\le f(\alpha)+2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+3f(\beta)\le M+2M+3M\Rightarrow$$

$$6m\le f(\alpha)+2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+3f(\beta)\le 5M\Rightarrow m\le\frac{f(\alpha)+2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+3f(\beta)}{6}\le M$$

$\Delta\iota\alpha\kappa\rho\acute{\iota}\nu\omega\ \tau\iota\varsigma\ \pi\varepsilon\rho\iota\pi\tau\acute{\omega}\sigma\varepsilon\iota\varsigma:$

$$\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\, m=\dfrac{f(\alpha)+2f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)+3f(\beta)}{6}\\ (\mathrm{II})\, M=\dfrac{f(\alpha)+2f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)+3f(\beta)}{6}\\ (\mathrm{III})\, m<\dfrac{f(\alpha)+2f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)+3f(\beta)}{6}<M\end{array}\right\}$$

$$\Pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\pi\tau\omega\sigma\eta(\mathrm{I}): m=\frac{f(\alpha)+2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+3f(\beta)}{6} \overset{m=f(x_1),x_1\in[\alpha,\beta]}{\Longrightarrow}$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(x_1)=\dfrac{f(\alpha)+2f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)+3f(\beta)}{6}\\ x_1\in[\alpha,\beta]\end{array}\right\}$$

$$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota\ \xi\in[\alpha,\beta]\ \mu\varepsilon\ f(\xi)=\frac{f(\alpha)+2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+3f(\beta)}{6}$$

$$\Pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\pi\tau\omega\sigma\eta(\mathrm{II}): M=\frac{f(\alpha)+2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+3f(\beta)}{6} \overset{M=f(x_2),x_2\in[\alpha,\beta]}{\Longrightarrow}$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(x_2)=\dfrac{f(\alpha)+2f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)+3f(\beta)}{6}\\ x_2\in[\alpha,\beta]\end{array}\right\}$$

$$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota\ \xi\in[\alpha,\beta]\ \mu\varepsilon\ f(\xi)=\frac{f(\alpha)+2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+3f(\beta)}{6}$$

$$\Pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\pi\tau\omega\sigma\eta(\mathrm{III}): m<\frac{f(\alpha)+2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+3f(\beta)}{6}<M \Rightarrow$$

$$f(x_1)<\frac{f(\alpha)+2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+3f(\beta)}{6}<f(x_2)$$

<u>Αν $x_1 < x_2$</u>

$$\text{Έχω}:\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\ \text{Η } f \text{ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα } [x_1, x_2] \\ (\mathrm{II})\ f(x_1) \neq f(x_2) \\ (\mathrm{III})\ f(x_1) < \dfrac{f(\alpha)+2f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)+3f(\beta)}{6} < f(x_2)\end{array}\right\}$$

Τότε σύμφωνα με το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών θα

υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \dfrac{f(\alpha)+2f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)+3f(\beta)}{6}$

$$\left\{\begin{array}{l} f(\xi) = \dfrac{f(\alpha)+2f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)+3f(\beta)}{6} \\ \xi \in (x_1, x_2)\end{array}\right\} \overset{(x_1,x_2)\subseteq(\alpha,\beta)}{\Longrightarrow} \left\{\begin{array}{l} f(\xi) = \dfrac{f(\alpha)+2f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)+3f(\beta)}{6} \\ \xi \in (\alpha, \beta)\end{array}\right\}$$

<u>Αν $x_1 > x_2$</u>

$$\text{Έχω}:\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\ \text{Η } f \text{ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα } [x_2, x_1] \\ (\mathrm{II})\ f(x_1) \neq f(x_2) \\ (\mathrm{III})\ f(x_1) < \dfrac{f(\alpha)+2f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)+3f(\beta)}{6} < f(x_2)\end{array}\right\}$$

Τότε σύμφωνα με το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών θα

υπάρχει $\xi \in (x_2, x_1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \dfrac{f(\alpha)+2f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)+3f(\beta)}{6}$

$$\left\{\begin{array}{l} f(\xi) = \dfrac{f(\alpha)+2f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)+3f(\beta)}{6} \\ \xi \in (x_2, x_1)\end{array}\right\} \overset{(x_1,x_2)\subseteq(\alpha,\beta)}{\Longrightarrow} \left\{\begin{array}{l} f(\xi) = \dfrac{f(\alpha)+2f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)+3f(\beta)}{6} \\ \xi \in (\alpha, \beta)\end{array}\right\}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Έστω η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα

$(f(x)-e^x-1)(f(x)-e^x-3)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Να βρεθεί ο τύπος της f

Υπόδειξη: Θεωρώ την συνάρτηση $g(x)=f(x)-e^x$. Τότε $g(\mathbb{R})\subseteq\{1,3\}$

Έστω η g δεν είναι σταθερή.Τότε *υπάρχουν θα υπάρχουν* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ *με* $x_1 \neq x_2, g(x_1)=1, g(x_2)=3$.*Σύμφωνα με το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών επειδή* $g(x_1)=1<2<3=g(x_2)$ *ο αριθμός* 2 *είναι τιμή της* g (*Άτοπο*)

2.

Α*ν η συνεχής συνάρτηση* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *με* $6f(3)<f(0)+5f(1)<6f(4)$
(Ι) *αποδείξετε οτι υπάρχει* $\xi\in[0,1]$ *τέτοιο ώστε*:
$f(\xi)=\frac{1}{6}[f(0)+5f(1)]$
(ΙΙ) Η f *δεν είναι* "1−1"
Υ*πόδειξη*: (Ι) Ε*φαρμόζοντας τα θεωρήματα μέγιστης − ελάχιστης τιμής και των ενδιάμεσων τιμών στο* $[0,1]$ *αποδεικνύω οτι υπάρχει* $\xi\in[0,1]$ *τέτοιο ώστε*: $f(\xi)=\frac{1}{6}[f(0)+5f(1)]$
(ΙΙ) $6f(3)<f(0)+5f(1)<6f(4) \Leftrightarrow f(3)<\frac{1}{6}[f(0)+5f(1)]<f(4)$
Ε*φαρμόζοντας το θεώρηματων ενδιάμεσων τιμών στο* $[3,4]$ *αποδεικνύω οτι υπάρχει* $x_0\in(3,4)$ *τέτοιο ώστε*: $f(x_0)=\frac{1}{6}[f(0)+5f(1)]$
Έχω $x_0\neq\xi$ *με* $f(x_0)=f(\xi)$.*Άρα η* f *δεν είναι* "1−1"

3.

Δ*ίνεται συνεχής συνάρτηση* $f:[0,5]\to(0,+\infty)$.Ν*α αποδείξετε οτι υπάρχει* $\xi\in[0,3]$ *τέτοιο ώστε* $f(\xi)=\sqrt[17]{f^3(0)f^4(2)f^8(3)f^2(4)}$

4.

Α*ν η συνάρτηση* f *είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα* $[\alpha,\beta]$ *να αποδείξετε οτι υπάρχει* $\xi\in[\alpha,\beta]$ *τέτοιο ώστε*:
$f(\xi)=\frac{1}{10}\left[7f(\alpha)+f(\frac{3\alpha+2\beta}{5})+2f(\beta)\right]$

5.

Έστω η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *μια συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα* $f^2(x)-2f(x)-8=0$ *για κάθε* $x\in\mathbb{R}$
Ν*α βρεθεί ο τύπος της* f
Υ*πόδειξη*: $f^2(x)-2f(x)-8=0 \overset{\text{Προσθαφαιρώ το 1}}{\Longleftrightarrow} f^2(x)-2f(x)+1-1-8=0 \Leftrightarrow$
$f^2(x)-2\bullet f(x)\bullet 1+1^2-3^2=0 \Leftrightarrow (f(x)-1)-3^2=0 \Leftrightarrow (f(x)-4)(f(x)+2)=0$