ΤΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΗΣ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ ΚΑΙ Η ΕΙΣ ΑΤΟΠΟΝ ΑΠΑΓΩΓΗ
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1.

> *Δίνονται η συνάρτηση* f *η οποία είναι συνεχής στο διάστημα* $[1,4]$
> *με* $f(1)\,f(2)\,f(4)=8$ *και* $f(x)\neq 0$ *για κάθε* $x\in[1,4]$
> Ν*α αποδείξετε οτι:*
> $(\mathrm{I})\ f(x)>0$ *για κάθε* $x\in[1,4]$
> (II) Η *εξίσωση* $f(x)=2$ *έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα* $[1,4]$
> (III) Η *εξίσωση* $f(x)=x$ *έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο* $[1,4]$

$$(\mathrm{I})\,\text{Έχω}:\left.\begin{cases}(\mathrm{I})\text{Η } f \text{ είναι συνεχής στο } [1,4]\\ (\mathrm{II})\ f(x)\neq 0 \text{ για κάθε } x\in[1,4]\end{cases}\right\}$$

Ο*πότε* $f(x)>0$ *για κάθε* $x\in[1,4]$ *ή* $f(x)<0$ *για κάθε* $x\in[1,4]$

Έστω $f(x)<0$ *για κάθε* $x\in[1,4]$.Τ*ότε θα έχω:*

$$\left.\begin{cases}f(1)<0\\ f(2)<0\\ f(4)<0\end{cases}\right\}\Rightarrow f(1)\,f(2)\,f(4)<0\ \overset{f(1)f(2)f(4)=8}{\Longrightarrow}\ 8<0\,(\text{Άτοπο})$$

Ο*πότε* $f(x)>0$ *για κάθε* $x\in[1,4]$

(II)Ε*πειδή η συνάρτηση* f *είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα* $[1,4]$ *τότε παίρνει στο* $[1,4]$ *μέγιστη τιμή* M *και ελάχιστη τιμή* m

Ο*πότε υπάρχουν* $x_1,x_2\in[1,4]$ *με* $f(x_1)=m,\ f(x_2)=M$ *τέτοια ώστε*
$m\leq f(x)\leq M$ *για κάθε* $x\in[1,4]$

$$\left.\begin{cases}m\leq f(1)\leq M\\ m\leq f(2)\leq M\\ m\leq f(4)\leq M\end{cases}\right\}\ \overset{\substack{\text{Μπορώ να πολλαπλασιάσω}\\ \text{ομόστροφες ανισώσεις κατα μέλή}\\ \text{αρκεί όλα τα μέλη τους να}\\ \text{είναι μη ανητικοί αριθμοί}}}{\Longrightarrow}\ m\bullet m\bullet m\leq f(1)\,f(2)\,f(3)\leq M\bullet M\bullet M^2\Rightarrow$$

$$m^3\leq f(1)\,f(2)\,f(4)\leq M^3\Rightarrow\sqrt[3]{m^3}\leq\sqrt[3]{f(1)\,f(2)\,f(4)}\leq\sqrt[3]{M^3}\ \overset{\sqrt[\nu]{\theta^\nu}=\theta,\theta\geq 0}{\Longrightarrow}$$

$$m\leq\sqrt[3]{f(1)\,f(2)\,f(4)}\leq M$$

Δ*ιακρίνω τις περιπτώσεις:*

$$\left.\begin{cases}(\mathrm{I})\,m=\sqrt[3]{f(1)\,f(2)\,f(4)}\\ (\mathrm{II})\,M=\sqrt[3]{f(1)\,f(2)\,f(4)}\\ (\mathrm{III})\,m<\sqrt[3]{f(1)\,f(2)\,f(4)}<M\end{cases}\right\}$$

$$\Pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\pi\tau\omega\sigma\eta(\mathrm{I}): m=\sqrt[3]{f(1)f(2)f(4)} \overset{m=f(x_1),x_1\in[1,4]}{\Longrightarrow}$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(x_1)=\sqrt[3]{f(1)f(2)f(4)} \\ x_1\in[\alpha,\beta] \end{array}\right\}$$

$O\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota\ \xi\in[1,4]\ \ \mu\varepsilon\ \ f(\xi)=\sqrt[3]{f(1)f(2)f(4)}$

$$\Pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\pi\tau\omega\sigma\eta(\mathrm{II}): M=\sqrt[3]{f(1)f(2)f(4)} \overset{M=f(x_2),x_2\in[1,4]}{\Longrightarrow}$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(x_2)=\sqrt[3]{f(1)f(2)f(4)} \\ x_2\in[1,4] \end{array}\right\}$$

$O\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota\ \xi\in[1,4]\ \ \mu\varepsilon\ \ f(\xi)=\sqrt[3]{f(1)f(2)f(4)}$

$$\Pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\pi\tau\omega\sigma\eta(\mathrm{III}): m<\sqrt[3]{f(1)f(2)f(4)}<M \Rightarrow f(x_1)<\sqrt[3]{f(1)f(2)f(4)}<f(x_2)$$

$\underline{A\nu\ x_1<x_2}$

$$\acute{E}\chi\omega:\left\{\begin{array}{l} (\mathrm{I})\mathrm{H}\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ \kappa\lambda\varepsilon\iota\sigma\tau\acute{o}\ \delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\mu\alpha\ [x_1,x_2] \\ (\mathrm{II})\, f(x_1)\neq f(x_2) \\ (\mathrm{III})\, f(x_1)<\sqrt[3]{f(1)f(2)f(4)}<f(x_2) \end{array}\right\}$$

$\mathrm{T}\acute{o}\tau\varepsilon\ \sigma\acute{\upsilon}\mu\varphi\omega\nu\alpha\ \mu\varepsilon\ \tau o\ \theta\varepsilon\acute{\omega}\rho\eta\mu\alpha\ \tau\omega\nu\ \varepsilon\nu\delta\iota\acute{\alpha}\mu\varepsilon\sigma\omega\nu\ \tau\iota\mu\acute{\omega}\nu\ \theta\alpha$
$\upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota\ \xi\in(x_1,x_2)\ \ \tau\acute{\varepsilon}\tau o\iota o\ \acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon\ \ f(\xi)=\sqrt[3]{f(1)f(2)f(4)}$

$$\left\{\begin{array}{l} f(\xi)=\sqrt[3]{f(1)f(2)f(4)} \\ \xi\in(x_1,x_2) \end{array}\right\} \overset{(x_1,x_2)\subseteq(1,4)}{\Longrightarrow} \left\{\begin{array}{l} f(\xi)=\sqrt[3]{f(1)f(2)f(4)} \\ \xi\in(1,4) \end{array}\right\}$$

$\underline{A\nu\ x_1>x_2}$

$$\acute{E}\chi\omega:\left\{\begin{array}{l} (\mathrm{I})\mathrm{H}\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ \kappa\lambda\varepsilon\iota\sigma\tau\acute{o}\ \delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\mu\alpha\ [x_2,x_1] \\ (\mathrm{II})\, f(x_1)\neq f(x_2) \\ (\mathrm{III})\, f(x_1)<\sqrt[3]{f(1)f(2)f(4)}<f(x_2) \end{array}\right\}$$

$\mathrm{T}\acute{o}\tau\varepsilon\ \sigma\acute{\upsilon}\mu\varphi\omega\nu\alpha\ \mu\varepsilon\ \tau o\ \theta\varepsilon\acute{\omega}\rho\eta\mu\alpha\ \tau\omega\nu\ \varepsilon\nu\delta\iota\acute{\alpha}\mu\varepsilon\sigma\omega\nu\ \tau\iota\mu\acute{\omega}\nu\ \theta\alpha$
$\upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota\ \xi\in(x_2,x_1)\ \ \tau\acute{\varepsilon}\tau o\iota o\ \acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon\ \ f(\xi)=\sqrt[3]{f(1)f(2)f(4)}$

$$\left\{\begin{array}{l} f(\xi)=\sqrt[3]{f(1)f(2)f(4)} \\ \xi\in(x_2,x_1) \end{array}\right\} \overset{(x_2,x_1)\subseteq(1,4)}{\Longrightarrow} \left\{\begin{array}{l} f(\xi)=\sqrt[3]{f(1)f(2)f(4)} \\ \xi\in(1,4) \end{array}\right\}$$

$O\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\left\{\begin{array}{l} f(\xi)=\sqrt[3]{f(1)f(2)f(4)} \\ \xi\in[1,4] \end{array}\right\} \overset{f(1)f(2)f(4)=8}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} f(\xi)=\sqrt[3]{8} \\ \xi\in[1,4] \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} f(\xi)=2 \\ \xi\in[1,4] \end{array}\right\}$$

$(\mathrm{III})\underline{E\sigma\tau\omega\ f(x)\neq x\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in[1,4]}$

$$\left\{\begin{array}{l} f(x)\neq x \\ \Gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in[1,4] \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} f(x)-x\neq 0 \\ \Gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in[1,4] \end{array}\right\}$$

$\Theta\varepsilon\omega\rho\acute{\omega}\ \tau\eta\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ g(x)=f(x)-x, \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in[1,4]$

$$\text{Έχω}:\left\{\begin{matrix}(\mathrm{I})\text{Η } g \text{ είναι συνεχής στο } [1,4] \text{ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων}\\ (\mathrm{II})\, g(x)\neq 0 \text{ για κάθε } x\in[1,4]\end{matrix}\right\}$$

Οπότε $g(x)>0$ για κάθε $x\in[1,4]$ ή $g(x)<0$ για κάθε $x\in[1,4]$

Έστω $g(x)>0$ για κάθε $x\in[1,4]$. Τότε θα έχω:

$$\left\{\begin{matrix}g(x)>0\\ \text{Για κάθε } x\in[1,4]\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}f(x)-x>0\\ \text{Για κάθε } x\in[1,4]\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}f(x)>x\\ \text{Για κάθε } x\in[1,4]\end{matrix}\right\}$$

$$\left.\begin{cases}f(1)>1\\ f(2)>2\\ f(4)>4\\ f(1),f(2),f(4)>0\end{cases}\right\}\overset{\substack{\text{Μπορώ να πολλαπλασιάσω}\\ \text{ομόστροφες ανισώσεις κατα μέλη}\\ \text{αρκεί τα μέλη τους να είναι μη αρνητικοί}\\ \text{αριθμοί}}}{\Longrightarrow} f(1)f(2)f(4)>1\bullet 2\bullet 4\overset{f(1)f(2)f(4)=8}{\Longrightarrow}$$

$8>8$ (Άτοπο)

Έστω $g(x)<0$ για κάθε $x\in[1,4]$. Τότε θα έχω:

$$\left\{\begin{matrix}g(x)<0\\ \text{Για κάθε } x\in[1,4]\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}f(x)-x<0\\ \text{Για κάθε } x\in[1,4]\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}f(x)<x\\ \text{Για κάθε } x\in[1,4]\end{matrix}\right\}$$

$$\left.\begin{cases}f(1)<1\\ f(2)<2\\ f(4)<4\\ f(1),f(2),f(4)>0\end{cases}\right\}\overset{\substack{\text{Μπορώ να πολλαπλασιάσω}\\ \text{ομόστροφες ανισώσεις κατα μέλη}\\ \text{αρκεί τα μέλη τους να είναι μη αρνητικοί}\\ \text{αριθμοί}}}{\Longrightarrow} f(1)f(2)f(4)>1\bullet 2\bullet 4\overset{f(1)f(2)f(4)=8}{\Longrightarrow}$$

$8<8$ (Άτοπο)

Άρα δεν ισχύει $f(x)\neq x$ για κάθε $x\in[1,4]$. Οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον

$\xi\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=\xi$

2.

Έστω $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχείς και γνησίως φθίνουσες συναρτήσεις με $g\circ f=f\circ g$. Να αποδειχθεί ότι:
(I) Οι $g\circ f, f\circ g$ είναι γνησίως αύξουσες
(II) Η συνάρτηση $h(x)=f(x)-x$ είναι γνησίως φθίνουσα
(III) Υπάρχει μοναδικό $x_0\in\mathbb{R}$, ώστε $f(x_0)=g(x_0)=x_0$

$(\mathrm{I})\, D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}:x\in D_f, f(x)\in D_g\}\overset{D_f=D_g=\mathbb{R}}{=}\{x\in\mathbb{R}:f(x)\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$

Έστω $x_1<x_2$:

$$x_1<x_2\overset{f\overset{\vee}{\downarrow}\mathbb{R}}{\Rightarrow} f(x_1)>f(x_2)\overset{g\overset{\vee}{\downarrow}\mathbb{R}}{\Rightarrow} g(f(x_1))<g(f(x_2))\Rightarrow(g\circ f)(x_1)<(g\circ f)(x_2)$$

Άρα $g\circ f\underset{\wedge}{\uparrow}$

$$D_{f\circ g}=\left\{x\in\mathbb{R}:x\in D_g,g(x)\in D_f\right\}\overset{D_f=D_g=\mathbb{R}}{=}\left\{x\in\mathbb{R}:g(x)\in\mathbb{R}\right\}=\mathbb{R}$$

$Έστω\ x_1<x_2:$

$$x_1<x_2\overset{g\overset{\vee}{\downarrow}\mathbb{R}}{\Rightarrow}g(x_1)>g(x_2)\overset{f\overset{\vee}{\downarrow}\mathbb{R}}{\Rightarrow}f(g(x_1))<f(g(x_2))\Rightarrow(f\circ g)(x_1)<(f\circ g)(x_2)$$

$Άρα\ f\circ g\underset{\wedge}{\uparrow}$

$(\mathrm{II})\ Έχω: D_f=D_h$

$Έστω\ x_1<x_2:$

$$x_1<x_2\overset{f\overset{\vee}{\downarrow}\mathbb{R}}{\Rightarrow}\left\{\begin{array}{c}f(x_1)>f(x_2)\\-x_1>-x_2\end{array}\right\}\overset{(+)}{\Longrightarrow}f(x_1)-x_1>f(x_2)-x_2\Rightarrow h(x_1)>h(x_2)$$

$Άρα\ h\overset{\vee}{\downarrow}\mathbb{R}$

(III) Θεωρώ τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-x,x\in\mathbb{R}$

Έστω $f(x)\neq x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$$\left\{\begin{array}{l}f(x)\neq x\\Για\ κάθε\ x\in\mathbb{R}\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}f(x)-x\neq 0\\Για\ κάθε\ x\in\mathbb{R}\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}h(x)\neq 0\\Για\ κάθε\ x\in\mathbb{R}\end{array}\right\}$$

$$Έχω:\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\ \text{Η } h \text{ είναι συνεχής στο } \mathbb{R} \text{ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων}\\(\mathrm{II})\ h(x)\neq 0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}\end{array}\right\}$$

Οπότε $h(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ή $h(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Έστω $h(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.Τότε θα έχω:

$$\left\{\begin{array}{l}h(x)>0\\Για\ κάθε\ x\in\mathbb{R}\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}f(x)-x>0\\Για\ κάθε\ x\in\mathbb{R}\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}f(x)>x\\Για\ κάθε\ x\in\mathbb{R}\end{array}\right\}$$

Αν στην ανίσωση $f(x)>x$ θέσω όπου x το $g(x)$ θα έχω:

$$f(g(x))>g(x)\Leftrightarrow(f\circ g)(x)>g(x)\overset{g\circ f=f\circ g}{\Longleftrightarrow}(g\circ f)(x)>g(x)\Leftrightarrow g(f(x))>g(x)$$

$$\overset{g\overset{\vee}{\downarrow}\mathbb{R}}{\Longleftrightarrow}f(x)<x\,(Άτοπο)$$

Έστω $h(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.Τότε θα έχω:

$$\left\{\begin{array}{l}h(x)<0\\Για\ κάθε\ x\in\mathbb{R}\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}f(x)-x<0\\Για\ κάθε\ x\in\mathbb{R}\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}f(x)<x\\Για\ κάθε\ x\in\mathbb{R}\end{array}\right\}$$

Αν στην ανίσωση $f(x)<x$ θέσω όπου x το $g(x)$ θα έχω:

$$f(g(x))<g(x)\Leftrightarrow(f\circ g)(x)<g(x)\overset{g\circ f=f\circ g}{\Longleftrightarrow}(g\circ f)(x)<g(x)\Leftrightarrow g(f(x))<g(x)$$

$$\overset{g\overset{\vee}{\downarrow}\mathbb{R}}{\Longleftrightarrow}f(x)>x\,(Άτοπο)$$

$\acute{A}\rho\alpha\ \delta\varepsilon\nu\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\ f(x)\neq x\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in\mathbb{R}$.Οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=x_0$.Θα αποδείξω οτι το x_0 είναι μοναδικό.

Επειδή η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα θα είναι και "1−1"

Αν $f(x)=x$.Τότε θα έχω:

$$\begin{Bmatrix} f(x)=x \\ f(x_0)=x_0 \end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix} f(x)-x=0 \\ f(x_0)-x_0=0 \end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix} h(x)=0 \\ h(x_0)=0 \end{Bmatrix}\Rightarrow h(x)=h(x_0)\overset{\text{Η συνάρτηση } h \text{ είνα "1–1"}}{\Longrightarrow}$$

$x=x_0$

Θα αποδείξω οτι $g(x_0)=x_0$.Έστω $g(x_0)\neq x_0$.Τότε θα έχω $g(x_0)>x_0$ ή $g(x_0)>x_0$

Αν $g(x_0)>x_0$:

$$g(x_0)>x_0\overset{\overset{\vee}{f}\downarrow\mathbb{R}}{\Longleftrightarrow}f(g(x_0))<f(x_0)\overset{f(x_0)=x_0}{\Longleftrightarrow}(f\circ g)(x_0)<x_0\overset{f\circ g=g\circ f}{\Longleftrightarrow}(g\circ f)(x_0)<x_0\Leftrightarrow$$

$$g(f(x_0))<x_0\overset{f(x_0)=x_0}{\Longleftrightarrow}g(x_0)<x_0\ (\acute{A}\tau o\pi o)$$

Αν $g(x_0)<x_0$:

$$g(x_0)<x_0\overset{\overset{\vee}{f}\downarrow\mathbb{R}}{\Longleftrightarrow}f(g(x_0))>f(x_0)\overset{f(x_0)=x_0}{\Longleftrightarrow}(f\circ g)(x_0)>x_0\overset{f\circ g=g\circ f}{\Longleftrightarrow}(g\circ f)(x_0)>x_0\Leftrightarrow$$

$$g(f(x_0))>x_0\overset{f(x_0)=x_0}{\Longleftrightarrow}g(x_0)>x_0\ (\acute{A}\tau o\pi o)$$

Οπότε $g(x_0)=x_0$

3.

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα: $g\circ f=f\circ g$. Αν η εξίσωση $(f\circ f)(x)=(g\circ g)(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα, να αποδείξετε οτι η εξίσωση $f(x)=g(x)$ έχει λύση

Έστω $f(x)\neq g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Θεωρώ την συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x), x\in\mathbb{R}$.

$$\begin{Bmatrix} f(x)\neq g(x) \\ \text{Για κάθε } x\in\mathbb{R} \end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix} f(x)-g(x)\neq 0 \\ \text{Για κάθε } x\in\mathbb{R} \end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix} h(x)\neq 0 \\ \text{Για κάθε } x\in\mathbb{R} \end{Bmatrix}$$

$$\text{Έχω}:\begin{Bmatrix} (\mathrm{I})\ \text{Η } h \text{ είναι συνεχής στο } \mathbb{R} \text{ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων} \\ (\mathrm{II})\ h(x)\neq 0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \end{Bmatrix}$$

Οπότε $h(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ή $h(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Έστω ρ ρίζα της εξίσωσης $(f\circ f)(x)=(g\circ g)(x)$. *Τότε θα έχω*:

$(f\circ f)(\rho)=(g\circ g)(\rho)\Leftrightarrow f(f(\rho))=g(g(\rho))$

$$h(f(\rho))+h(g(\rho))=f(f(\rho))-g(f(\rho))+f(g(\rho))-g(g(\rho))\overset{g(g(\rho))=f(f(\rho))}{=}$$

$$\cancel{f(f(\rho))}-(g\circ f)(\rho)+(f\circ g)(\rho)-\cancel{f(f(\rho))}\overset{f\circ g=g\circ f}{=}-(g\circ f)(\rho)+(g\circ f)(\rho)=0$$

Οπότε: $h(f(\rho))+h(g(\rho))=0$

Γνωρίζω ότι $h(x)>0$ *για κάθε* $x\in\mathbb{R}$ *ή* $h(x)<0$ *για κάθε* $x\in\mathbb{R}$

Οπότε θα έχω $h(f(\rho))>0, h(g(\rho))>0$ *ή* $h(f(\rho))<0, h(g(\rho))<0$

Αν $h(f(\rho))>0, h(g(\rho))>0$:

$$\left.\begin{cases}h(f(\rho))>0\\ h(g(\rho))>0\end{cases}\right\}\overset{(+)}{\Longrightarrow}h(f(\rho))+h(g(\rho))>0\,(\text{Άτοπο})$$

Αν $h(f(\rho))<0, h(g(\rho))<0$:

$$\left.\begin{cases}h(f(\rho))<0\\ h(g(\rho))<0\end{cases}\right\}\overset{(+)}{\Longrightarrow}h(f(\rho))+h(g(\rho))<0\,(\text{Άτοπο})$$

Άρα δεν ισχύει $f(x)\neq g(x)$ *για κάθε* $x\in\mathbb{R}$ *για κάθε* $x\in\mathbb{R}$. Οπότε *υπάρχει ένα τουλάχιστον* $x_0\in\mathbb{R}$ *τέτοιο ώστε* $f(x_0)=g(x_0)$

4.

Δίνεται συνεχής και "1−1" συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *για την οποία ισχύει* $f(1)f(2)<0$. *Να αποδείξετε*:
(I) $f(3)f(4)>0$
(II) Η *εξίσωση* $(e^x-1)f(x)f(x+1)=3-x$ *έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα* $(0,3)$

$$(\text{I})\,\text{Έχω}:\left\{\begin{array}{l}(\text{I})\,\text{Η συνάρτηση } f \text{ είναι συνεχής στο κλειστό}\\ \text{διάστημα } [1,2]\\ (\text{II})\, f(1)f(2)<0\end{array}\right\}$$

Οπότε *η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του* Bolzano *στο κλειστό διάστημα* $[1,2]$. Οπότε *θα υπάρχει ένα τουλάχιστον* $\xi\in(1,2)$ *τέτοιο ώστε* $f(\xi)=0$

Έστω $f(3)f(4)\le 0$. *Διακρίνω τις περιπτώσεις*: $\left\{\begin{array}{l}(\text{I})\, f(3)f(4)=0\\ (\text{II})\, f(3)f(4)<0\end{array}\right\}$

$\Pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\pi\tau\omega\sigma\eta(\mathrm{I})$:

$$f(3)f(4)=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} f(3)=0 \\ \acute{\eta} \\ f(4)=0 \end{matrix}\right\}$$

$\mathrm{A}\nu\ f(3)=0\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega$:

$$\left\{\begin{matrix} f(3)=0 \\ f(\xi)=0 \\ \xi\in(1,2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} f(\xi)=f(3) \\ \xi\in(1,2) \end{matrix}\right\} \overset{\mathrm{H}\ \sigma\upsilon\nu\alpha\rho\tau\eta\sigma\eta\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \text{"1–1"}}{\Longrightarrow} \left\{\begin{matrix} \xi=3 \\ \xi\in(1,2) \\ (\acute{\mathrm{A}}\tau o\pi o) \end{matrix}\right\}$$

$\mathrm{A}\nu\ f(4)=0\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega$:

$$\left\{\begin{matrix} f(4)=0 \\ f(\xi)=0 \\ \xi\in(1,2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} f(\xi)=f(4) \\ \xi\in(1,2) \end{matrix}\right\} \overset{\mathrm{H}\ \sigma\upsilon\nu\alpha\rho\tau\eta\sigma\eta\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \text{"1–1"}}{\Longrightarrow} \left\{\begin{matrix} \xi=4 \\ \xi\in(1,2) \\ (\acute{\mathrm{A}}\tau o\pi o) \end{matrix}\right\}$$

$\Pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\pi\tau\omega\sigma\eta(\mathrm{II})$:

$$(\mathrm{I})\acute{\mathrm{E}}\chi\omega: \left\{\begin{matrix} (\mathrm{I})\mathrm{H}\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ \kappa\lambda\varepsilon\iota\sigma\tau\acute{o} \\ \delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\mu\alpha\ [3,4] \\ (\mathrm{II})\ f(3)f(4)<0 \end{matrix}\right\}$$

Οπότε η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του Bolzano στο κλειστό διάστημα $[3,4]$.Οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1\in(3,4)$ τέτοιο ώστε $f(\xi_1)=0$

$$\left\{\begin{matrix} f(\xi_1)=0 \\ f(\xi)=0 \\ \xi\in(1,2) \\ \xi_1\in(3,4) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} f(\xi_1)=f(\xi) \\ \xi\in(1,2) \\ \xi_1\in(3,4) \end{matrix}\right\} \overset{\mathrm{H}\ \sigma\upsilon\nu\alpha\rho\tau\eta\sigma\eta\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \text{"1–1"}}{\Longrightarrow} \left\{\begin{matrix} \xi_1=\xi \\ \xi\in(1,2) \\ \xi_1\in(3,4) \end{matrix}\right\} (\acute{\mathrm{A}}\tau o\pi o)$$

$\Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma\ f(3)f(4)>0$

$(\mathrm{II})\Theta\varepsilon\omega\rho\acute{\omega}\ \tau\eta\nu\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ g(x)=(e^x-1)f(x)f(x+1)-3+x\ \mu\varepsilon\ x\in\mathbb{R}$

Η συνάρτηση $f(x+1)$ είναι συνεχής ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $x+1$ και f.Η συνάρτηση $(e^x-1)f(x)f(x+1)$ είναι συνεχής ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.Η συνάρτηση $g(x)=(e^x-1)f(x)f(x+1)-3+x$ είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων

$g(0)=(e^0-1)f(0)f(1)-3+0=-3<0$

$g(3)=(e-1)f(3)f(4)-3+3=(e-1)f(3)f(4)>0\left(\Gamma\iota\alpha\tau\iota\ e-1>0,\ f(3)f(4)>0\right)$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon: g(0)g(3)<0$

$$\text{Έχω}:\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\,\text{Η συνάρτηση } g \text{ είναι συνεχής στο κλειστό}\\ \text{διάστημα } [0,3]\\ (\mathrm{II})\; g(0)g(3)<0\end{array}\right\}$$

Οπότε η συνάρτηση g ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του Bolzano στο κλειστό διάστημα $[0,3]$.Οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (0,3)$ τέτοιο ώστε $g(\xi_2)=0$

$$\left.\begin{cases} g(\xi_2)=0\\ \xi_2\in(0,3)\end{cases}\right\}\Rightarrow\left.\begin{cases}\left(e^{\xi_2}-1\right)f(\xi_2)\,f(\xi_2+1)-3+\xi_2=0\\ \xi_2\in(0,3)\end{cases}\right\}\Rightarrow\left.\begin{cases}\left(e^{\xi_2}-1\right)f(\xi_2)\,f(\xi_2+1)=3-\xi_2\\ \xi_2\in(0,3)\end{cases}\right\}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Δίνονται η συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[1,9]$ με $f(1)\,f(3)\,f(9)=27$ και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[1,9]$

Να αποδείξετε οτι:

(I) $f(x)>0$ για κάθε $x\in[1,9]$

(II) Η εξίσωση $f(x)=3$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[1,9]$

(III) Η εξίσωση $f(x)=x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[1,9]$

2.

Έστω $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $f\underset{\wedge}{\uparrow}\mathbb{R}, g\overset{\vee}{\downarrow}\mathbb{R}$ και g περιττή με $g\circ f=f\circ g$.Να αποδειχθεί ότι:

(II) Η συνάρτηση $h(x)=f(x)+x$ είναι αύξουσα

(III) Υπάρχει μοναδικό $x_0\in\mathbb{R}$, ώστε $f(x_0)=-x_0$

3.

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα: $g\circ f=-f\circ g$.

Αν η εξίσωση $(f\circ f)(x)=-(g\circ g)(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα, να αποδείξετε οτι η εξίσωση $f(x)=-g(x)$ έχει λύση

4.

Δίνεται συνεχής και "1−1" συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(0)f(1)<0$.Να αποδείξετε:

(I) $f(5)f(6)>0$

(II) Η εξίσωση $\left(e^x-1\right)f(x)\,f(x+1)=5-x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,5)$