ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ ΜΙΑΣ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ
$\text{Αν}: \left.\begin{cases} (\text{I}) \text{Η } f \text{ είναι συνεχής στο } (\alpha,\beta) \\ (\text{II}) \text{Η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } (\alpha,\beta) \end{cases}\right\}$ $\text{Τότε}: f(\alpha,\beta)=(\text{A},\text{B}), \text{A}=\lim\limits_{x\to a^+} f(x), \text{B}=\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)$
$\text{Αν}: \left.\begin{cases} (\text{I}) \text{Η } f \text{ είναι συνεχής στο } (\alpha,\beta) \\ (\text{II}) \text{Η } f \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο } (\alpha,\beta) \end{cases}\right\}$ $\text{Τότε}: f(\alpha,\beta)=(\text{B},\text{A}), \text{A}=\lim\limits_{x\to a^+} f(x), \text{B}=\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)$
$\text{Αν } \text{A}_1 \cap \text{A}_2 = \varnothing \text{ τότε}: f(\text{A}_1 \cup \text{A}_2) = f(\text{A}_1) \cup f(\text{A}_2)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1.

$\text{Να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών της συνάστησης } f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ $\text{με τύπο}: f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \overset{\substack{\text{Πολλαπλασιάζω αριθμητή} \\ \text{και παρονομαστή με } \sqrt{x}+1 \\ x\in(1,+\infty)\Rightarrow\sqrt{x}>0\Rightarrow\sqrt{x}+1>1>0\Rightarrow \\ \sqrt{x}+1>0\Rightarrow\sqrt{x}+1\neq 0}}{=} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} \overset{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=\alpha^2-\beta^2}{=} \frac{(\sqrt{x})^2-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$\overset{(\sqrt{\alpha})^2=\alpha,\alpha\geq 0}{=} \frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x}+1)} \overset{\substack{x\in(1,+\infty)\Rightarrow x\neq 1\Rightarrow \\ x-1\neq 0}}{=} \frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

$\text{Αν } x_1,x_2\in(1,+\infty) \text{ με } x_1<x_2:$

$$\left.\begin{cases} x_1<x_2 \\ x_1,x_2\in(1,+\infty) \end{cases}\right\} \Rightarrow \left.\begin{cases} \sqrt{x_1}<\sqrt{x_2} \\ x_1,x_2\in(1,+\infty) \end{cases}\right\} \Rightarrow \left.\begin{cases} \sqrt{x_1}+1<\sqrt{x_2}+1 \\ x_1,x_2\in(1,+\infty) \end{cases}\right\} \overset{\substack{\text{Αν } \alpha,\beta \text{ ομόσημοι τότε ισχύει η} \\ \text{ισοδυναμία:} \\ \alpha<\beta\Leftrightarrow\frac{1}{\alpha}>\frac{1}{\beta}}}{\Rightarrow}$$

$$\left.\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x_1}+1}>\dfrac{1}{\sqrt{x_2}+1} \\ x_1,x_2\in(1,+\infty) \end{cases}\right\} \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$$

$\text{Συνεπώς } f \overset{\vee}{\downarrow} (1,+\infty)$

$$Έχω: \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}$$

$$Έχω: \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = 0$$

$$Έχω: \left\{ \begin{array}{l} (\mathrm{I})\,\mathrm{H}\ f\ είναι\ συνεχής\ στο\ (1,+\infty)\ ως\ πηλίκο\ συνεχών \\ συναρτήσεων \\ (\mathrm{II})\ f \overset{\vee}{\downarrow} (1,+\infty) \end{array} \right\}$$

$$\mathrm{O}πότε\, f(1,+\infty) = \left(\lim_{x\to +\infty} f(x), \lim_{x\to 1^+} f(x) \right) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

2.

Να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών της συνάστησης $f:(-\infty,1)\cup(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο: $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x-1}$

$$f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x-1} \overset{Θέτω: -4x=-3x-x}{=} \frac{x^2-3x-x+3}{x-1} = \frac{x(x-3)-(x-3)}{x-1} =$$

$$= \frac{(x-3)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = x-3$$

Αν $x_1, x_2 \in (-\infty,1)$ με $x_1 < x_2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 < x_2 \\ x_1, x_2 \in (-\infty,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 - 3 < x_2 - 3 \\ x_1, x_2 \in (-\infty,1) \end{array} \right\} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

$$Άρα: f \underset{\wedge}{\uparrow} (-\infty,1)$$

$$Έχω: \lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} (x-3) = -\infty$$

$$Έχω: \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (x-3) = 1-3 = -2$$

$$Έχω: \left\{ \begin{array}{l} (\mathrm{I})\,\mathrm{H}\ f\ είναι\ συνεχής\ στο\ (-\infty,1)\ ως\ ρητή \\ (\mathrm{II})\ f \underset{\wedge}{\uparrow} (-\infty,1) \end{array} \right\}$$

$$\mathrm{O}πότε: f((-\infty,1)) = \left(\lim_{x\to -\infty} f(x), \lim_{x\to 1^-} f(x) \right) = (-\infty,-2)$$

Αν $x_1, x_2 \in (1,+\infty)$ με $x_1 < x_2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 < x_2 \\ x_1, x_2 \in (1,+\infty) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 - 3 < x_2 - 3 \\ x_1, x_2 \in (1,+\infty) \end{array} \right\} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

$$Άρα: f \underset{\wedge}{\uparrow} (1,+\infty)$$

$$Έχω: \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (1-3) = 1-3 = -2$$

$$Έχω: \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} (x-3) = +\infty$$

$$\text{Έχω}:\left\{\begin{matrix}(\mathrm{I})\,\mathrm{H}\ f\ \text{είναι συνεχής στο}\ (1,+\infty)\ \text{ως ρητή} \\ (\mathrm{II})\ f \underset{\wedge}{\uparrow} (1,+\infty)\end{matrix}\right\}$$

$$\text{Οπότε}: f\left((1,+\infty)\right)=\left(\lim_{x\to 1^+} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right)=(-2,+\infty)$$

$$f\left((-\infty,1)\cup(1,+\infty)\right)=f\left((-\infty,1)\right)\cup f\left((1,+\infty)\right)=(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)=\mathbb{R}-\{-2\}$$

3.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-e^{-x}+x+1$
(I) Να αποδείξετε οτι η f είναι γνησίως αύξουσα
(II) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f
(III) Να αποδείξετε οτι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μόνο μια ρίζα

$(\mathrm{I})\ f(x)=e^x-e^{-x}+x+1$

$\text{Έχω}: D_f=\mathbb{R}$

Αν $x_1<x_2$ θα έχω:

$$x_1<x_2 \overset{\substack{\text{Αν } a>1 \text{ ισχύει η ισοδυναμία:} \\ x<y\Leftrightarrow a^x<a^y}}{\Longrightarrow} \left\{\begin{matrix} e^{x_1}<e^{x_2} \\ -x_1>-x_2 \\ x_1<x_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} e^{x_1}<e^{x_2} \\ e^{-x_1}>e^{-x_2} \\ x_1<x_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} e^{x_1}<e^{x_2} \\ -e^{-x_1}<-e^{-x_2} \\ x_1<x_2 \end{matrix}\right\} \overset{(+)}{\Longrightarrow}$$

$$e^{x_1}-e^{-x_1}+x_1<e^{x_2}-e^{-x_2}+x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

$\text{Οπότε}: f \underset{\wedge}{\uparrow} \mathbb{R}$

$$(\mathrm{II})\ \boxed{\lim_{x\to-\infty} a^x=\begin{cases}+\infty, a\in(0,1) \\ 0, a\in(1,+\infty)\end{cases}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(e^x-e^{-x}+x+1\right)\overset{a^{-x}=\frac{1}{a^x}}{=}\lim_{x\to-\infty}\left(e^x-\frac{1}{e^x}+x+1\right)=\lim_{x\to-\infty}\left[e^x-\left(\frac{1}{e}\right)^x+x+1\right]$$

$$=\lim_{x\to-\infty} e^x-\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^x+\lim_{x\to-\infty} x+1=0-(+\infty)-\infty+1=-\infty$$

$$\text{Έχω}: e>1\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} e^x=0$$

$$\text{Έχω}: e>1\Rightarrow 0<\frac{1}{e}<1\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^x=+\infty$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} a^x=\begin{cases}0, a\in(0,1) \\ +\infty, a\in(1,+\infty)\end{cases}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^x-e^{-x}+x+1\right)\overset{a^{-x}=\frac{1}{a^x}}{=}\lim_{x\to+\infty}\left(e^x-\frac{1}{e^x}+x+1\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[e^x-\left(\frac{1}{e}\right)^x+x+1\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}e^x-\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^x+\lim_{x\to+\infty}x+1=+\infty-0+\infty-1=+\infty$$

$Έχω: e>1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$

$Έχω: e>1 \Rightarrow 0<\frac{1}{e}<1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^x=0$

Η *συνάρτηση* e^{-x} *είναι συνεχής στο* $\mathbb{R}$ *ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων* $-x$ *και* e^x.Η *συνάρτηση* f *είναι συνεχής στο* $\mathbb{R}$ *ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων*

$$Έχω:\begin{Bmatrix}(\mathrm{I})\text{Η } f \text{ είναι συνεχής στο } (-\infty,+\infty)\\ (\mathrm{II})\ f\underset{\wedge}{\uparrow}(-\infty,+\infty)\end{Bmatrix}$$

$$\text{Οπότε}: f\left((-\infty,+\infty)\right)=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$$

$Δηλαδή: f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$

(III)Επειδή $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ *υπάρχει* $\alpha\in\mathbb{R}$ *τέτοιο ώστε* $f(\alpha)=0$

<u>*Θα αποδείξω οτι το* α *είναι μοναδικό*!!!</u>

Επειδή $f\underset{\wedge}{\uparrow}(-\infty,+\infty)$ *θα είναι και* "1−1"

Αν $f(x)=0$.Τότε *θα έχω*:

$$\begin{Bmatrix}f(x)=0\\ f(\alpha)=0\end{Bmatrix}\Rightarrow f(x)=f(\alpha)\overset{\text{Η } f \text{ είναι "1−1"}}{\Longrightarrow}x=\alpha$$

4.

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ *με τύπο*
$f(x)=\frac{2}{x}+\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)$ *για κάθε* $x\in(0,+\infty)$
(I)Να *βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης* f
(II)Να *αποδείξετε οτι υπάρχει ακριβώς ένας αριθμός* $\xi>0$
τέτοιος ώστε:
$\left(\frac{e\xi+1}{\xi}\right)^{\xi}=e^{e\xi-2}$

(I)Αν $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ *με* $x_1<x_2$ *θα έχω*:

$$\begin{Bmatrix}x_1<x_2\\ x_1,x_2\in(0,+\infty)\end{Bmatrix}\overset{\substack{\text{Αν } \alpha,\beta \text{ ομόσημοι τότε ισχύει η}\\ \text{ισοδυναμία:}\\ \alpha<\beta\Leftrightarrow\frac{1}{\alpha}>\frac{1}{\beta}}}{\Longrightarrow}\begin{Bmatrix}\frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_2}\\ x_1,x_2\in(0,+\infty)\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{cases} e+\dfrac{1}{x_1}>e+\dfrac{1}{x_2} \\ \dfrac{2}{x_1}>\dfrac{2}{x_2} \\ x_1,x_2\in(0,+\infty) \end{cases}\right\}\Rightarrow \left.\begin{cases} \ln\left(e+\dfrac{1}{x_1}\right)>\ln\left(e+\dfrac{1}{x_2}\right) \\ \dfrac{2}{x_1}>\dfrac{2}{x_2} \\ x_1,x_2\in(0,+\infty) \end{cases}\right\}\overset{(+)}{\Longrightarrow}$$

$$\frac{2}{x_1}+\ln\left(e+\frac{1}{x_1}\right)>\frac{2}{x_2}+\ln\left(e+\frac{1}{x_2}\right)\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$$

Οπότε $f\overset{\vee}{\downarrow}(0,+\infty)$

<u>*Θα βρω το* $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$</u>

Θεωρώ την αντικατάσταση $t=e+\dfrac{1}{x}$

$$x\to 0^+\Rightarrow \frac{1}{x}\to+\infty\Rightarrow e+\frac{1}{x}\to+\infty\Rightarrow t\to+\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+}\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)\overset{\substack{\Theta\acute{\varepsilon}\tau\omega: t=e+\frac{1}{x}\\ t\to+\infty}}{=}\lim_{t\to+\infty}\ln t=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{2}{x}+\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)\right]=\lim_{x\to 0^+}\frac{2}{x}+\lim_{x\to 0^+}\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)=+\infty+\infty=+\infty$$

<u>*Θα βρω το* $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$</u>

Θεωρώ την αντικατάσταση $t=e+\dfrac{1}{x}$

$$x\to+\infty\Rightarrow \frac{1}{x}\to 0\Rightarrow e+\frac{1}{x}\to e\Rightarrow t\to e$$

$$\lim_{x\to+\infty}\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)\overset{\substack{\Theta\acute{\varepsilon}\tau\omega: t=e+\frac{1}{x}\\ t\to e}}{=}\lim_{t\to e}\ln t=\ln e=1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{x}+\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}+\lim_{x\to 0^+}\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)=0+1=1$$

Η *συνάρτηση* $\ln\left(e+\dfrac{1}{x}\right)$ *είναι συνεχής στο* $(0,+\infty)$ *ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων* $e+\dfrac{1}{x}$ *και* $\ln x$.Η *συνάρτηση* f *είναι συνεχής στο* $(0,+\infty)$ *ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων*

$$Έχω:\begin{cases}(\mathrm{I})\ \text{Η } f \ \textit{είναι συνεχής στο } (0,+\infty) \\ (\mathrm{II})\ f \overset{\vee}{\downarrow} (0,+\infty)\end{cases}$$

$$\text{Οπότε}: f\big((0,+\infty)\big)=\Big(\lim_{x\to+\infty} f(x),\lim_{x\to 0} f(x)\Big)=(0,+\infty)$$

$$(\mathrm{II})\left(\frac{e\xi+1}{\xi}\right)^{\xi}=e^{e\xi-2}\Leftrightarrow \ln\left(\frac{e\xi+1}{\xi}\right)^{\xi}=\ln e^{e\xi-2}\overset{\ln\theta^{\kappa}=\kappa\ln\theta,\theta>0}{\Longleftrightarrow}\xi\ln\left(\frac{e\xi+1}{\xi}\right)=(e\xi-2)\ln e$$

$$\overset{\ln e=1}{\Longleftrightarrow}\xi\ln\left(\frac{e\xi}{\xi}+\frac{1}{\xi}\right)=(e\xi-2)\bullet 1\Leftrightarrow \xi\ln\left(e+\frac{1}{\xi}\right)=e\xi-2\Leftrightarrow\frac{\cancel{\xi}\ln\left(e+\frac{1}{\xi}\right)}{\cancel{\xi}}=\frac{e\xi-2}{\xi}\Leftrightarrow$$

$$\ln\left(e+\frac{1}{\xi}\right)=\frac{e\xi}{\xi}-\frac{2}{\xi}\Leftrightarrow\frac{2}{\xi}+\ln\left(e+\frac{1}{\xi}\right)=e\Leftrightarrow f(\xi)=e$$

Επειδή $f\big((0,+\infty)\big)=(0,+\infty)$ *υπάρχει* $\xi>0$ *τέτοιο ώστε* $f(\xi)=e$

<u>*Θα αποδείξω οτι το ξ είναι μοναδικό*!!!</u>

Επειδή $f\underset{\wedge}{\uparrow}(0,+\infty)$ *θα είναι και* "1−1"

Αν $f(x)=e$.Τότε *θα έχω*:

$$\begin{cases}f(x)=e\\ f(\alpha)=e\end{cases}\Rightarrow f(x)=f(\xi)\overset{\text{Η } f \text{ είναι "1−1"}}{\Longrightarrow}x=\xi$$

5.

> *Δίνεται η συνάρτηση* $f(x)=\sqrt{1-x}-e^{x}$
>
> (I) Να *βρεθεί το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης* f
>
> (II) Να *αποδείξετε οτι η εξίσωση* $f\Big(\big(2+\sqrt{1-x}\big)e^{-x}-1\Big)=0$
>
> *έχει ακριβώς μια ρίζα*

$(\mathrm{I})\ D_f=\{x\in\mathbb{R}:1-x\geq 0\}=\{x\in\mathbb{R}:-x\geq -1\}=\{x\in\mathbb{R}:x\leq 1\}=(-\infty,1]$

Αν $x_1,x_2\in(-\infty,1]$ *με* $x_1<x_2$ *θα έχω*:

$$\begin{cases}x_1,x_2\in(-\infty,1]\\ x_1<x_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1,x_2\in(-\infty,1]\\ e^{x_1}<e^{x_2}\\ -x_1>-x_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1,x_2\in(-\infty,1]\\ -e^{x_1}>-e^{x_2}\\ 1-x_1>1-x_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1,x_2\in(-\infty,1]\\ -e^{x_1}>-e^{x_2}\\ \sqrt{1-x_1}>\sqrt{1-x_2}\end{cases}$$

$$\overset{(+)}{\Longrightarrow}\sqrt{1-x_1}-e^{x_1}>\sqrt{1-x_2}-e^{x_2}\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$$

$$\text{Οπότε}: f\overset{\vee}{\downarrow}(-\infty,1]$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}a^{x}=\begin{cases}+\infty, a\in(0,1)\\ 0, a\in(1,+\infty)\end{cases}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1-x}-e^x\right) = \lim_{x\to-\infty}\sqrt{1-x} - \lim_{x\to-\infty} e^x \overset{e>1\Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0}{=} +\infty - 0 = +\infty$$

$f(1) = \sqrt{1-1} - e = -e$

Η *συνάρτηση* $\sqrt{1-x}$ *είναι συνεχής στο* $(-\infty,1]$ *ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων* $1-x$ *και* $\sqrt{x}$.Η *συνάρτηση* f *είναι συνεχής στο* $(-\infty,1]$ *ως άθροισμασυνεχώνσυναρτήσεων*

$$Έχω:\begin{Bmatrix} (\mathrm{I})\text{Η } f \text{ είναι συνεχής στο } (-\infty,1] \\ (\mathrm{II})\ f \overset{\vee}{\downarrow} (-\infty,1] \end{Bmatrix}$$

Οπότε: $f\left((-\infty,1]\right) = \left[f(1), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right) = [-e,+\infty)$

$(\mathrm{II})\ f(0) = \sqrt{1-0} - e^0 = 1-1 = 0$

Επειδή $f \overset{\vee}{\downarrow} (-\infty,1]$ *θα είναι* "1−1"

$$\begin{Bmatrix} f\left(\left(2+\sqrt{1-x}\right)e^{-x}-1\right)=0 \\ x\in(-\infty,1] \end{Bmatrix} \overset{f(0)=0}{\Leftrightarrow} \begin{Bmatrix} f\left(\left(2+\sqrt{1-x}\right)e^{-x}-1\right)=f(0) \\ x\in(-\infty,1] \end{Bmatrix} \overset{\text{Η } f \text{ είναι "1−1"}}{\Leftrightarrow}$$

$$\begin{Bmatrix} \left(2+\sqrt{1-x}\right)e^{-x}-1=0 \\ x\in(-\infty,1] \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \left(2+\sqrt{1-x}\right)e^{-x}=1 \\ x\in(-\infty,1] \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \left(2+\sqrt{1-x}\right)e^{-x}e^{x}=1\bullet e^{-x} \\ x\in(-\infty,1] \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \left(2+\sqrt{1-x}\right)e^{-x}e^{x}=1\bullet e^{x} \\ x\in(-\infty,1] \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \sqrt{1-x}-e^x=-2 \\ x\in(-\infty,1] \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} f(x)=-2 \\ x\in(-\infty,1] \end{Bmatrix}$$

$Έχω: e>2 \Leftrightarrow -e<-2$

Επειδή $f\left((-\infty,1]\right)=[-e,+\infty)$ $,-2\in[-e,+\infty)$ *και η* f *είναι* "1−1" *υπάρχει μοναδικό* $\xi\in(-\infty,1]$ *τέτοιο ώστε* $f(\xi)=-2$

$$\begin{Bmatrix} f(x)=-2 \\ x\in(-\infty,1] \end{Bmatrix} \overset{f(\xi)=-2}{\Leftrightarrow} \begin{Bmatrix} f(x)=f(\xi) \\ x\in(-\infty,1] \end{Bmatrix} \Leftrightarrow x=\xi$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Να *προσδιορίσετε το σύνολο τιμών της συνάστησης* $f:(4,+\infty)\to\mathbb{R}$ *με τύπο*: $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

2.

Να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών της συνάστησης

$f:(-\infty,3)\cup(3,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο: $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x-3}$

3.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-e^x+e^{-x}-x+1$

(I) Να αποδείξετε οτι η f είναι γνησίως φθίνουσα

(II) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f

(III) Να αποδείξετε οτι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μόνο μια ρίζα

4.

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο

$f(x)=\dfrac{1}{x}+\ln\left(e+\dfrac{2}{x}\right)$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

(I) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f

(II) Να αποδείξετε οτι υπάρχει ακριβώς ένας αριθμός $\xi>0$

τέτοιος ώστε:

$\left(\dfrac{e\xi+2}{\xi}\right)^{\xi}=e^{e\xi-1}$

5.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x+1}-e^{-x}$

(I) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f

(II) Να αποδείξετε οτι η εξίσωση $f\left(\left(-1+\sqrt{x+1}\right)e^x-1\right)=0$

έχει ακριβώς μια ρίζα

6.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-3x^2+3x$

(I) Να αποδείξετε οτι η f είναι γνησίως αύξουσα

(II) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f

Υπόδειξη:

$$f(x)=x^3-3x^2+3x=x^3-3x^2+3x-1+1=\underbrace{x^3-3\cdot x^2\cdot 1+3\cdot x\cdot 1^2-1^3}_{\alpha^3-3\cdot\alpha^2\cdot\beta+3\cdot\alpha\cdot\beta^3-\beta^3=(\alpha-\beta)^3}+1=$$

$$=(x-1)^3+1$$

$$x_1<x_2\Rightarrow x_1-1<x_2-1\Rightarrow(x_1-1)^3<(x_2-1)^3\Rightarrow(x_1-1)^3+1<(x_2-1)^3+1$$

$$\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$