ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΤΥΠΙΚΗΣ ΑΠΟΚΛΙΣΗΣ

$$\bar{x} = \frac{t_1 + t_2 + \cdots + t_\nu}{\nu}$$

$$s^2 = \frac{\left(t_1 - \bar{x}\right)^2 + \left(t_2 - \bar{x}\right)^2 + \cdots + \left(t_\nu - \bar{x}\right)^2}{\nu}$$

Έστω έχω το στατιστικό δείγμα $t_1, t_2, \cdots, t_\nu$

$\bar{x}$: Η *μέση τιμή του στατιστικού δείγματος* $t_1, t_2, \cdots, t_\nu$

s^2: Η *διακύμανση του στατιστικού δείγματος* $t_1, t_2, \cdots, t_\nu$

s: Η *τυπική απόκλιση του στατιστικού δείγματος* $t_1, t_2, \cdots, t_\nu$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1.

Ένα προϊον πωλείται σε 10 *διαφορετικά καταστήματα στις παρακάτω τιμές σε ευρώ* : 8, 10, 13, 13, 15, 16, 18, 14, 14, 9
Ν*α υπολογίσετε την διακύμανση και την τυπική απόκλιση*

Έχω τον πληθυσμό : 8,9,10,13,13,14,14,15,16,18

$$\bar{x} = \frac{t_1 + t_2 + \cdots + t_\nu}{\nu} = \frac{8+9+10+13+13+14+14+15+16+18}{10} = \frac{130}{10} = 13$$

$$s^2 = \frac{\left(t_1 - \bar{x}\right)^2 + \left(t_2 - \bar{x}\right)^2 + \cdots + \left(t_\nu - \bar{x}\right)^2}{\nu} =$$

$$\frac{(8-13)^2 + (9-13)^2 + (10-13)^2 + (13-13)^2 + (13-13)^2 + (14-13)^2 + (14-13)^2}{10}$$

$$+ \frac{+(15-13)^2 (16-13)^2 + (18-13)^2}{10} =$$

$$= \frac{(-5)^2 + (-4)^2 + (-1)^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2}{10} = \frac{25+16+1+1+1+1+4+9+25}{10} =$$

$$= \frac{90}{10} = 9$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{9} = 3$$

2.

Δίνεται δείγμα $1, 2, x, y$ με μέση τιμή 3 και διακύμανση $\frac{25}{2}$. Να βρείτε τους αριθμούς x, y

$$\bar{x} = \frac{t_1 + t_2 + \bullet\bullet\bullet + t_\nu}{\nu} \Leftrightarrow 3 = \frac{1+2+x+y}{4} \Leftrightarrow x + y + 3 = 3\bullet 4 \Leftrightarrow y = 12 - 3 - x \Leftrightarrow$$

$$y = 9 - x \left(1\right)$$

$$s^2 = \frac{\left(t_1 - \bar{x}\right)^2 + \left(t_2 - \bar{x}\right)^2 + \bullet\bullet\bullet + \left(t_\nu - \bar{x}\right)^2}{\nu} \overset{s^2 = \frac{25}{2}, \bar{x} = 3}{\Longleftrightarrow}$$

$$\frac{25}{2} = \frac{\left(1-3\right)^2 + \left(2-3\right)^2 + \left(x-3\right)^2 + \left(y-3\right)^2}{4} \overset{y = 9 - x}{\Longleftrightarrow}$$

$$\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}} \bullet 25 = \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}} \bullet \frac{\left(-2\right)^2 + \left(-1\right)^2 + \left(x-3\right)^2 + \left(9 - x - 3\right)^2}{2} \overset{\substack{\text{Α}\nu\ \alpha \neq 0\ \tau ό\tau\varepsilon\ \iota\sigma\chi ύ\varepsilon\iota\ \eta\ \iota\sigma o\delta\upsilon\nu\alpha\mu ί\alpha: \\ \alpha \bullet \beta = \alpha \bullet \gamma \Leftrightarrow \beta = \gamma}}{\Longleftrightarrow}$$

$$25 = \frac{4 + 1 + \left(x-3\right)^2 + \left(6-x\right)^2}{2} \Leftrightarrow 25 \bullet 2 = 5 + x^2 + 2 \bullet x \bullet 3 + 3^2 + 6^2 - 2 \bullet x \bullet 6 + x^2 \Leftrightarrow$$

$$5 + x^2 + 6x + 9 + 36 - 12x + x^2 = 50 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + \cancel{50} = \cancel{50} \overset{a + \beta = a + \gamma \Leftrightarrow \beta = \gamma}{\Longleftrightarrow}$$

$$2x\left(x-3\right) = 0 \overset{a \bullet \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0\ ή\ \beta = 0}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{matrix} x = 0 \\ ή \\ x - 3 = 0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} x = 0 \\ ή \\ x = 3 \end{matrix} \right\}$$

Αν $x = 0$ τότε απο την σχέση $\left(1\right)$ θα έχω:

$$y = 9 - x \overset{x=0}{=} 9 - 0 = 9$$

Αν $x = 9$ τότε απο την σχέση $\left(1\right)$ θα έχω:

$$y = 9 - x \overset{x=0}{=} 9 - 9 = 0$$

3.

Έστω η μέση τιμή και η διακύμανση των βαθμών 6 μαθητών στην Ιστορία είναι $\bar{x}=12$ *και* $s^2=10$ *αντίστοιχα. Για τους βαθμούς των πέντε μαθητών ισχύει* $\sum_{i=1}^{5}\left(t_i-\bar{x}\right)^2=11$. *Να βρεθεί ο βαθμός του έκτου μαθητή αν γνωρίζουμε οτι αυτός είναι μεγαλύτερος του* 10

$$s^2=\frac{\left(t_1-\bar{x}\right)^2+\left(t_2-\bar{x}\right)^2+\left(t_3-\bar{x}\right)^2+\left(t_4-\bar{x}\right)^2+\left(t_5-\bar{x}\right)^2+\left(t_6-\bar{x}\right)^2}{6}$$

$$\overset{\substack{s^2=10,\bar{x}=12\\ \nu=6,t_6>10\\ \left(t_1-\bar{x}\right)^2+\left(t_2-\bar{x}\right)^2+\left(t_3-\bar{x}\right)^2+\left(t_4-\bar{x}\right)^2+\left(t_5-\bar{x}\right)^2=11}}{\Leftrightarrow}$$

$$\left\{\begin{matrix} 10=\dfrac{11+\left(t_6-12\right)^2}{6} \\ t_6>10 \end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix} 11+\left(t_6-12\right)^2=6\bullet 10 \\ t_6>10 \end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix} \left(t_6-12\right)^2=60-11 \\ t_6>10 \end{matrix}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix} \left(t_6-12\right)^2=9 \\ t_6>10 \end{matrix}\right\}\overset{x^2=\theta\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\theta},\theta\geq 0}{\Leftrightarrow}\left\{\begin{matrix} t_6-12=\pm\sqrt{9} \\ t_6>10 \end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{pmatrix} t_6-12=3 \\ t_6>10 \end{pmatrix}\acute{\eta}\begin{pmatrix} t_6-12=-3 \\ t_6>10 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{pmatrix} t_6=12+3 \\ t_6>10 \end{pmatrix}\acute{\eta}\begin{pmatrix} t_6=12-3 \\ t_6>10 \end{pmatrix}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{pmatrix} t_6=15\left(\Delta\varepsilon\kappa\tau\acute{\eta}\right) \\ t_6>10 \end{pmatrix}\acute{\eta}\begin{pmatrix} t_6=9\left(\text{Α}\pi o\rho\rho\acute{\iota}\pi\tau\varepsilon\tau\alpha\iota\right) \\ t_6>10 \end{pmatrix}\right\}\Leftrightarrow t_6=15$$

3.

Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=x^3-3\lambda^2x+\mu$ *όπου* λ,μ *θετικές σταθερές*

$\left(\text{I}\right)$ *Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της* f

$\left(\text{II}\right)$ *Αν* x_1,x_2 *θέσεις τοπικών ακροτάτων να βρεθούν τα* λ,μ *όταν το δείγμα* $\omega_1=\mu-\lambda,\omega_2=f\left(x_1\right),\omega_3=f\left(x_3\right),\omega_4=\mu+\lambda$ *να έχει διακύμανση* $\dfrac{5\lambda^2}{2}$ *και να ισχύει* $s_\omega{}^2=0,1\bar{\omega}$

$$(\mathrm{I})\; f'(x)=\left(x^3-3\lambda^2x+\mu\right)' \overset{\left(F(x)-G(x)+H(x)\right)'=F'(x)-G'(x)+H'(x)}{=} \left(x^3\right)'-\left(3\lambda^2x\right)'+\left(\mu\right)'=$$

$$\underset{\substack{\left(x^a\right)'=ax^{a-1}\\ \left(cF(x)\right)'=cF'(x),c:\Sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}\\ \left(c\right)'=0,c:\Sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}\\ \left(x\right)'=1}}{=} 3x^2-3\lambda^2\left(x\right)'=3x^2-3\lambda^2=3\left(x^2-\lambda^2\right)=3\left(x-\lambda\right)\left(x+\lambda\right)$$

Θεωρώ την δευτεροβάθμια εξίσωση :

$$3\left(x-\lambda\right)\left(x+\lambda\right)=0\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix} x-\lambda=0\\ \acute{\eta}\\ x+\lambda=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix} x=\lambda\\ \acute{\eta}\\ x=-\lambda\end{matrix}\right\}$$

x	$-\infty$		$-\lambda$		λ		$+\infty$
$3\left(x-\lambda\right)\left(x+\lambda\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		$-\lambda$		λ		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↗		↘		↗	
			Τ.Μ		Τ.Ε		

$$\text{Έχω}:\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\ f'(-\lambda)=0\\(\mathrm{II})\ f'(x)>0\ \text{για κάθε}\ x\in(-\infty,-\lambda)\\(\mathrm{III})\ f'(x)<0\ \text{για κάθε}\ x\in(-\lambda,\lambda)\end{array}\right\}$$

Οπότε η συνάρτηση f έχει τοπικό μέγιστο στην θέση $x_1=-\lambda$ τον αριθμό:

$$f(x_1)=f(-\lambda)=(-\lambda)^3-3\lambda^2(-\lambda)+\mu=-\lambda^3+3\lambda^3+\mu=2\lambda^3+\mu$$

$$\text{Έχω}:\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\ f'(\lambda)=0\\(\mathrm{II})\ f'(x)<0\ \text{για κάθε}\ x\in(-\lambda,\lambda)\\(\mathrm{III})\ f'(x)>0\ \text{για κάθε}\ x\in(\lambda,-\infty)\end{array}\right\}$$

Οπότε η συνάρτηση f έχει τοπικό ελάχιστο στην θέση $x_2=\lambda$ τον αριθμό:

$$f(x_1)=f(\lambda)=\lambda^3-3\lambda^2\lambda+\mu=\lambda^3-3\lambda^3+\mu=-2\lambda^3+\mu$$

(II) Έχω το δείγμα:

$$\omega_1=\mu-\lambda,\omega_2=f(x_1)=2\lambda^3+\mu,\omega_3=f(x_3)=-2\lambda^3+\mu,\omega_4=\mu+\lambda$$

$$\overline{\omega}=\frac{\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4}{4}=\frac{\mu-\lambda+2\lambda^3+\mu-2\lambda^3+\mu+\mu+\lambda}{4}=\frac{4\mu}{4}=\mu$$

$$s_\omega{}^2=\frac{\left(\omega_1-\overline{\omega}\right)^2+\left(\omega_2-\overline{\omega}\right)^2+\left(\omega_3-\overline{\omega}\right)^2+\left(\omega_4-\overline{\omega}\right)^2}{4}=$$

$$\frac{(\mu-\lambda-\mu)^2+\left(2\lambda^3+\mu-\mu\right)^2+\left(-2\lambda^3+\mu-\mu\right)^2+(\mu+\lambda-\mu)^2}{4}=$$

$$=\frac{\lambda^2+4\left(\lambda^3\right)^2+4\left(\lambda^3\right)^2+\lambda^2}{4}=\frac{2\lambda^2+8\lambda^6}{4}=\frac{2\lambda^2\left(1+4\lambda^4\right)}{4}=\frac{\lambda^2\left(1+4\lambda^4\right)}{2}$$

$$\text{Έχω}:\left\{\begin{array}{c}s_\omega{}^2=\dfrac{5\lambda^2}{2}\\\lambda>0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\dfrac{\lambda^2\left(1+4\lambda^4\right)}{2}=\dfrac{5\lambda^2}{2}\\\lambda>0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\lambda^2\left(1+4\lambda^4\right)=5\lambda^2\\\lambda>0\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\lambda^2\left(1+4\lambda^4\right)-5\lambda^2=0\\\lambda>0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\lambda^2\left(1+4\lambda^4-5\right)=0\\\lambda>0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\lambda^2\left(4\lambda^4-4\right)=0\\\lambda>0\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}4\lambda^2\left(\lambda^4-1\right)=0\\\lambda>0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\left(\begin{array}{c}\lambda^2=0\\\lambda>0\end{array}\right)\acute{\eta}\left(\begin{array}{c}\lambda^4-1=0\\\lambda>0\end{array}\right)\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{pmatrix} \lambda = 0 \\ \lambda > 0 \\ (\text{Απορρίπτεται}) \end{pmatrix} \acute{\eta} \begin{pmatrix} \lambda^4 = 1 \\ \lambda > 0 \end{pmatrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \lambda = \pm\sqrt[4]{1} \\ \lambda > 0 \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} \lambda = \pm 1 \\ \lambda > 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \lambda = 1$$

$$\text{Έχω}: s_\omega{}^2 = \frac{\lambda^2\left(1+4\lambda^4\right)}{2} \overset{\lambda=1}{=} \frac{1^2 \bullet \left(1+4 \bullet 1^4\right)}{2} = \frac{5}{2}$$

$$s_\omega{}^2 = 0,1\overline{\omega} \Leftrightarrow \frac{5}{2} = \frac{\mu}{10} \Leftrightarrow \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}} \bullet 5 = \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\frac{\mu}{5} \overset{\substack{\text{Αν } \alpha\neq 0 \text{ ισχύει ο νόμος της διαγραφής} \\ \alpha\bullet\beta=\alpha\bullet\gamma\Leftrightarrow\beta=\gamma}}{\Longleftrightarrow} 5 = \frac{\mu}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mu = 5 \bullet 5 \Leftrightarrow \mu = 25$$

4.

Μια μεταβλητή x παίρνει τις τιμές :
$1,2,\omega,3+\omega,3+\omega,4+\omega,4+\omega,5+\omega,6+\omega,5+2\omega$, με $\omega > 0$
(I) Αν η μέση τιμή τους είναι $\overline{x} = 6$, να αποδείξετε ότι $\omega = 3$
(II) β) Αν $\omega = 3$ να βρείτε την τυπική απόκλιση

Μια μεταβλητή x παίρνει τις τιμές :

$$\overline{x} = \frac{1+2+\omega+3+\omega+3+\omega+4+\omega+4+\omega+5+\omega+6+\omega+5+2\omega}{10} \Leftrightarrow$$

$$\frac{9\omega+33}{10} = 6 \Leftrightarrow 9\omega+33 = 6 \bullet 10 \Leftrightarrow 9\omega = 60-33 \Leftrightarrow 9\omega = 27 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \omega = \frac{27}{9} \Leftrightarrow \omega = 3$$

Έχω τον πληθυσμό : $1,2,3,6,6,7,7,8,9,11$

$$s^2 = \frac{(1-6)^2+(2-6)^2+(3-6)^2+2(6-6)^2+2(7-6)^2+(7-6)^2+(9-6)^2+(11-6)^2}{10} =$$

$$= \frac{5^2+4^2+3^2+0+0+(-1)^2+(\ -1)^2+(-2)^2+(-3)^2+(-5)^2}{10} =$$

$$= \frac{25+16+9+1+1+4+9+25}{10} = \frac{90}{10} = 9$$

$$\text{Έχω}: s = \sqrt{s^2} = \sqrt{9} = 3$$