Πως εργάζομαι για να βρω την μέση τιμή ενός πληθυσμού όταν έχω πρόσθεση ή αφαίρεση δυο πληθυσμών ;;;

Από την μέση τιμή του 1ου πληθυσμού θα βρω το άθροισμα όλων των παρατηρήσεων :

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_\kappa}{\kappa} \Longrightarrow \boxed{x_1 + x_2 + \ldots + x_\kappa = \kappa\,\bar{x}} \quad (1)$$

Από την μέση τιμή του 2ου πληθυσμού θα βρω το άθροισμα όλων των παρατηρήσεων :

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_\lambda}{\lambda} \Longrightarrow \boxed{y_1 + y_2 + \ldots + y_\lambda = \lambda\,\bar{y}} \quad (2)$$

Όταν έχω πρόσθεση δυο πληθυσμών για να βρω τη μέση τιμή προσθέτω το άθροισμα των παρατηρήσεων και το διαιρώ με το πλήθος του νέου πληθυσμού

Όταν έχω αφαίρεση δυο πληθυσμών για να βρω τη μέση τιμή αφαιρώ το άθροισμα των παρατηρήσεων και το διαιρώ με το πλήθος του νέου πληθυσμού

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1.

Η μέση επίδοση στο μάθημα των Μαθηματικών 25 μαθητών και 15 μαθητριών είναι 16,8.Αν η μέση επίδοση των μαθητριών είναι 15,6 να βρεθεί η μέση επίδοση των μαθητών

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu}{\nu}$$

$\bar{x}$: Η μέση τιμή του πληθυσμού

Έστω $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{25}$ οι βαθμοί των αγοριών και $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_{15}$ οι βαθμοί των κοριτσιών. Επειδή η μέση βαθμολογία στο μάθημα των Μαθηματικών των 40 μαθητών(25 αγόρια και 15 κορίτσια) είναι 16,8 θα έχω:

$$16{,}8 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{25} + \kappa_1 + \kappa_2 + \ldots + \kappa_{15}}{} \quad ή$$

40

$$\frac{16{,}8}{1} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{25} + \kappa_1 + \kappa_2 + \ldots + \kappa_{15}}{40} \quad ή$$

1

40

$$1 \cdot (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{25} + \kappa_1 + \kappa_2 + \ldots + \kappa_{15}) = 16{,}8 \cdot 40$$

$$\boxed{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{25} + \kappa_1 + \kappa_2 + \ldots + \kappa_{15} = 672} \quad (1)$$

Επειδή η μέση βαθμολογία στο μάθημα των Μαθηματικών των 15 κοριτσιών είναι 15,6 θα έχω :

$$15{,}6 = \frac{\kappa_1 + \kappa_2 + \ldots + \kappa_{15}}{15} \quad ή$$

15

$$\frac{15{,}6}{1} = \frac{\kappa_1 + \kappa_2 + \ldots + \kappa_{15}}{15} \quad ή$$

1

15

$$1 \cdot (\kappa_1 + \kappa_2 + \ldots + \kappa_{15}) = 15{,}6 \cdot 15$$

$$\boxed{\kappa_1 + \kappa_2 + \ldots + \kappa_{15} = 234} \quad (2)$$

Οπότε: $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{25} + \kappa_1 + \kappa_2 + \ldots + \kappa_{15} = 672$ ή

Θέτω : $\kappa_1 + \kappa_2 + \ldots + \kappa_{15} = 234$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{25} + 234 = 672 \quad ή$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{25} + \ = 672 - 234 \quad ή$$

$$\boxed{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{25} = 438} \quad (3)$$

Η μέση βαθμολογία των αγοριών στο μάθημα των Μαθηματικών είναι :

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{25}}{25} \overset{(3)}{==} \frac{438 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{1752}{100} = 17{,}52$$

2.

Η *μέση τιμή της ηλικίας μιας ομάδας που αποτελείται απο μαθηματικούς και φιλόλογους είναι* 40 *χρόνια*. Αν *η μέση τιμή της ηλικίας των μαθηματικών είναι* 35 *χρόνια και των φιλολόγων* 50, *να βρείτε τον λόγο του αριθμού των μαθηματικών προς τον αριθμό των φιλολόγων* $\text{Α}: \frac{3}{2} \quad \text{Β}: \frac{3}{1} \quad \Gamma: \frac{2}{3} \quad \Delta: \frac{2}{1} \quad \text{Ε}: \frac{1}{2}$ (Π*ανελλήνιος μαθηματικός διαγωνισμός της* Ε.Μ.Ε)

Έστω $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_\nu$ *οι ηλικίες μαθηματικοί και* $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_\kappa$ *οι ηλικίες των φιλολόγων.Επειδή η μέση τιμή μαθηματικών + φιλόλογων είναι* 40 *χρόνια θα έχω*:

$$\frac{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_\nu+\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_\kappa}{\nu+\kappa}=40 \Leftrightarrow$$

$$\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_\nu+\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_\kappa=40(\nu+\kappa) \Leftrightarrow$$

$$\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_\nu+\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_\kappa=40\nu+40\kappa\,(1)$$

Ε*πειδή η μέση τιμή των μαθηματικών είναι* 35 *χρόνια θα έχω*:

$$\frac{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_\nu}{\nu}=35 \Leftrightarrow \mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_\nu=35\nu\,(2)$$

Ε*πειδή η μέση τιμή των φιλολόγων είναι* 50 *χρόνια θα έχω*:

$$\frac{\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_\kappa}{\kappa}=50 \Leftrightarrow \varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_\kappa=50\kappa\,(3)$$

Α*πο τις σχέσεις* $(1),(2),(3)$ *θα έχω*:

$$(1) \Leftrightarrow \mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_\nu+\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_\kappa=40\nu+40\kappa \overset{\substack{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_\nu=35\nu \\ \varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_\kappa=50\kappa}}{\Longleftrightarrow}$$

$$35\nu+50\kappa=40\nu+40\kappa \overset{\substack{\text{Μεταφέρω όλα τα κ στο πρώτο μέλος} \\ \text{και όλα τα ν στο δεύτερο μέλος}}}{\Longleftrightarrow} 50\kappa-40\kappa=40\nu-35\nu \Leftrightarrow$$

$$10\kappa=5\nu \Leftrightarrow \cancel{5}\cdot 2\kappa=\cancel{5}\cdot\nu \overset{\substack{\text{Αν } \alpha\neq 0 \text{ τότε ισχύει ο νόμος διαγραφής} \\ \alpha\cdot\beta=\alpha\cdot\gamma\Leftrightarrow\beta=\gamma}}{\Longleftrightarrow} \nu=2\kappa$$

Ο*πότε*: $\dfrac{\nu}{\kappa}\overset{\nu=2\kappa}{=}\dfrac{2\kappa}{\kappa}=2$

Άρα επιλέγω το (Δ)

3.

Οι αριθμοί που ακολουθούν είναι οι ετήσιοι βαθμοι 20 μαθητών στο μάθημα των μαθηματικών 10, 10, 18, 9 , 18 , 20 , 8 , 18 , 9 , 13, 13 , 9 , 16 , 16 , 9, 10 , 8 , 6 , 7 , 13 Α) Να κατασκευαστεί ο πίνακας με τις στήλες x_i , ν_i , N_i , f_i , f_i% , F_i , F_i% Β) Να βρεθεί πόσοι μαθητές έχουν περάσει την βάση Γ) Να βρεθεί το ποσοστό των μαθητών που έχουν βαθμολογία 9 Δ) Να βρεθεί το ποσοστό των μαθητών που έχουν βαθμολογία το πολύ 16 Ε) Να βρεθεί το ποσοστό των μαθητών που έχουν βαθμολογία τουλάχιστον 13 Ζ) Ποια θα πρέπει να είναι η βάση στο μάθημα των μαθηματικών για να περάσουν στην άλλη τάξη το 80% των μαθητών Η) Να βρεθεί η μέση τιμή της ετήσιας βαθμολογίας των μαθητών στο μάθημα των μαθηματικών Θ) Αν στην τάξη έρθουν άλλα 10 άτομα ποια θα πρέπει να είναι η μέση βαθμολογία τους έτσι ώστε η νέα βαθμολογία όλων των μαθητών να είναι 14

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Α)

ν_i: Σχετική συχνότητα του x_i :Εκφράζει πόσες φορές εμφανίζεται το x_i N_i : Αθροιστική συχνότητα του x_i :Εκφράζει πόσες φορές εμφανίζεται όλα τα στοιχεία που είναι μικρότερα ή ίσα του x_i
$N_1 = \nu_1$, $N_i = \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_i$, $N_\kappa = \nu_{o\lambda}$
$N_1 = \nu_1$, $N_i = N_{i-1} + \nu_i$, $N_\kappa = \nu_{o\lambda}$
$N_1 = \nu_1$, Νέο Ν = Προηγούμενο Ν + Νέο ν , $N_\kappa = \nu_{o\lambda}$

x_i	ν_i	N_i
6	1	1
7	1	2
8	2	4
9	4	8
10	3	11
13	3	14
16	2	16
18	3	19
20	1	20
ΣΥΝΟΛΟ	20	——

$N_1 = \nu_1 = 1$

$N_2 = N_1 + \nu_2 = 1 + 1 = 2$

$N_3 = N_2 + \nu_3 = 2 + 2 = 4$

$N_4 = N_3 + \nu_4 = 4 + 4 = 8$

$N_5 = N_4 + \nu_5 = 8 + 3 = 11$

$N_6 = N_5 + \nu_6 = 11 + 13 = 14$

$N_7 = N_6 + \nu_7 = 14 + 2 = 16$

$$N_8 = N_7 + \nu_8 = 16 + 3 = 19$$
$$N_9 = N_8 + \nu_9 = 19 + 1 = 20$$

ν_i: Συχνότητα του x_i :Εκφράζει πόσες φορές εμφανίζεται το x_i f_i : Σχετική συχνότητα του x_i f_i %: Σχετική συχνότητα του x_i επι τοις εκατό : Εκφράζει πόσες φορές εμφανίζεται το x_i όταν ο πληθυσμός είναι 100 : Εκφράζει το ποσοστο των στοιχείων που είναι ίσα με το x_i
$f_i = \dfrac{\nu_i}{\nu}$, $\nu = \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_\kappa$
$f_1 + f_2 + \ldots f_\kappa = 1$
f_i % = f_i 100 = Πολλαπλασιάζω το f_i με το 100 και όλο αυτό είναι εκφρασμένο επι τοις εκατό = Μεταφέρω την υποδιαστολή του f_i δυο θέσεις προς τα δεξιά 100 και όλο αυτό είναι εκφρασμένο επι τοις εκατό
$f_1\% + f_2\% + \ldots f_\kappa\% = 100$

$$f_1 = \frac{\nu_1}{\nu} = \frac{1}{20} = 0{,}05$$

$$f_2 = \frac{\nu_2}{\nu} = \frac{1}{20} = 0{,}05$$

$$f_3 = \frac{\nu_3}{\nu} = \frac{2}{20} = \frac{2:2}{20:2} = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

$$f_4 = \frac{\nu_4}{\nu} = \frac{4}{20} = \frac{4:4}{20:4} = \frac{1}{5} = 0{,}2$$

$$f_5 = \frac{\nu_5}{\nu} = \frac{3}{20} = 0{,}15$$

$$f_6 = \frac{\nu_6}{\nu} = \frac{3}{20} = 0{,}15$$

$$f_7 = \frac{\nu_7}{\nu} = \frac{2}{20} = \frac{2:2}{20:2} = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

$$f_8 = \frac{\nu_8}{\nu_{ολ}} = \frac{3}{20} = 0{,}15$$

$$f_9 = \frac{\nu_9}{\nu_{ολ}} = \frac{1}{20} = 0,05$$

x_i	ν_i	f_i	f_i %
6	1	0,05	5
7	1	0,05	5
8	2	0,1	10
9	4	0,2	20
10	3	0,15	15
13	3	0,15	15
16	2	0,1	10
18	3	0,15	15
20	1	0,05	5
ΣΥΝΟΛΟ	20	1	100

F_i : Σχετική αθροιστική συχνότητα του x_i F_i %: Σχετική αθροιστική συχνότητα του x_i επι τοις εκατό : Εκφράζει πόσες φορές εμφανίζεται τα στοιχεία που είναι μικρότερα ή ίσα του x_i όταν ο πληθυσμός είναι 100 : Εκφράζει το ποσοστο των στοιχείων που είναι μικρότερα ή ίσα του x_i
$F_1 = f_1$, $F_i = f_1 + f_2 + . . . + f_i$, $F_κ = 1$
$F_1 = f_1$, $F_i = F_{i-1} + f_i$, $F_κ = 1$
$F_1 = f_1$, Νέο F = Προηγούμενο F + Νέο f , $F_κ = 1$
F_i % = F_i 100 = Πολλαπλασιάζω το F_i με το 100 και όλο αυτό είναι εκφρασμένο επι τοις εκατό = Μεταφέρω την υποδιαστολή του f_i δυο θέσεις προς τα δεξιά 100 και όλο αυτό είναι εκφρασμένο επι τοις εκατό

x_i	f_i	F_i	$F_i\,\%$
6	0,05	0,05	5
7	0,05	0,1	10
8	0,1	0,2	20
9	0,2	0,4	40
10	0,15	0,55	55
13	0,15	0,7	70
16	0,1	0,8	80
18	0,15	0,95	95
20	0,05	1	100
<u>ΣΥΝΟΛΟ</u>	1	—	—

$F_1 = f_1 = 0{,}05$
$F_2 = F_1 + f_2 = 0{,}05 + 0{,}05 = 0{,}1$
$F_3 = F_2 + f_3 = 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}2$
$F_4 = F_3 + f_4 = 0{,}2 + 0{,}2 = 0{,}4$
$F_5 = F_4 + f_5 = 0{,}4 + 0{,}15 = 0{,}55$
$F_6 = F_5 + f_6 = 0{,}55 + 0{,}15 = 0{,}7$
$F_7 = F_6 + f_7 = 0{,}7 + 0{,}1 = 0{,}8$
$F_8 = F_7 + f_8 = 0{,}8 + 0{,}15 = 0{,}95$

$$F_9 = F_8 + f_9 = 0,95 + 0,05 = 1$$

Β)Οι μαθητές έχουν περάσει την βάση είναι :

$\boxed{\text{Συνολικοί μαθητές}}$ – $\boxed{\text{Οι μαθητές που έχουν βαθμολογία το πολύ 9}}$ =

$= 20 – N_3 = 20 – 8 = 12$

Γ) Το ποσοστό των μαθητών που έχουν βαθμολογία 9 είναι :

$$f_4\% = 20\%$$

Δ) Το ποσοστό των μαθητών που έχουν βαθμολογία το πολύ 16 είναι :

$\boxed{\text{Το ποσοστό των μαθητών που έχουν βαθμολογία μικρότερη ή ίση του 16}}$

$$= F_7\% = 80\%$$

Ε)Το ποσοστό των μαθητών που έχουν βαθμολογία τουλάχιστον 13 είναι: 100% – (Το ποσοστό των μαθητών που έχουν βαθμολογία μικρότερη ή ίση του 13) = 100% – F_6% = 100% – 70% = 30%

Ζ) Το ποσοστό των μαθητών που έχουν βαθμολογία τουλάχιστον 9 είναι :

100% – (Το ποσοστό των μαθητών που έχουν βαθμολογία μικρότερη ή ίση του 8) = 100% – F_3% = 100% –20% = 80%

Οπότε για να περάσει την τάξη το 80% των μαθητών η βάση στο μάθημα των μαθηματικών πρέπει να είναι 9!!!

Η)

x_i	ν_i	$x_i \nu_i$
6	1	6 • 1 = 6
7	1	7 • 1 = 7
8	2	8 • 2 = 16
9	4	9 • 4 = 36
10	3	10 • 3 = 30
13	3	13 • 3 = 39
16	2	16 • 2 = 32
18	3	18 • 3 = 54
20	1	20 • 1 = 20
ΣΥΝΟΛΟ	20	240

$$\bar{x} = \frac{x_1 \nu_1 + x_2 \nu_2 + \ldots + x_\kappa \nu_\kappa}{\nu_{o\lambda}} = \frac{240}{20} = 12$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 \nu_1 + x_2 \nu_2 + \ldots + x_\kappa \nu_\kappa}{\nu_{o\lambda}} \quad , \nu_{o\lambda} = \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_\kappa$$

$\bar{x}$: Η μέση τιμή του πληθυσμού
ν_i : Η συχνότητα του στοιχείου x_i : Ο αριθμός που εκφράζει πόσες φορές εμφανίζεται το στοιχείο x_i

Θ)Αρχικά έχω 20 μαθητές με μεση τιμή στο μάθημα των μαθηματικών 12. Άρα έχω τον πληθυσμό $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_{20}$ με μέση τιμή 12 Οπότε θα ισχύει :

$$\frac{t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_{20}}{20} = 12$$

$$\frac{t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_{20}}{20} = \frac{12}{1}$$

$$1(t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_{20}) = 20 \bullet 12 \Longleftrightarrow \boxed{t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_{20} = 240} \quad (1)$$

Έρχονται 10 μαθητές με μεση τιμή στο μάθημα των μαθηματικών x.Άρα έχω τον πληθυσμό $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_{10}$ με μέση τιμή x Οπότε θα ισχύει :

$$\frac{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \ldots + \omega_{10}}{10} = x \Longleftrightarrow$$

$$\frac{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \ldots + \omega_{10}}{10} = \frac{x}{1} \Longleftrightarrow$$

$$1(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \ldots + \omega_{10}) = 10\, x \Longleftrightarrow \boxed{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \ldots + \omega_{10} = 10\, x} \quad (2)$$

Επειδή η μέση τιμή του πληθυσμού παλαιοί + νεοι μαθητές είναι 14 θα έχω :

$$\frac{t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_{20} + \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \ldots + \omega_{10}}{30} = 14 \Leftrightarrow$$

$$\frac{240 + 10x}{30} = \frac{14}{1} \Leftrightarrow$$

$$1(240 + 10x) = 30 \bullet 14 \text{ ή} \Leftrightarrow$$

$$240 + 10x = 420 \text{ ή} \Leftrightarrow$$

$$10x = 420 - 240 \text{ ή} \Leftrightarrow$$

$$10x = 180 \Leftrightarrow$$

$$\frac{10x}{10} = \frac{180}{10} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{x = 18}$$

Άρα οι 10 νέοι μαθητές έχουν μεση τιμή στο μάθημα των μαθηματικών 18 !!!

4.

Ο μέσος μηνιαίος μισθός των υπαλλήλων μιας εταιρείας είναι $\bar{x}$ = 900 €. Αν στην εταιρεία προσληφθεί ένας ακόμη υπάλληλος με μισθό 1000 €, τότε ο μέσος μισθός όλων των υπαλλήλων γίνεται $\bar{x}'$ = 902 €
Ι) Να βρεθεί το πλήθος των υπαλλήλων της εταιρείας πριν προσληφθεί ο νέος υπάλληλος
ΙΙ) Επειδή ο υπάλληλος με μισθό 1000 € έφυγε η εταιρεία πήρε στη θέση του υπάλληλο με μισθό 1050 €. Να βρείτε το νέο μέσο μισθό όλων των υπαλλήλων

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Ι)Έστω έχω τον πληθυσμό $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$.Τότε θα ισχύει:

$$\frac{t_1+t_2+\ldots+t_\nu}{\nu} = \overline{x}$$

$$\frac{t_1+t_2+\ldots+t_\nu}{\nu} = \frac{900}{1}$$

$$(t_1+t_2+\ldots+t_\nu)\,1 = 900\,\nu$$

$$\boxed{t_1+t_2+\ldots+t_\nu = 900\,\nu} \quad (1)$$

Έστω έχω τον πληθυσμό $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$,1000.Τότε θα ισχύει:

$$\frac{t_1+t_2+\ldots+t_\nu+1000}{\nu+1} = \overline{x}'$$

$$\boxed{\text{Θέτω : } t_1+t_2+\ldots+t_\nu = 900\,\nu}$$

$$\frac{900\nu+1000}{\nu+1} = \frac{902}{1}$$

$$(900\nu+1000)\,1 = 902(\nu+1)$$

$$900\nu+1000 = 902\nu+902$$

$$900\nu-902\nu = 902-1000$$

$$-2\nu = -98$$

$$\frac{-2\nu}{-2} = \frac{-98}{-2}$$

$$\nu = 49$$

II) Επειδή $\nu = 49$ από την σχέση (1) θα έχω :
$t_1 + t_2 + \ldots + t_{49} = 900 \cdot 49 = 44100$

Έστω έχω τον πληθυσμό $t_1, t_2, \ldots, t_{49}, 1050$.Τότε η μέση τιμή θα είναι:

$$\frac{t_1 + t_2 + \ldots + t_{49} + 1050}{50} = \frac{44100 + 1050}{50} = \frac{45150}{50} = \frac{45150 \cdot 2}{50 \cdot 2} =$$

$$= \frac{90300}{100} = 903$$