ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ
$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \dfrac{\text{Ευνοικές περιπτώσεις για το γεγονός Α}}{\text{Δυνατές περιπτώσεις}}$
Έστω ο δειγματοχώρος $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_\nu\}$ *όπου* $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_\nu$ *είναι στοιχειώδη ενδεχόμενα.*Η Ρ *είναι πιθανότητα όταν* : $(\mathrm{I})\ 0 \le \mathrm{P}(\omega_\kappa) \le 1, \kappa = 1, 2, \cdots, \nu$ $(\mathrm{II})\ \mathrm{P}(\omega_1) + \mathrm{P}(\omega_2) + \cdots + \mathrm{P}(\omega_\nu) = 1$ (III) Α*ν* $\mathrm{A} = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \cdots, \omega_{i_\kappa}\}, i_1, i_2, \cdots, i_\kappa \in \{1, 2, \cdots, \nu\}, \kappa \le \nu$ *τότε* $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \mathrm{P}(\omega_{i_1}) + \mathrm{P}(\omega_{i_2}) + \cdots + \mathrm{P}(\omega_{i_\kappa})$ $(\mathrm{I}V)$ Α*ν* $\mathrm{A} \subseteq \Omega$ *τότε* $0 \le \mathrm{P}(\mathrm{A}) \le 1$ $(V)\ \mathrm{P}(\varnothing) = 0$ $(V\mathrm{I})\ \mathrm{P}(\Omega) = 1$ Τ*α* $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_\nu$ *καλούνται στοιχειώδη ενδεχόμενα ή γεγονότα* Γ*εγονός ή ενδεχόμενο είναι κάθε υποσύνολο του* Ω
Δ*υο γεγονότα* Α,Β *είναι ασυμβίβαστα ή ξένα μεταξύ τους όταν* $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$
Α*ν δυο γεγονότα* Α,Β *είναι ασυμβίβαστα ή ξένα μεταξύ τους τότε ισχύει* : $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\mathrm{A})$
$\mathrm{P}(\mathrm{A} - \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) - \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$
$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\mathrm{B}) - \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$
Α*ν* $\mathrm{X} \subseteq \mathrm{Y}$ *τότε* $\mathrm{P}(\mathrm{X}) \le \mathrm{P}(\mathrm{Y})$
$\mathrm{A}' \cup \mathrm{B}' = (\mathrm{A} \cap \mathrm{B})'$
$\mathrm{A}' \cap \mathrm{B}' = (\mathrm{A} \cup \mathrm{B})'$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1.

Ένας πληθυσμός 150 *ενηλίκων ανδρών ταξινομείται ως προς το βάρος σε "φυσιολογικούς* (Φ)" *και "υπέρβαρους* (Υ)" *και ως προς την πίεση του αίματος σε "έχοντας* (Κ)" *πίεση και σε έχοντας "αυξημένη* (Α)" *πίεση.*Τ*α δεδομένα δίνονται στον ακόλουθο πίνακα*

	Κ*ανονική πίεση*	Α*υξημένη πίεση*	Σ*υνολο*
Φ*υσιολογικό βάρος*	90	15	105
Υ*πέρβαρος*	30	15	45
Σ*ύνολο*	120	30	150

*Ένας απο τους ενήλικες εκλέγεται στην τύχη.*Χ*ρημοποιώντας τον κλασικό ορισμό να υπολογιστούν οι πιθανότητες*

(Ι)*να είναι υπέρβαρος* (ΙΙ)*να έχει αυξημένη πίεση*

(ΙΙΙ)*να είναι υπέρβαρος ή να έχει αυξημένη πίεση*

$(\mathrm{I})\underline{\text{Ευνοικές περιπτώσεις για το Υ}}:45$

$\underline{\text{Δυνατές περιπτώσεις}}:150$

$$P(Y)=\frac{45}{150}=\frac{3}{10}$$

$(\mathrm{II})\underline{\text{Ευνοικές περιπτώσεις για το Α}}$

Όταν έχω αυξημένη πίεση θα έχω αυξημένη πίεση με κανονικό βάρος ή αυξημένη πίεση όταν είμαι υπέρβαρος.Οπότε το πλήθος των ευνοικών περιπτώσεων είναι:

$$\begin{pmatrix}\text{Πλήθος των περιπτώσεων}\\ \text{να έχω αυξημένη πίεση}\\ \text{με κανονικό βάρος}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\text{Πλήθος των περιπτώσεων}\\ \text{να έχω αυξημένη πίεση}\\ \text{όταν είμαι υπέρβαρος}\end{pmatrix}=$$

$$=15+15=30$$

$$P(A)=\frac{30}{150}=\frac{1}{5}$$

$(\mathrm{III})\underline{\text{Ευνοικές περιπτώσεις για το } Y\cap A}:15$

$$P(Y\cap A)=\frac{15}{150}$$

$$P(Y\cup A)=P(Y)+P(A)-P(Y\cap A)=\frac{45}{150}+\frac{30}{150}-\frac{15}{150}=\frac{60}{150}=\frac{2}{5}$$

2.

Αν Α,Β *δυο ενδεχόμενα ενός δειγματοχώρου* Ω *με* $P(A)=0,4$ *και* $P(B)=0,7$
(I) *Είναι τα γεγονότα* Α,Β *ασυμβίβαστα;;;*
(II) *Να δειχτεί οτι* $0,1\le P(A\cap B)\le 0,4$

(I) *Έστω τα γεγονότα* Α,Β *είναι ασυμβίβαστα.Τότε θα έχω:*

$$A\cap B=\varnothing$$

Οπότε θα ισχύει:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=0,4+0,7=1,1>1\,(\text{Άτοπο})$$

Άρα $A\cap B\neq\varnothing$. *Συνεπώς τα γεγονότα* Α,Β *δεν είναι ασυμβίβαστα*

$(\text{II})\, \mathrm{A}\cap\mathrm{B}\subseteq \mathrm{A}\Rightarrow \mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\subseteq \mathrm{P}(\mathrm{A})\Rightarrow \mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\subseteq 0,4$

$\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=\mathrm{P}(\mathrm{A})+\mathrm{P}(\mathrm{B})-\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\Leftrightarrow \mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=0,4+0,7-\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$

$\Leftrightarrow \mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=1,1-\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$

$\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})\le 1\Leftrightarrow -\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\le -0,1\Leftrightarrow \mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\ge 0,1$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon: 0,1\le \mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\le 0,4$

3.

Αν A,B *ενδεχόμενα του δειγματοχώρου* Ω *με* $\mathrm{P}(\mathrm{A})>\mathrm{P}(\mathrm{B})$

Έστω οι $\mathrm{P}(\mathrm{A})$ *και* $\mathrm{P}(\mathrm{B})$ *είναι οι ρίζες της εξίσωσης*

$6\omega^2-5\omega+1=0$

(I) Α*ν τα ενδεχόμενα* Α *και* Β *είναι ασυμβίβαστα να υπολογισθεί η* $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})$

(II) Ν*α δειχτεί οτι* $\frac{1}{2}\le \mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})\le \frac{5}{6}$

$(\text{I})\, 6\omega^2-5\omega+1=0 \quad (1)$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-5)^2-4\bullet 6\bullet 1=25-24=1>0$

Ε*πειδή* $\Delta>0$ *η δευτεροβάθμια εξίσωση* (1) *εχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες*:

$$\omega_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{5\pm\sqrt{1}}{2\bullet 6}=\frac{5\pm 1}{12}=\begin{cases}\nearrow \frac{5+1}{12}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}\\ \searrow \frac{5-1}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}\end{cases}$$

Ε*πειδή* $\mathrm{P}(\mathrm{A})>\mathrm{P}(\mathrm{B})$ *και* $\mathrm{P}(\mathrm{A}),\mathrm{P}(\mathrm{B})$ *είναι οι ρίζες της εξίσωσης* (1)

θα εχω: $\mathrm{P}(\mathrm{A})=\frac{1}{2},\mathrm{P}(\mathrm{B})=\frac{1}{3}$

Α*ν τα ενδεχόμενα* Α *και* Β *είναι ασυμβίβαστα θα έχω*:

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=\mathrm{P}(\mathrm{A})+\mathrm{P}(\mathrm{B})=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1\bullet 3}{2\bullet 3}+\frac{1\bullet 2}{3\bullet 2}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$$

$$(\text{II})\,\mathrm{A}\subseteq \mathrm{A}\cup\mathrm{B}\Rightarrow \mathrm{P}(\mathrm{A})\le \mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})\Rightarrow \mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})\ge\frac{1}{2}$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=\mathrm{P}(\mathrm{A})+\mathrm{P}(\mathrm{B})-\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=$$

$$=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}-\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\frac{5}{6}-\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})\ge 0\Leftrightarrow -\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\ge-\frac{5}{6}\Leftrightarrow \mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\le\frac{5}{6}$$

$$\text{Ο}\textit{πότε}:\frac{1}{2}\le \mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\le\frac{5}{6}$$

4.

Η *μέση τιμή ενός δείγματος τιμών μιας μεταβλητής* Χ *είναι* $\bar{x}=8$ *και η διακύμανση είναι* $s_x^{\ 2}=4$

(Ι) Ν*α εξεταστεί αν το δείγμα είναι ομοιογενές*

(ΙΙ) Α*ν οι τιμές του δείγματος αυξηθούν κατα* $c, c>0$, *να υπολογίσετε τις τιμές του* c *ώστε το δείγμα να γίνει ομοιογενές*

(ΙΙΙ) Α*ν* $c\in\Omega=\{1,2,3,\dots,2008\}$, *όπου* Ω *ο δειγματικός χώρος με ισοπιθανά απλά ενδεχόμενα, να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων :*

Α"c *άρτιος αριθμός*"

Β:"c *τέτοιος ώστε το δείγμα τιμών της μεταβλητής* Χ *είναι ομοιογενές*"

καθώς και την $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$

(I) Να εξεταστεί αν το δείγμα είναι ομοιογενές

$\acute{E}\chi\omega: s_x = \sqrt{{s_x}^2} = \sqrt{4} = 2$

$CV = \dfrac{s_x}{\overline{x}}$

s_x : Η διακύμανση

$\overline{x}$: Η μέση τιμή

CV : Ο συντελεστής μεταβολής

Το δείγμα είναι ομοιογενές ως προς την μέση τιμή όταν $CV \le 10\%$

$$CV = \frac{s_x}{\overline{x}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0,25 = 25\%$$

Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιγενές ως προς την μέση τιμή

(II) Έχω το δείγμα: $y_i = x_i + c, c > 0, 1 \le i \le \nu, \nu \in \mathbb{N}^*$

Οπότε: $\overline{y} = \overline{x} + c = 8 + c, s_y = s_x = 2$

$$CV_y = \frac{s_y}{\overline{y}} = \frac{2}{\overline{x}+c} = \frac{2}{8+c}$$

$\text{Επειδή } \textit{το δείγμα είναι ομοοιγενές ως προς την μέση τιμή θα έχω}:$

$$CV_y \le 10\% \Leftrightarrow CV_y \le \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{2}{8+c} \le \frac{1}{10} \overset{c>0}{\Longleftrightarrow} 10(8+c)\frac{2}{8+c} \le 10(8+c)\frac{1}{10} \Leftrightarrow$$

$$10\cancel{(8+c)}\frac{2}{\cancel{8+c}} \le \cancel{10}(8+c)\frac{1}{\cancel{10}} \Leftrightarrow 20 \le 8+c \Leftrightarrow 8+c \ge 20 \Leftrightarrow c \ge 12$$

(III) Αν $c \in \Omega = \{1,2,3,\cdots,2008\}$, *όπου* Ω *ο δειγματικός χώρος με ισοπιθανά απλά ενδεχόμενα, να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων*:

Α"*c άρτιος αριθμός*"

Β:"*c τέτοιος ώστε το δείγμα τιμών της μεταβλητής* Χ *είναι ομοιογενές*"

καθώς και την $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$

Ε*πειδή ο δειγματοχώρος* $\Omega = \{1,2,3,\cdots,2008\}$ *αποτελείται απο ισοπιθανά ενδεχόμενα θα ισχύει* $\mathrm{P}(1) = \mathrm{P}(2) = \cdots = \mathrm{P}(2008) = x$

$$\mathrm{P}(1) + \mathrm{P}(2) + \cdots + \mathrm{P}(2008) = 1 \Leftrightarrow \underbrace{x + x + \cdots + x}_{2008-\text{φορές}} = 1 \Leftrightarrow 2008x = 1 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{1}{2008}$$

$$\mathrm{A} = \{c \in \Omega : \text{Ο } c \text{ είναι άρτιος αριθμός}\} = \{2,4,\cdots,2008\} =$$

$$= \{2\cdot 1, 2\cdot 2, \cdots, 2\cdot 1004\}$$

Τ*ο πλήθος των στοιχείων του* Α *είναι* 1004, *καθε στοιχείο του* Α *είναι στοιχειώδες ενδεχόμενο με πιθανότητα* $\frac{1}{2008}$

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \mathrm{P}(2) + \mathrm{P}(4) + \cdots + \mathrm{P}(1008) = \underbrace{\frac{1}{2008} + \frac{1}{2008} + \cdots + \frac{1}{2008}}_{1004-\text{φορές}} =$$

$$= 1004\frac{1}{2008} = \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{B} = \left\{ \begin{array}{l} c \in \Omega : \text{Ο } c \text{ τέτοιος ώστε το δείγμα τιμών της μεταβλητής Χ} \\ \text{είναι ομοιογενές} \end{array} \right\} =$$

$$= \{c \in \Omega : c \ge 12\} = \{12, 13, 14, \cdots, 2008\}$$

Το *πλήθος των στοιχείων του* Β *είναι* $2008-11=1987$, *καθε στοιχείο του* Β *είναι στοιχειώδες ενδεχόμενο με πιθανότητα* $\frac{1}{2008}$

$$P(B)=P(12)+P(13)+\cdots+P(2008)=\underbrace{\frac{1}{2008}+\frac{1}{2008}+\cdots+\frac{1}{2008}}_{1997-\text{φορές}}=$$

$$=1997\frac{1}{2008}=\frac{1997}{2008}$$

$A\bigcap B=\{c\in\Omega:\text{O } c \text{ είναι άρτιος και ισχύει } c\geq 12\}=$

$=\{12,14,16,\cdots,2008\}=\{2\cdot6,2\cdot7,2\cdot8,\cdots,2\cdot1004\}$

Α*ν εί χαμε τους αριθμούς* $2\cdot1,2\cdot2,\cdots,2\cdot5,2\cdot6,\cdots,2\cdot1004$ *θα ήταν σε πλήθος* 1004.Ο*ι αριθμοί* $2\cdot1,2\cdot2,\cdots,2\cdot5$ *είναι σε πλήθος* 5.Ο*πότε οι αριθμοί* $2\cdot6,2\cdot7,2\cdot8,\cdots,2\cdot1004$ *είναι σε πλήθος* $1004-5=999$

Το *πλήθος των στοιχείων του* $A\bigcap B$ *είναι* 999, *καθε στοιχείο του* $A\bigcap B$ *είναι στοιχειώδες ενδεχόμενο με πιθανότητα* $\frac{1}{2008}$

$$P(A\bigcap B)=P(12)+P(14)+\cdots+P(2008)=\underbrace{\frac{1}{2008}+\frac{1}{2008}+\cdots+\frac{1}{2008}}_{999-\text{φορές}}=$$

$$=999\frac{1}{2008}=\frac{999}{2008}$$

5.

Έστω $\Omega=\{1,2,\cdots,\nu\}$ *ένας δειγματοχώρος που αποτελείται απο τα ισοπιθανά απλά ενδεχόμενα το δείγμα των οποίων εχει μέση τιμή* $\overline{\omega}=5$

(I)Ν*α βρείτε το* ν

(II)Θ*εωρουμε το σύνολο* $K=\{\lambda\omega_i+21/\lambda\in\mathbb{N}^*\text{ και }\omega_i\text{ στοιχείο του }\Omega\}$

Ν*α βρείτε την τιμή του* λ *ώστε το μείγμα τιμών του* Κ *να είναι ομοιογενές*

(III)Ε*πιλέγουμε ένα στοιχείο* ω_i *του* Ω.Ν*α βρείτε την πιθανότητα το* $3\omega_i$ *να είναι στοιχείο του* Κ *με δεδομένο οτι το δείγμα των τιμών του* Κ *είναι ομοιογενές*

$$(\mathrm{I})\ \overline{x}=5 \Leftrightarrow \frac{1+2+3+\cdots+\nu}{\nu}=5 \Leftrightarrow 1+2+3+\cdots+\nu=5\nu \Leftrightarrow$$

$\Theta\varepsilon\omega\rho\acute{\omega}$ *την αριθμητική πρόοδο*: $\underset{\alpha_1}{1}, \underset{\alpha_2}{2}, \underset{\alpha_3}{3}, \cdots, \underset{\alpha_\kappa}{\nu}, \cdots$

(α_ν): Α*ριθμητική πρόοδος*
$\boxed{\text{Μια ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος όταν ο επόμενος όρος προκύπτει απο τον προηγούμενο όταν προσθέσουμε τον ίδιο πάντα αριθμό}}$
$\omega=\alpha_2-\alpha_1=\alpha_3-\alpha_2=\cdots=\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu=\Sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}$
$\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\omega$
$S_\nu=\frac{\nu}{2}(\alpha_1+\alpha_\nu)=\frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1+(\nu-1)\omega\right]$
ω: Η *διαφορά της αριθμητικής προόδου*
α_1: Ο *πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου*
α_ν: Ο $\nu^{o\sigma\tau o\varsigma}$ *όρος της αριθμητικής προόδου*
S_ν: Τ*ο άθροισμα των ν πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου*

$\underbrace{1,}_{\alpha_1}\underbrace{2,}_{\alpha_2}\underbrace{3,}_{\alpha_3}\cdots,\underbrace{\nu,}_{\alpha_\kappa}\cdots$

$$\omega=\alpha_2-\alpha_1=2-1=1$$

$$\alpha_\kappa=\alpha_1+(\kappa-1)\omega \Leftrightarrow \nu=1+(\kappa-1)1 \Leftrightarrow \nu=\kappa$$

$$1+2+3+\cdots+\nu=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_\nu=\frac{\nu}{2}(\alpha_1+\alpha_\nu)=\frac{\nu(\nu+1)}{2}$$

$$1+2+3+\cdots+\nu=5\nu \Leftrightarrow \frac{\cancel{\nu}(\nu+1)}{2}=5\cancel{\nu} \Leftrightarrow \frac{\nu+1}{2}=5 \Leftrightarrow \nu+1=10 \Leftrightarrow$$

$$\nu=9$$

(II) $\Gamma\iota\alpha\ \tau o\ \delta\varepsilon\acute{\iota}\gamma\mu\alpha\ \omega_1,\omega_2,\bullet\bullet\bullet,\omega_9\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\overline{\omega}=\frac{\omega_1+\omega_2+\bullet\bullet\bullet+\omega_9}{9}=5$$

$$s_\omega{}^2=\frac{\left(\omega_1-\overline{\omega}\right)^2+\left(\omega_2-\overline{\omega}\right)^2+\bullet\bullet\bullet+\left(\omega_9-\overline{\omega}\right)^2}{\nu}=$$

$$\frac{(1-5)^2+(2-5)^2+(3-5)^2+(4-5)^2+(5-5)^2+(6-5)^2+(7-5)^2}{9}$$

$$+\frac{(8-5)^2+(9-5)^2}{9}=$$

$$=\frac{\underbrace{16+9+4+1}_{30}+\underbrace{1+4++9+16}_{30}}{9}=\frac{2\bullet 30}{9}=\frac{60:3}{9:3}=\frac{20}{3}$$

$$s_\omega=\sqrt{s_\omega{}^2}=\sqrt{\frac{20}{3}}$$

$\acute{E}\chi\omega\ \tau o\ \delta\varepsilon\acute{\iota}\gamma\mu\alpha:\ \kappa_i=\lambda\omega_i+21,1\le i\le 9$

$$\overline{\kappa}=\lambda\overline{\omega}+21=5\lambda+21,s_\kappa=s_\omega=\sqrt{\frac{20}{3}}$$

$$CV_\kappa=\frac{s_\kappa}{\overline{\kappa}}=\frac{\sqrt{\frac{20}{3}}}{5\lambda+21}=\frac{\sqrt{\frac{4\bullet 5}{3}}}{5\lambda+21}=\frac{\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}}}{5\lambda+21}=\frac{2\sqrt{5}\sqrt{5}}{\sqrt{3}\sqrt{5}\left(5\lambda+21\right)}=\frac{2\left(\sqrt{5}\right)^2}{\sqrt{15}\left(5\lambda+21\right)}=$$

$$=\frac{10}{\sqrt{15}\left(5\lambda+21\right)}$$

$\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \tau o\ \delta\varepsilon\acute{\iota}\gamma\mu\alpha\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ o\mu o\iota o\gamma\varepsilon\nu\acute{\varepsilon}\varsigma\ \omega\varsigma\ \pi\rho o\varsigma\ \tau\eta\nu\ \mu\acute{\varepsilon}\sigma\eta\ \tau\iota\mu\acute{\eta}\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$CV_\kappa\le 10\%\Leftrightarrow\frac{10}{\sqrt{15}\left(5\lambda+21\right)}\le\frac{1}{10}\ \overset{\lambda>0\Rightarrow 5\lambda>0\Rightarrow 5\lambda+21>0}{\Longleftrightarrow}$$

$$\cancel{\sqrt{15}\left(5\lambda+21\right)}10\frac{10}{\cancel{\sqrt{15}\left(5\lambda+21\right)}}\le\frac{1}{\cancel{10}}\sqrt{15}\left(5\lambda+21\right)\cancel{10}\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{15}\left(5\lambda+21\right)\ge 100\Leftrightarrow\sqrt{15}\bullet 5\lambda+21\sqrt{15}\ge 100\Leftrightarrow\sqrt{15}\bullet 5\lambda\ge 100-21\sqrt{15}\Leftrightarrow$$

$$\lambda\ge\frac{100-21\sqrt{15}}{\sqrt{15}\bullet 5}\Leftrightarrow\lambda\ge\frac{\left(100-21\sqrt{15}\right)\sqrt{15}}{\sqrt{15}\bullet 5\sqrt{15}}\Leftrightarrow\lambda\ge\frac{100\sqrt{15}-21\left(\sqrt{15}\right)^2}{5\left(\sqrt{15}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \lambda \geq \frac{100\sqrt{15}-21\bullet 15}{5\bullet 15} \overset{\substack{100=20\bullet 5\\15=3\bullet 5}}{\Longleftrightarrow} \lambda \geq \frac{20\bullet 5\sqrt{15}-21\bullet 3\bullet 5}{5\bullet 15} \overset{\substack{\text{Απο τον αριθμητή βγάζω κοινό}\\\text{παράγοντα το } 5}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\lambda \geq \frac{5\left(20\sqrt{15}-63\right)}{5\bullet 15} \Leftrightarrow \lambda \geq \frac{20\sqrt{15}-63}{15}$$

$$\frac{20\sqrt{15}-63}{15} < 2 \Leftrightarrow \frac{20\sqrt{15}-63}{\cancel{15}}\bullet\cancel{15} < 2\bullet 15 \Leftrightarrow 20\sqrt{15}-63 < 30 \Leftrightarrow$$

$$20\sqrt{15} < 30+63 \Leftrightarrow 20\sqrt{15} < 93 \overset{\substack{\text{Αν } \alpha,\beta\geq 0 \text{ ισχύει η ισοδυναμία:}\\ \alpha\geq\beta\Leftrightarrow\alpha^2\geq\beta^2}}{\Longleftrightarrow} \left(20\sqrt{15}\right)^2 < 93^2 \Leftrightarrow$$

$$400\bullet\left(\sqrt{15}\right)^2 < \left(100-7\right)^2 \Leftrightarrow 400\bullet 15 < 100^2 - 2\bullet 100\bullet 7 + 7^2 \Leftrightarrow$$

$$6000 < 10000 - 1400 + 49 \Leftrightarrow 6000 < 8649 \left(\text{Ισχύει}\right)$$

$$\frac{20\sqrt{15}-63}{15} > 1 \Leftrightarrow \frac{20\sqrt{15}-63}{\cancel{15}}\bullet\cancel{15} > 1\bullet 15 \Leftrightarrow 20\sqrt{15}-63 > 1 \Leftrightarrow$$

$$20\sqrt{15} > 1+63 \Leftrightarrow 20\sqrt{15} > 64 \overset{\substack{\text{Αν } \alpha,\beta\geq 0 \text{ ισχύει η ισοδυναμία:}\\ \alpha\geq\beta\Leftrightarrow\alpha^2\geq\beta^2}}{\Longleftrightarrow} \left(20\sqrt{15}\right)^2 > \left(60+4\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$400\bullet\left(\sqrt{15}\right)^2 > \left(60+4\right)^2 \Leftrightarrow 400\bullet 15 \geq 60^2 + 2\bullet 60\bullet 4 + 4^2 \Leftrightarrow$$

$$6000 > 3600 + 480 + 16 \Leftrightarrow 6000 > 4096 \left(\text{Ισχύει}\right)$$

Επειδή $1 < \frac{20\sqrt{15}-63}{15} < 2$ *και* $\lambda \in \mathbb{N}^*$ *με* $\lambda > \frac{20\sqrt{15}-63}{15}$ *θα έχω* $\lambda \geq 2$

(III) *Επιλέγουμε ένα στοιχείο* ω_i *του* $\Omega = \{1,2,\bullet\bullet\bullet,9\}$. *Τότε οι δυνατές περιπττώσεις του* ω_i *είναι* 9. *Θέλω το* $3\,\omega_i$ *να είναι στοιχείο του* Κ *όταν το* Κ *είναι ομοιογενές ως προς την μέση τιμή.* *Επειδή το* Κ *είναι ομοιογενές ως προς την μέση τιμή θα ισχύει* $\lambda \in \mathbb{N}^*, \lambda \geq 2$

$$3\omega_i \in \text{K} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3\omega_i = \lambda\omega_\kappa + 21 \\ \omega_\kappa \in \Omega = \{1,2,\bullet\bullet\bullet,9\} \\ \lambda \in \mathbb{N}^*, \lambda \geq 2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \omega_i = \dfrac{\lambda\omega_\kappa + 21}{3} \\ \omega_\kappa \in \Omega = \{1,2,\bullet\bullet\bullet,9\} \\ \lambda \in \mathbb{N}^*, \lambda \geq 2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} \lambda\omega_\kappa + 21 = 3\omega_i \\ \omega_\kappa \in \Omega = \{1,2,\bullet\bullet\bullet,9\} \\ \lambda \in \mathbb{N}^*, \lambda \geq 2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \lambda\omega_\kappa = 3\omega_i - 21 \\ \omega_\kappa \in \Omega = \{1,2,\bullet\bullet\bullet,9\} \\ \lambda \in \mathbb{N}^*, \lambda \geq 2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \lambda\omega_\kappa = 3\omega_i - 21 \\ \omega_\kappa \in \Omega = \{1,2,\bullet\bullet\bullet,9\} \\ \lambda \in \mathbb{N}^*, \lambda \geq 2 \end{Bmatrix}$$

Ε*πειδή* $\lambda\omega_\kappa > 0$ *θα έχω*:

$$\begin{Bmatrix} 3\omega_i - 21 > 0 \\ \omega_\kappa \in \Omega = \{1,2,\bullet\bullet\bullet,9\} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 3\omega_i > 21 \\ \omega_i \in \Omega = \{1,2,\bullet\bullet\bullet,9\} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \omega_i > \dfrac{21}{3} \\ \omega_i \in \Omega = \{1,2,\bullet\bullet\bullet,9\} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} \omega_i > 7 \\ \omega_i \in \Omega = \{1,2,\bullet\bullet\bullet,9\} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \omega_i = 8 \text{ ή } \omega_i = 9$$

<u>Θ*α εξετάσω αν όντως το* ω_i *μπορεί να πάρει τις τιμές* 8 *ή* 9</u>

Α*ν* $\omega_i = 8$ *θα έχω*:

$\lambda\omega_\kappa = 3\omega_i - 21 \Leftrightarrow \lambda\omega_\kappa = 3\bullet 8 - 21 \Leftrightarrow \lambda\omega_\kappa = 3$

Ε*πειδή* 3 *είναι πρώτος αριθμός* $\lambda\omega_\kappa = 3, \lambda, \omega_\kappa \in \mathbb{N}^*, \lambda \geq 2$ *θα έχω*:

$\lambda = 3, \omega_\kappa = 1$ (Δ*εκτές*)

Α*ν* $\omega_i = 9$ *θα έχω*:

$\lambda\omega_\kappa = 3\omega_i - 21 \Leftrightarrow \lambda\omega_\kappa = 3\bullet 9 - 21 \Leftrightarrow \lambda\omega_\kappa = 6$

Ε*πειδή* $\lambda\omega_\kappa = 2\bullet 3, \lambda, \omega_\kappa \in \mathbb{N}^*, \lambda \geq 2$ *θα έχω*:

$\lambda = 2, \omega_\kappa = 3$ *ή* $\lambda = 3, \omega_\kappa = 2$ (Δ*εκτές*)

Σ*υνεπώς το* ω_i *μπορεί να πάρει τις τιμές* 8 *ή* 9.Ο*πότε για το* ω_i *έχω* 2 *ευνοϊκές περιπτώσεις*

$A = \{3\omega_i \in K \,/\, \omega_i \in A\}$

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{2}{9}$$

6.

Ένα ζάρι ρίπτεται δυο φορές.Ν*α υπολογίσθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων*
$A = \{$Τ*ο άθροισμα των δυο όψεων είναι ίσο με* 7$\}$
$B = \{$Η *απόλυτη τιμή της διαφοράς των δυο όψεων είναι* 4$\}$

$\Omega=\{(x,y):x,y\in\{1,2,3,4,5,6\}\}$

$\mathrm{A}=\{(x,y):x,y\in\{1,2,3,4,5,6\},x+y=7\}$

$\underline{\text{Ευνοικές περιπτώσεις για το Α}}$

$$(x,y)\in\mathrm{A}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}x,y\in\{1,2,3,4,5,6\}\\ x+y=7\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}x,y\in\{1,2,3,4,5,6\}\\ y=7-x\end{matrix}\right\}$$

$\underline{\underline{\text{Θα βρώ όλα τα } (x,y)\in\mathrm{A} \text{ με } x\le y}}$

$$\left(\begin{matrix}\text{Αν βρώ όλα τα } (x,y)\in\mathrm{A} \text{ με } x\le y \text{ οι υπόλοιπες λύσεις}\\ \text{θα προκύψουν με αντιμετάθεση των στοιχείων } x,y\end{matrix}\right)$$

$$x\le y\Leftrightarrow x\le 7-x\Leftrightarrow 2x\le 7\Leftrightarrow x\le\frac{7}{2}\Leftrightarrow x\le 3,5\overset{x\in\{1,2,3,4,5,6\}}{\Longleftrightarrow}x\in\{1,2,3\}$$

Αν $x=1$ θα έχω: $y=7-x=7-1=6$

Αν $x=2$ θα έχω: $y=7-2=7-2=5$

Αν $x=3$ θα έχω: $y=7-3=7-4=5$

Οπότε: $\mathrm{A}=\{(1,6),(6,1),(2,4),(4,2),(3,4),(4,3)\}$

Οι ευνοικίες περιπτώσεις πριπτώσεις του Α είναι: $\mathrm{N}(\mathrm{A})=6$

$\underline{\text{Δυνατές περιπτώσεις}}$

$\Omega=\{(x,y):x,y\in\{1,2,3,4,5,6\}\}$

Για την μεταβλητή x οι δυνατές επιλογές είναι 6, για την μεταβλητή y οι δυνατές επιλογές είναι 6 οπότε απο τον πολλαπλασιαστικό, νόμο το πλήθος του δειγματοχώρου είναι $6\bullet 6=6^2$

$$\mathrm{P}(\mathrm{A})=\frac{\mathrm{N}(\mathrm{A})}{\mathrm{N}(\Omega)}=\frac{6}{6^2}=\frac{1}{6}$$

$\mathrm{B}=\{(x,y):x,y\in\{1,2,3,4,5,6\},|y-x|=4\}$

$\underline{\underline{\text{Θα βρώ όλα τα } (x,y)\in\mathrm{B} \text{ με } y\ge x}}$

$$\left(\begin{matrix}\text{Αν βρώ όλα τα } (x,y)\in\mathrm{B} \text{ με } x\le y \text{ οι υπόλοιπες λύσεις}\\ \text{θα προκύψουν με αντιμετάθεση των στοιχείων } x,y\end{matrix}\right)$$

$y\ge x\Leftrightarrow y-x\ge 0\Leftrightarrow|y-x|=y-x$

$$\left\{\begin{array}{l}(x,y)\in \mathrm{B}\\ y\geq x\\ x,y\in\{1,2,3,4,5,6\}\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y-x=4\\ y\geq x\\ x,y\in\{1,2,3,4,5,6\}\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=4+x\\ y\geq x\\ x,y\in\{1,2,3,4,5,6\}\end{array}\right\}$$

$$y\leq 6\Leftrightarrow 4+x\leq 6\Leftrightarrow x\leq 2\overset{x\in\{1,2,3,4,5,6\}}{\Longleftrightarrow} x\in\{1,2\}$$

$\mathrm{A}\nu\ x=1\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega: y=4+x=4+1=5$

$\mathrm{A}\nu\ x=2\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega: y=4+x=4+2=6$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon: \mathrm{B}=\{(1,5),(5,1),(2,6,),(6,2)\}$

$$\mathrm{P}(\mathrm{B})=\frac{\mathrm{N}(\mathrm{B})}{\mathrm{N}(\Omega)}=\frac{4:2}{6:2}=\frac{2}{3}$$

7.

Ένα μικρό παιδί παίζει με τρείς κύβους που έχουν τα γράμματα Η, Σ, Τ (*σε κάθε κύβο έχει σημειωθεί μόνο ένα απο τα τρία γράμματα*)

(Ι) Π*όσες και ποιές διαφορετικές λέξεις* (*οι ποιοι πολλές χωρίς νοήμα*) *μπορεί να φτιάξει ένα παιδί χρησιμοποιώντας τον κάθε κύβο ακριβώς μια φορά*

(ΙΙ) Α*ν η τοποθέτηση των τριών κύβων στη σειρά γίνεται εντελώς τυχαία,*

(II_{α}) *ποιά η πιθανότητα η λέξη που θα σχημαστιστεί να αρχίζει απο* Τ

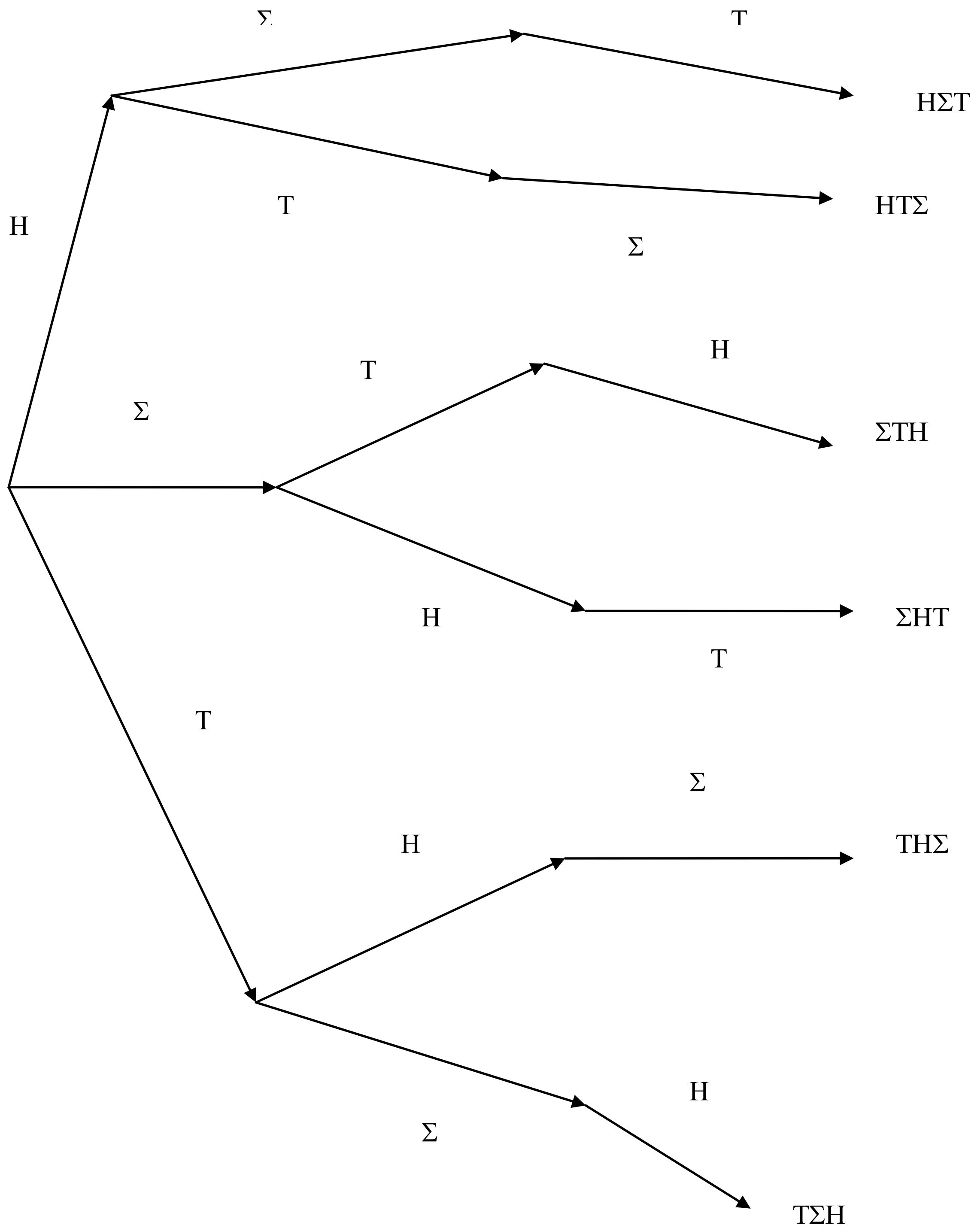
(II_{β}) *ποιά η πιθανότητα η λέξη που θα σχημαστιστεί να έχει νόημα*

(Ι) Τ*ο παιδί θα χρησιμοποιήσει κάθενα γράμματα* Η, Σ, Τ *μια φορά.*

Ο*πότε οι δυνατοί τρόποι είναι*:

ΗΣΤ, ΗΤΣ, ΣΗΤ, ΣΤΗ, ΤΗΣ, ΤΣΗ

Ο*πότε οι δυνατοί τρόποι είναι σε πλήθος* 6


Σ
Τ
ΗΣΤ
Η
Τ
ΗΤΣ
Σ
Η
Τ
Σ
ΣΤΗ
Η
ΣΗΤ
Τ
Τ
Σ
Η
ΤΗΣ
Η
Σ
ΤΣΗ

Οι *λέξεις που θα φτιάξει το μικρό παιδί αποτελούν τα στοιχεία του δειγματοχώρου* Ω

$\Omega = \{\text{ΗΣΤ}, \text{ΗΤΣ}, \text{ΣΤΗ}, \text{ΣΗΤ}, \text{ΤΗΣ}, \text{ΤΣΗ}\}$

$(\text{II})\ \text{A} = \{\text{Η } \textit{λέξη που θα σχηματιστεί να αρχίζει απο } \text{Τ}\} =$

$= \{\text{ΤΗΣ}, \text{ΤΣΗ}\}$

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$\text{B} = \{\text{Η } \textit{λέξη που θα σχηματιστεί έχει νόημα}\} = \{\text{ΣΤΗ}, \text{ΤΗΣ}\}$

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

8.

<u>Το *προβλημα του Γαλιλαίου*</u>

Ας *θεωρήσουμε το τυχαίο πείραμα της ρίψης τριών κύβων και τα ενδεχόμενα* A *και* B *όπως το άθροισμα των ενδείξεων να είναι* 9 *και* 10 *αντίστοιχα.Ένας παρατηρητικός φίλος του Γαλιλαίου διέκρινε ότι η συχνότητα εμφάνισης του ενδεχομένου* A *είναι μικρότερη απο εκείνη του* B.Τ*ούτο δεν μπορούσε να εξηγήσει σκεπτόμενος ότι καθένα απο τα ενδεχόμενα* A *και* B *περιέχει* 6 *δειγματικά σημεία επειδή* $1+2+6=1+3+5=1+4+4=2+2+5=2+3+4=3+3+3=9$ *και* $1+3+6=1+4+5=2+2+6=2+3+5=2+4+4=3+3+4=10$

Ο Γ*αλιλαίος στον οποίο απευθύνθηκε υπολόγισε ορθά τις πιθανότητες* $P(A)$ *και* $P(B)$ *απο προέκυψε οτι* $P(A) < P(B)$.

Ν*α υπολογιστούν οι πιθανότητες* $P(A)$ *και* $P(B)$

Ο $\delta\varepsilon\iota\gamma\mu\alpha\tau o\chi\acute{\omega}\rho o\varsigma\ \tau o\upsilon\ \pi\varepsilon\iota\rho\acute{\alpha}\mu\alpha\tau o\varsigma\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota$:

$\Omega = \{(x,y,z) : x,y,z \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$

$\Gamma\iota\alpha\ \tau\eta\nu\ \mu\varepsilon\tau\alpha\beta\lambda\eta\tau\acute{\eta}\ x\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ 6-\varepsilon\pi\iota\lambda o\gamma\acute{\varepsilon}\varsigma$

$\Gamma\iota\alpha\ \tau\eta\nu\ \mu\varepsilon\tau\alpha\beta\lambda\eta\tau\acute{\eta}\ y\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ 6-\varepsilon\pi\iota\lambda o\gamma\acute{\varepsilon}\varsigma$

$\Gamma\iota\alpha\ \tau\eta\nu\ \mu\varepsilon\tau\alpha\beta\lambda\eta\tau\acute{\eta}\ z\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ 6-\varepsilon\pi\iota\lambda o\gamma\acute{\varepsilon}\varsigma$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \gamma\iota\alpha\ \tau\eta\nu\ \delta\iota\alpha\tau\varepsilon\tau\alpha\gamma\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta\ \tau\rho\iota\acute{\alpha}\delta\alpha\ (x,y,z), x,y,z \in \{1,2,3,4,5,6\}$

$\acute{\varepsilon}\chi\omega\ 6 \bullet 6 \bullet 6 = 6^3\ \varepsilon\pi\iota\lambda o\gamma\acute{\varepsilon}\varsigma$

$\mathrm{A} = \{\mathrm{T}o\ \acute{\alpha}\theta\rho o\iota\sigma\mu\alpha\ \tau\eta\nu\ \varepsilon\nu\delta\varepsilon\acute{\iota}\xi\varepsilon\omega\nu\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ 9\} =$

$\{(x,y,z) : x,y,z \in \{1,2,3,4,5,6\}, x+y+z=9\}$

$\mathrm{A} = \{(x,y,z) : x,y,z \in \{1,2,\bullet\bullet\bullet,6\}, x+y+z=9\}$

<u>$\mathrm{E}\upsilon\nu o\iota\kappa\acute{\varepsilon}\varsigma\ \pi\varepsilon\rho\iota\pi\tau\acute{\omega}\sigma\varepsilon\iota\varsigma\ \gamma\iota\alpha\ \tau o\ \mathrm{A}$</u>

$\underline{\underline{\Theta\alpha\ \beta\rho\acute{\omega}\ \acute{o}\lambda\alpha\ \tau\alpha\ (x,y,z) \in \mathrm{A}\ \mu\varepsilon\ x \le y \le z}}$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{A}\nu\ \beta\rho\acute{\omega}\ \acute{o}\lambda\alpha\ \tau\alpha\ (x,y,z) \in \mathrm{A}\ \mu\varepsilon\ x \le y \le z\ o\iota\ \upsilon\pi\acute{o}\lambda o\iota\pi\varepsilon\varsigma\ \lambda\acute{\upsilon}\sigma\varepsilon\iota\varsigma \\ \theta\alpha\ \pi\rho o\kappa\acute{\upsilon}\psi o\upsilon\nu\ \mu\varepsilon\ \mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}\theta\varepsilon\sigma\eta\ \tau\omega\nu\ \sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\acute{\iota}\omega\nu\ \{x,y,z\} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\left.\begin{cases} x \le y \\ x \le z \end{cases}\right\}} (+)$$

$2x \le y+z \Leftrightarrow 3x \le x+y+z \Leftrightarrow 3x \le 9 \Leftrightarrow x \le 3 \Leftrightarrow x \in \{1,2,3\}$

$$\underline{\left.\begin{cases} x \le z \\ y \le z \end{cases}\right\}} (+)$$

$x+y \le 2z \Leftrightarrow x+y+z \le 3z \Leftrightarrow 3z \ge 9 \Leftrightarrow z \ge 3 \Leftrightarrow z \in \{3,4,5,6\}$

<u>$\mathrm{A}\nu\ x=1\ \kappa\alpha\iota\ z=3\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega$:</u>

$y = 9-x-z = 9-1-3 = 5\ (\text{Άτοπο γιατι } y > z)$

<u>$\mathrm{A}\nu\ x=1\ \kappa\alpha\iota\ z=4\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega$:</u>

$y = 9-x-z = 9-1-4 = 4$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \varepsilon\chi\omega\ \tau\eta\nu\ \lambda\acute{\upsilon}\sigma\eta : (x,y,z) = (1,4,4)$

<u>$\mathrm{A}\nu\ x=1\ \kappa\alpha\iota\ z=5\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega$:</u>

$y = 9-x-z = 9-1-5 = 3$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \varepsilon\chi\omega\ \tau\eta\nu\ \lambda\acute{\upsilon}\sigma\eta : (x,y,z) = (1,3,5)$

$\underline{\text{Α}\nu\ x=1\,\kappa\alpha\iota\ z=6\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:}$

$y=9-x-z=9-1-6=2$

$\text{Ο}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \varepsilon\chi\omega\ \tau\eta\nu\ \lambda\acute{\upsilon}\sigma\eta:(x,y,z)=(1,2,6)$

$\underline{\text{Α}\nu\ x=2\ \kappa\alpha\iota\ z=3\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:}$

$y=9-x-z=9-2-3=4(\text{Ά}\tau o\pi o\ \gamma\iota\alpha\tau\iota\ y>z)$

$\underline{\text{Α}\nu\ x=2\ \kappa\alpha\iota\ z=4\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:}$

$y=9-x-z=9-2-4=3$

$\text{Ο}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \varepsilon\chi\omega\ \tau\eta\nu\ \lambda\acute{\upsilon}\sigma\eta:(x,y,z)=(2,3,4)$

$\underline{\text{Α}\nu\ x=2\ \kappa\alpha\iota\ z=5\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:}$

$y=9-x-z=9-2-5=2$

$\text{Ο}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \varepsilon\chi\omega\ \tau\eta\nu\ \lambda\acute{\upsilon}\sigma\eta:(x,y,z)=(2,2,5)$

$\underline{\text{Α}\nu\ x=2\ \kappa\alpha\iota\ z=6\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:}$

$y=9-x-z=9-2-6=1(\text{Ά}\tau o\pi o\ \gamma\iota\alpha\tau\iota\ x>y)$

$\underline{\text{Α}\nu\ x=3\,\kappa\alpha\iota\ z=3\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:}$

$y=9-x-z=9-3-3=3$

$\text{Ο}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \varepsilon\chi\omega\ \tau\eta\nu\ \lambda\acute{\upsilon}\sigma\eta:(x,y,z)=(3,3,3)$

$\underline{\text{Α}\nu\ x=3\,\kappa\alpha\iota\ z=4\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:}$

$y=9-x-z=9-3-4=2(\text{Ά}\tau o\pi o\ \gamma\iota\alpha\tau\iota\ x>y)$

$\underline{\text{Α}\nu\ x=3\,\kappa\alpha\iota\ z=5\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:}$

$y=9-x-z=9-3-5=1(\text{Ά}\tau o\pi o\ \gamma\iota\alpha\tau\iota\ x>y)$

$\underline{\text{Α}\nu\ x=3\,\kappa\alpha\iota\ z=6\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:}$

$y=9-x-z=9-3-6=1(\text{Ά}\tau o\pi o\ \gamma\iota\alpha\tau\iota\ y>0)$

$\Sigma\tau\eta\nu\ \delta\iota\alpha\tau\varepsilon\tau\alpha\gamma\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta\ \tau\rho\iota\acute{\alpha}\delta\alpha\,(1,4,4)\,\delta\varepsilon\nu\ \alpha\nu\tau\iota\sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\acute{\iota}\ \mu\iota\alpha\ \varepsilon\pi\iota\lambda o\gamma\acute{\eta}\ \alpha\lambda\lambda\acute{\alpha}$
$\tau\iota\varsigma\ \varepsilon\pi\iota\lambda o\gamma\acute{\varepsilon}\varsigma\ (1,4,4),(4,1,4),(4,4,1)\ \delta\eta\lambda.\,3-\varepsilon\pi\iota\lambda o\gamma\acute{\varepsilon}\varsigma$

$\Sigma\tau\eta\nu\ \delta\iota\alpha\tau\varepsilon\tau\alpha\gamma\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta\ \tau\rho\iota\acute{\alpha}\delta\alpha\,(1,3,5)\,\delta\varepsilon\nu\ \alpha\nu\tau\iota\sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\acute{\iota}\ \mu\iota\alpha\ \varepsilon\pi\iota\lambda o\gamma\acute{\eta}\ \alpha\lambda\lambda\acute{\alpha}$
$o\iota\ \varepsilon\pi\iota\lambda o\gamma\acute{\varepsilon}\varsigma\ (1,3,5),(1,5,3),(3,1,5),(3,5,1)(5,1,3),(5,3,1)\ \delta\eta\lambda.\,6-\varepsilon\pi\iota\lambda o\gamma\acute{\varepsilon}\varsigma$

$\Sigma\tau\eta\nu\ \delta\iota\alpha\tau\varepsilon\tau\alpha\gamma\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta\ \tau\rho\iota\acute{\alpha}\delta\alpha\left(1,2,6\right)\delta\varepsilon\nu\ \alpha\nu\tau\iota\sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\acute{\iota}\ \mu\iota\alpha\ \varepsilon\pi\iota\lambda o\gamma\acute{\eta}\ \alpha\lambda\lambda\acute{\alpha}$

$o\iota\ \varepsilon\pi\iota\lambda o\gamma\acute{\varepsilon}\varsigma\ \left(1,2,6\right),\left(1,6,2\right),\left(2,1,6\right),\left(2,6,1\right),\left(6,1,2\right),\left(6,2,1\right)\delta\eta\lambda.$

$6-\varepsilon\pi\iota\lambda o\gamma\acute{\varepsilon}\varsigma$

$\Sigma\tau\eta\nu\ \delta\iota\alpha\tau\varepsilon\tau\alpha\gamma\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta\ \tau\rho\iota\acute{\alpha}\delta\alpha\left(2,3,4\right)\delta\varepsilon\nu\ \alpha\nu\tau\iota\sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\acute{\iota}\ \mu\iota\alpha\ \varepsilon\pi\iota\lambda o\gamma\acute{\eta}\ \alpha\lambda\lambda\acute{\alpha}$

$o\iota\ \varepsilon\pi\iota\lambda o\gamma\acute{\varepsilon}\varsigma\ \left(2,3,4\right),\left(2,4,3\right),\left(3,2,4\right),\left(3,4,2\right),\left(4,3,2\right),\left(4,2,3\right)\delta\eta\lambda.$

$6-\varepsilon\pi\iota\lambda o\gamma\acute{\varepsilon}\varsigma$

$\Sigma\tau\eta\nu\ \delta\iota\alpha\tau\varepsilon\tau\alpha\gamma\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta\ \tau\rho\iota\acute{\alpha}\delta\alpha\ \left(2,2,5\right)\delta\varepsilon\nu\ \alpha\nu\tau\iota\sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\acute{\iota}\ \mu\iota\alpha\ \varepsilon\pi\iota\lambda o\gamma\acute{\eta}\ \alpha\lambda\lambda\acute{\alpha}$

$o\iota\ \varepsilon\pi\iota\lambda o\gamma\acute{\varepsilon}\varsigma\ \left(2,2,5\right),\left(2,5,2\right),\left(5,2,2\right)\delta\eta\lambda.\,3-\varepsilon\pi\iota\lambda o\gamma\acute{\varepsilon}\varsigma$

$\Sigma\tau\eta\nu\ \delta\iota\alpha\tau\varepsilon\tau\alpha\gamma\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta\ \tau\rho\iota\acute{\alpha}\delta\alpha\ \left(3,3,3\right)\alpha\nu\tau\iota\sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\acute{\iota}\ \mu\iota\alpha\ \varepsilon\pi\iota\lambda o\gamma\acute{\eta}$

$\acute{A}\rho\alpha\ o\iota\ \varepsilon\upsilon\nu o\iota\kappa\acute{\varepsilon}\varsigma\ \pi\varepsilon\rho\iota\pi\tau\acute{\omega}\sigma\varepsilon\iota\varsigma\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota:$

$2\bullet 3+3\bullet 6+1=6+18+1=25$

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{A}\right)=\frac{\mathrm{N}\left(\mathrm{A}\right)}{\mathrm{N}\left(\Omega\right)}=\frac{25}{6^3}$$

$\mathrm{B}=\left\{\mathrm{T}o\ \acute{\alpha}\theta\rho o\iota\sigma\mu\alpha\ \tau\eta\nu\ \varepsilon\nu\delta\varepsilon\acute{\iota}\xi\varepsilon\omega\nu\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\,10\right\}=$

$\left\{\left(x,y,z\right):x,y,z\in\left\{1,2,3,4,5,6\right\},x+y+z=10\right\}$

$\mathrm{A}=\left\{\left(x,y,z\right):x,y,z\in\left\{1,2,\bullet\bullet\bullet,6\right\},x+y+z=9\right\}$

$\underline{\mathrm{E}\upsilon\nu o\iota\kappa\acute{\varepsilon}\varsigma\ \pi\varepsilon\rho\iota\pi\tau\acute{\omega}\sigma\varepsilon\iota\varsigma\ \gamma\iota\alpha\ \tau o\ \mathrm{A}}$

$\underline{\underline{\Theta\alpha\ \beta\rho\acute{\omega}\ \acute{o}\lambda\alpha\ \tau\alpha\ \left(x,y,z\right)\in\mathrm{A}\ \mu\varepsilon\ x\le y\le z}}$

$$\begin{pmatrix}\mathrm{A}\nu\ \beta\rho\acute{\omega}\ \acute{o}\lambda\alpha\ \tau\alpha\ \left(x,y,z\right)\in\mathrm{A}\ \mu\varepsilon\ x\le y\le z\ o\iota\ \upsilon\pi\acute{o}\lambda o\iota\pi\varepsilon\varsigma\ \lambda\acute{\upsilon}\sigma\varepsilon\iota\varsigma\\ \theta\alpha\ \pi\rho o\kappa\acute{\upsilon}\psi o\upsilon\nu\ \mu\varepsilon\ \mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}\theta\varepsilon\sigma\eta\ \tau\omega\nu\ \sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\acute{\iota}\omega\nu\ \left\{x,y,z\right\}\end{pmatrix}$$

$$\underline{\left.\begin{cases}x\le y\\ x\le z\end{cases}\right\}}\left(+\right)$$

$$2x\le y+z\Leftrightarrow 3x\le x+y+z\Leftrightarrow 3x\le 10\Leftrightarrow x\le\frac{10}{3}\Leftrightarrow x\in\left\{1,2,3\right\}$$

$$\underline{\left.\begin{cases}x\le z\\ y\le z\end{cases}\right\}}\left(+\right)$$

$$x+y\le 2z\Leftrightarrow x+y+z\le 3z\Leftrightarrow 3z\ge 10\Leftrightarrow z\ge\frac{10}{3}\Leftrightarrow z\in\left\{4,5,6\right\}$$

$\underline{\mathrm{A}\nu\ x = 1\ \kappa\alpha\iota\ z = 4\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:}$

$y = 10 - x - z = 10 - 1 - 4 = 5\left(\acute{A}\tau o\pi o\ \gamma\iota\alpha\tau\iota\ y > z\right)$

$\underline{\mathrm{A}\nu\ x = 1\ \kappa\alpha\iota\ z = 5\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:}$

$y = 10 - x - z = 10 - 1 - 5 = 4$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \varepsilon\chi\omega\ \tau\eta\nu\ \lambda\acute{\upsilon}\sigma\eta:(x, y, z) = (1, 4, 5)$

$\underline{\mathrm{A}\nu\ x = 1\ \kappa\alpha\iota\ z = 6\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:}$

$y = 10 - x - z = 10 - 1 - 6 = 4$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \varepsilon\chi\omega\ \tau\eta\nu\ \lambda\acute{\upsilon}\sigma\eta:(x, y, z) = (1, 3, 6)$

$\underline{\mathrm{A}\nu\ x = 2\ \kappa\alpha\iota\ z = 4\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:}$

$y = 10 - x - z = 10 - 2 - 4 = 4$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \varepsilon\chi\omega\ \tau\eta\nu\ \lambda\acute{\upsilon}\sigma\eta:(x, y, z) = (2, 4, 4)$

$\underline{\mathrm{A}\nu\ x = 2\ \kappa\alpha\iota\ z = 5\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:}$

$y = 10 - x - z = 10 - 2 - 5 = 3$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \varepsilon\chi\omega\ \tau\eta\nu\ \lambda\acute{\upsilon}\sigma\eta:(x, y, z) = (2, 3, 5)$

$\underline{\mathrm{A}\nu\ x = 2\ \kappa\alpha\iota\ z = 6\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:}$

$y = 10 - x - z = 10 - 2 - 6 = 2$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \varepsilon\chi\omega\ \tau\eta\nu\ \lambda\acute{\upsilon}\sigma\eta:(x, y, z) = (2, 2, 5)$

$\underline{\mathrm{A}\nu\ x = 3\ \kappa\alpha\iota\ z = 4\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:}$

$y = 10 - x - z = 10 - 3 - 4 = 3$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \varepsilon\chi\omega\ \tau\eta\nu\ \lambda\acute{\upsilon}\sigma\eta:(x, y, z) = (3, 3, 4)$

$\underline{\mathrm{A}\nu\ x = 3\ \kappa\alpha\iota\ z = 5\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:}$

$y = 10 - x - z = 10 - 3 - 5 = 2\left(\acute{A}\tau o\pi o\ \gamma\iota\alpha\tau\iota\ x > y\right)$

$\underline{\mathrm{A}\nu\ x = 3\ \kappa\alpha\iota\ z = 6\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:}$

$y = 10 - x - z = 10 - 3 - 6 = 1\left(\acute{A}\tau o\pi o\ \gamma\iota\alpha\tau\iota\ x > y\right)$

$\Sigma\tau\eta\nu\ \delta\iota\alpha\tau\varepsilon\tau\alpha\gamma\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta\ \tau\rho\iota\acute{\alpha}\delta\alpha\ (1,4,5)\ \delta\varepsilon\nu\ \alpha\nu\tau\iota\sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\acute{\iota}\ \mu\iota\alpha\ \varepsilon\pi\iota\lambda o\gamma\acute{\eta}$

$\alpha\lambda\lambda\acute{\alpha}\ o\iota\ \varepsilon\pi\iota\lambda o\gamma\acute{\varepsilon}\varsigma\ (1,4,5),(1,5,4),(4,1,5),(4,5,1),(5,1,4)(5,4,1)$

$\delta\eta\lambda.\ 6-\varepsilon\pi\iota\lambda o\gamma\acute{\varepsilon}\varsigma$

$\Sigma\tau\eta\nu\ \delta\iota\alpha\tau\varepsilon\tau\alpha\gamma\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta\ \tau\rho\iota\acute{\alpha}\delta\alpha\ (1,3,6)\ \delta\varepsilon\nu\ \alpha\nu\tau\iota\sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\acute{\iota}\ \mu\iota\alpha\ \varepsilon\pi\iota\lambda o\gamma\acute{\eta}\ \alpha\lambda\lambda\acute{\alpha}$

$o\iota\ \varepsilon\pi\iota\lambda o\gamma\acute{\varepsilon}\varsigma\ (1,3,6),(1,6,3),(3,1,6),(3,6,1),(6,1,3),(6,3,1)\ \delta\eta\lambda.\ \varepsilon\chi\omega$

$6-\varepsilon\pi\iota\lambda o\gamma\acute{\varepsilon}\varsigma$

$\Sigma\tau\eta\nu\ \delta\iota\alpha\tau\varepsilon\tau\alpha\gamma\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta\ \tau\rho\iota\acute{\alpha}\delta\alpha\ (2,4,4)\ \delta\varepsilon\nu\ \alpha\nu\tau\iota\sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\acute{\iota}\ \mu\iota\alpha\ \varepsilon\pi\iota\lambda o\gamma\acute{\eta}\ \alpha\lambda\lambda\acute{\alpha}$

$o\iota\ \varepsilon\pi\iota\lambda o\gamma\acute{\varepsilon}\varsigma\ (2,4,4),(4,2,4),(4,4,2)\ \delta\eta\lambda.\ \varepsilon\chi\omega\ 6-\varepsilon\pi\iota\lambda o\gamma\acute{\varepsilon}\varsigma$

$\Sigma\tau\eta\nu\ \delta\iota\alpha\tau\varepsilon\tau\alpha\gamma\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta\ \tau\rho\iota\acute{\alpha}\delta\alpha\ (2,3,5)\ \delta\varepsilon\nu\ \alpha\nu\tau\iota\sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\acute{\iota}\ \mu\iota\alpha\ \varepsilon\pi\iota\lambda o\gamma\acute{\eta}$

$\alpha\lambda\lambda\acute{\alpha}\ o\iota\ \varepsilon\pi\iota\lambda o\gamma\acute{\varepsilon}\varsigma\ (2,3,5),(2,5,3),(3,2,5),(3,5,2),(5,2,3),(5,3,2)$

$\delta\eta\lambda.\ 6-\varepsilon\pi\iota\lambda o\gamma\acute{\varepsilon}\varsigma$

$\Sigma\tau\eta\nu\ \delta\iota\alpha\tau\varepsilon\tau\alpha\gamma\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta\ \tau\rho\iota\acute{\alpha}\delta\alpha\ (2,2,5)\ \delta\varepsilon\nu\ \alpha\nu\tau\iota\sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\acute{\iota}\ \mu\iota\alpha\ \varepsilon\pi\iota\lambda o\gamma\acute{\eta}\ \alpha\lambda\lambda\acute{\alpha}$

$o\iota\ \varepsilon\pi\iota\lambda o\gamma\acute{\varepsilon}\varsigma\ (2,2,5),(2,5,2),(2,2,5)\ \delta\eta\lambda.\ 3-\varepsilon\pi\iota\lambda o\gamma\acute{\varepsilon}\varsigma$

$\Sigma\tau\eta\nu\ \delta\iota\alpha\tau\varepsilon\tau\alpha\gamma\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta\ \tau\rho\iota\acute{\alpha}\delta\alpha\ (3,3,4)\ \delta\varepsilon\nu\ \alpha\nu\tau\iota\sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\acute{\iota}\ \mu\iota\alpha\ \varepsilon\pi\iota\lambda o\gamma\acute{\eta}\ \alpha\lambda\lambda\acute{\alpha}$

$o\iota\ \varepsilon\pi\iota\lambda o\gamma\acute{\varepsilon}\varsigma\ (3,3,4),(3,4,3),(3,3,4)\ \delta\eta\lambda.\ 3-\varepsilon\pi\iota\lambda o\gamma\acute{\varepsilon}\varsigma$

$\acute{A}\rho\alpha\ o\iota\ \varepsilon\upsilon\nu o\iota\kappa\acute{\varepsilon}\varsigma\ \pi\varepsilon\rho\iota\pi\tau\acute{\omega}\sigma\varepsilon\iota\varsigma\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota:$

$3\bullet 6+3\bullet 3=27$

$$P(B)=\frac{N(B)}{N(\Omega)}=\frac{27}{6^3}$$

$$O\pi\acute{o}\tau\varepsilon: P(A)<P(B)\left(P(A)=\frac{25}{6^3}, P(B)=\frac{27}{6^3}\right)$$

9.

$A\nu\ A,B\ \delta\upsilon o\ \varepsilon\nu\delta\varepsilon\chi\acute{o}\mu\varepsilon\nu\alpha\ \varepsilon\nu\acute{o}\varsigma\ \delta\varepsilon\iota\gamma\mu\alpha\tau o\chi\acute{\omega}\rho o\upsilon\ \Omega\ \mu\varepsilon\ \iota\sigma o\pi\iota\theta\alpha\nu\acute{\alpha}\ \alpha\pi\lambda\acute{\alpha}$ $\varepsilon\nu\delta\varepsilon\chi\acute{o}\mu\varepsilon\nu\alpha.\ A\nu\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ A\neq\varnothing, B\neq\varnothing\ \kappa\alpha\iota\ A\subseteq B\ \nu\alpha\ \alpha\pi o\delta\varepsilon\acute{\iota}\xi\varepsilon\tau\varepsilon\ o\tau\iota\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota:$

$$\frac{P(A)}{P(B)}\leq\left(\frac{3-P(B)}{3-P(A)}\right)^2$$

$(\Theta\varepsilon\mu\alpha\ \Delta 5\ \tau o\ 2012)$

$$\frac{\mathrm{P}(\mathrm{A})}{\mathrm{P}(\mathrm{B})} \le \left(\frac{3-\mathrm{P}(\mathrm{B})}{3-\mathrm{P}(\mathrm{A})}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{P}(\mathrm{A})}{\mathrm{P}(\mathrm{B})} \le \frac{\left(3-\mathrm{P}(\mathrm{B})\right)^2}{\left(3-\mathrm{P}(\mathrm{A})\right)^2} \overset{\substack{3>\mathrm{P}(\mathrm{A})\Leftrightarrow 3-\mathrm{P}(\mathrm{A})>0\Rightarrow\left(3-\mathrm{P}(\mathrm{A})\right)^2>0 \\ \mathrm{P}(\mathrm{B})>0}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left(3-\mathrm{P}(\mathrm{A})\right)^2 \cancel{\mathrm{P}(\mathrm{B})} \frac{\mathrm{P}(\mathrm{A})}{\cancel{\mathrm{P}(\mathrm{B})}} \le \cancel{\left(3-\mathrm{P}(\mathrm{A})\right)^2} \mathrm{P}(\mathrm{B}) \frac{\left(3-\mathrm{P}(\mathrm{B})\right)^2}{\cancel{\left(3-\mathrm{P}(\mathrm{A})\right)^2}} \Leftrightarrow$$

$$\left(3-\mathrm{P}(\mathrm{A})\right)^2 \mathrm{P}(\mathrm{A}) \le \left(3-\mathrm{P}(\mathrm{B})\right)^2 \mathrm{P}(\mathrm{B})$$

Θεωρώ την συνάρτηση $f(x)=(3-x)^2 x,\ x\in[0,1]$

$$f'(x)=\left[(3-x)^2 x\right]' \overset{\left(F(x)G(x)\right)'=F'(x)G(x)+F(x)G'(x)}{=} \left[(3-x)^2\right]' x+(3-x)^2 (x)' \overset{\substack{\left(F^a(x)\right)'=aF^{a-1}(x)F'(x) \\ (x)'=1}}{=}$$

$$=2(3-x)(3-x)'+(3-x)^2\bullet 1 \overset{\substack{\left(F(x)-G(x)\right)'=F'(x)-G'(x) \\ (c)'=0,c:\Sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha} \\ (x)'=1}}{=} 2(3-x)\left[(3)'-(x)'\right]+(3-x)^2$$

$$2(3-x)+(3-x)^2=(3-x)(2+3-x)=(3-x)(5-x)$$

Οπότε $: f'(x)=(3-x)(5-x),\ x\in[0,1]$

$$x\in[0,1]\Rightarrow\begin{Bmatrix}5>1\ge x\\3>1\ge x\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}5>x\\3>x\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}5-x>0\\3-x>0\end{Bmatrix}\Rightarrow(5-x)(3-x)>0\Rightarrow$$

Επειδή $f'(x)>0$ *για κάθε* $x\in[0,1]$ *έχω* $f \underset{\wedge}{\uparrow} [0,1]$

$$\mathrm{A}\subseteq\mathrm{B}\Rightarrow\mathrm{P}(\mathrm{A})\subseteq\mathrm{P}(\mathrm{B}) \overset{\substack{f\uparrow[0,1] \\ \mathrm{P}(\mathrm{A}),\mathrm{P}(\mathrm{B})\in[0,1]}}{\Longrightarrow} f\left(\mathrm{P}(\mathrm{A})\right)\le f\left(\mathrm{P}(\mathrm{B})\right)\Rightarrow$$

$$\left(3-\mathrm{P}(\mathrm{A})\right)^2 \mathrm{P}(\mathrm{A}) \le \left(3-\mathrm{P}(\mathrm{B})\right)^2 \mathrm{P}(\mathrm{B}) \Leftrightarrow \frac{\mathrm{P}(\mathrm{A})}{\mathrm{P}(\mathrm{B})} \le \left(\frac{3-\mathrm{P}(\mathrm{B})}{3-\mathrm{P}(\mathrm{A})}\right)^2$$

10.

$\Gamma \iota \alpha\ \tau \alpha\ \varepsilon \nu \delta \varepsilon \chi \acute{o} \mu \varepsilon \nu \alpha$ $\mathrm{A},\mathrm{B},\Gamma$ $\tau o \upsilon\ \delta \varepsilon \iota \gamma \mu \alpha \tau o \chi \acute{\omega} \rho o \upsilon$ Ω $\iota \sigma \chi \acute{\upsilon} \varepsilon \iota$:

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{B}) \\ \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \Gamma) = \mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\Gamma) \\ \mathrm{P}(\mathrm{B} \cap \Gamma) = \mathrm{P}(\mathrm{B})\mathrm{P}(\Gamma) \\ \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \Gamma) = \mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{B})\mathrm{P}(\Gamma) \end{array}\right\}$$

$\mathrm{A}\nu$ $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \alpha, \alpha \in (0,1) \mathrm{P}\left(\mathrm{A}^c \cap \mathrm{B}^c \cap \Gamma^c\right) = \beta, \mathrm{P}\left(\mathrm{A}^c \cup \mathrm{B}^c \cup \Gamma^c\right) = \gamma,$

$\mathrm{P}\left(\mathrm{A}^c \cap \mathrm{B}^c \cap \Gamma\right) = x,$ $\nu\alpha\ \alpha\delta\varepsilon\acute{\iota}\xi\varepsilon\tau\varepsilon\ o\tau\iota$:

$$(\mathrm{I})\mathrm{P}(\Gamma) = \frac{x}{x+\beta}$$

$$(\mathrm{II})\mathrm{P}(\mathrm{B}) = \frac{(1-\gamma)(x+\beta)}{\alpha x}$$

$$(\mathrm{III})\alpha x^2 + \left[a\beta - (1-\alpha)(\alpha+\gamma-1)\right]x + \beta(1-\alpha)(1-\gamma) = 0$$

$$(\mathrm{IV})\gamma \geq \frac{(1-\alpha)^2 + \alpha\beta}{1-\alpha}$$

$$(\mathrm{I})\beta = \mathrm{P}\left(\mathrm{A}^c \cap \mathrm{B}^c \cap \Gamma^c\right) = \mathrm{P}\left[(\mathrm{A} \cup \mathrm{B} \cup \Gamma)^c\right] = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B} \cup \Gamma) =$$

$$= 1 - \mathrm{P}\left[(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cup \Gamma\right] = 1 - \left\{\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) + \mathrm{P}(\Gamma) - \mathrm{P}\left[(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cap \Gamma\right]\right\} =$$

$$1 - \mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) - \mathrm{P}(\Gamma) + \mathrm{P}\left[(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cap \Gamma\right] =$$

$$1 - \left[\mathrm{P}(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\mathrm{B}) - \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})\right] - \mathrm{P}(\Gamma) + \mathrm{P}\left[(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cap \Gamma\right] =$$

$$\boxed{\mathrm{P}(\mathrm{X} \cup \mathrm{Y}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}) + \mathrm{P}(\mathrm{Y}) - \mathrm{P}(\mathrm{X} \cap \mathrm{Y})}$$

$$1 - \mathrm{P}(\mathrm{A}) - \mathrm{P}(\mathrm{B}) + \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) - \mathrm{P}(\Gamma) + \mathrm{P}\left[(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cap \Gamma\right] \overset{\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{B})}{=}$$

$$1 - \mathrm{P}(\mathrm{A}) - \mathrm{P}(\mathrm{B}) - \mathrm{P}(\Gamma) + \mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{B}) + \mathrm{P}\left[(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cap \Gamma\right]$$

$$\boxed{\beta = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{A}) - \mathrm{P}(\mathrm{B}) - \mathrm{P}(\Gamma) + \mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{B}) + \mathrm{P}\left[(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cap \Gamma\right]}(1)$$

$$Έχω:(A\cup B)\cap\Gamma=(A\cap B)\cup(A\cap\Gamma)$$

$$P\left[(A\cup B)\cap\Gamma\right]=P\left[(A\cap\Gamma)\cup(B\cap\Gamma)\right]=$$

$$P(A\cap\Gamma)+P(B\cap\Gamma)-P\left[(A\cap\Gamma)\cap(B\cap\Gamma)\right]=$$

$$P(A\cap\Gamma)+P(B\cap\Gamma)-P(A\cap B\cap\Gamma)\overset{\substack{P(A\cap\Gamma)=P(A)P(\Gamma),P(B\cap\Gamma)=P(B)P(\Gamma)\\ P(A\cap B\cap\Gamma)=P(A)P(B)P(\Gamma)}}{=}$$

$$P(A)P(\Gamma)+P(B)P(\Gamma)-P(A)P(B)P(\Gamma)$$

$$\boxed{P\left[(A\cup B)\cap\Gamma\right]=P(A)P(\Gamma)+P(B)P(\Gamma)-P(A)P(B)P(\Gamma)}\,(2)$$

$$\beta\overset{(1)}{=}1-P(A)-P(B)-P(\Gamma)+P(A)P(B)+P\left[(A\cup B)\cap\Gamma\right]\overset{(2)}{=}$$

$$1-P(A)-P(B)-P(\Gamma)+P(A)P(B)+P(A)P(\Gamma)+$$

$$P(B)P(\Gamma)-P(A)P(B)P(\Gamma)=$$

$$1-P(A)\ \underbrace{-P(B)+P(A)P(B)}_{Bγάζω\ κοινό\ παράγοντα\ το\ -P(B)}\ \underbrace{-P(\Gamma)+P(B)P(\Gamma)}_{Bγάζω\ κοινό\ παράγοντα\ το\ -P(\Gamma)}\ +$$

$$\underbrace{+P(A)P(\Gamma)-P(A)P(\Gamma)P(B)}_{Bγάζω\ κοινό\ παεάγοντα\ το\ -P(A)P(\Gamma)}=$$

$$=1-P(A)-P(B)\big(1-P(A)\big)-P(\Gamma)\big(1-P(B)\big)+P(A)P(\Gamma)\big(1-P(B)\big)=$$

$$=\underbrace{1\big(1-P(A)\big)-P(B)\big(1-P(A)\big)}_{Bγάζω\ κοινό\ παράγοντα\ το\ 1-P(A)}\underbrace{-P(\Gamma)\big(1-P(B)\big)+P(A)P(\Gamma)\big(1-P(B)\big)}_{Bγάζω\ κοινό\ παράγοντα\ το-\left(1-P(B)\right)P(\Gamma)}=$$

$$=\underbrace{\big(1-P(A)\big)\big(1-P(B)\big)-P(\Gamma)\big(1-P(B)\big)\big(1-P(A)\big)}_{Bγάζω\ κοινό\ παράγοντα\ το\ \left(1-P(B)\right)\left(1-P(A)\right)}=$$

$$=\big(1-P(B)\big)\big(1-P(A)\big)\big(1-P(\Gamma)\big)\overset{P(A)=\alpha}{=}(1-\alpha)\big(1-P(B)\big)\big(1-P(\Gamma)\big)$$

$$\boxed{\beta=(1-\alpha)\big(1-\mathrm{P}(\mathrm{B})\big)\big(1-\mathrm{P}(\Gamma)\big)}\,(3)$$

$$x=\mathrm{P}\left(\mathrm{A}^c\cap\mathrm{B}^c\cap\Gamma\right)=\mathrm{P}\left[\left(\mathrm{A}^c\cap\mathrm{B}^c\right)\cap\Gamma\right]=\mathrm{P}\left[(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})^c\cap\Gamma\right]=$$

$$\boxed{\begin{array}{l}(\mathrm{X}\cup\mathrm{Y})^c=\mathrm{X}^c\cap\mathrm{Y}^c\\ \mathrm{P}\left(\mathrm{X}\cap\mathrm{Y}^c\right)=\mathrm{P}(\mathrm{X})-\mathrm{P}(\mathrm{X}\cap\mathrm{Y})\end{array}}$$

$$\mathrm{P}\left[\Gamma\cap(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})^c\right]=\mathrm{P}(\Gamma)-\mathrm{P}\left[(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})\cap\Gamma\right]=$$

$$=\mathrm{P}(\Gamma)-\mathrm{P}\left[(\mathrm{A}\cap\Gamma)\cup(\mathrm{B}\cap\Gamma)\right]=$$

$$=\mathrm{P}(\Gamma)-\left\{\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\Gamma)+\mathrm{P}(\mathrm{B}\cap\Gamma)-\mathrm{P}\left[(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\cup(\mathrm{A}\cap\Gamma)\right]\right\}=$$

$$=\mathrm{P}(\Gamma)-\left[\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\Gamma)+\mathrm{P}(\mathrm{B}\cap\Gamma)-\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\cap\Gamma)\right]=$$

$$=\mathrm{P}(\Gamma)-\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\Gamma)-\mathrm{P}(\mathrm{B}\cap\Gamma)+\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\cap\Gamma)\overset{\substack{\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\Gamma)=\mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\Gamma),\mathrm{P}(\mathrm{B}\cap\Gamma)=\mathrm{P}(\mathrm{B})\mathrm{P}(\Gamma)\\ \mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\cap\Gamma)=\mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{B})\mathrm{P}(\Gamma)}}{=}$$

$$=\underbrace{\mathrm{P}(\Gamma)-\mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\Gamma)-\mathrm{P}(\mathrm{B})\mathrm{P}(\Gamma)+\mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{B})\mathrm{P}(\Gamma)}_{\text{Βγάζω κοινό παράγοντα το } \mathrm{P}(\Gamma)}=$$

$$=\mathrm{P}(\Gamma)\left[1-\mathrm{P}(\mathrm{A})-\mathrm{P}(\mathrm{B})+\mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{B})\right]=$$

$$=\mathrm{P}(\Gamma)\left[1-\mathrm{P}(\mathrm{A})\underbrace{-\mathrm{P}(\mathrm{B})+\mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{B})}_{\text{Βγάζω κοινό παράγοντα το } -\mathrm{P}(\mathrm{B})}\right]=$$

$$=\mathrm{P}(\Gamma)\left[1-\mathrm{P}(\mathrm{A})-\mathrm{P}(\mathrm{B})\big(1-\mathrm{P}(\mathrm{A})\big)\right]$$

$$=\mathrm{P}(\Gamma)\left[\underbrace{1\big(1-\mathrm{P}(\mathrm{A})\big)-\mathrm{P}(\mathrm{B})\big(1-\mathrm{P}(\mathrm{A})\big)}_{\text{Βγάζω κοινό παράγοντα το } 1-\mathrm{P}(\mathrm{A})}\right]=$$

$$=\mathrm{P}(\Gamma)\big(1-\mathrm{P}(\mathrm{A})\big)\big(1-\mathrm{P}(\mathrm{B})\big)=(1-\alpha)\mathrm{P}(\Gamma)\big(1-\mathrm{P}(\mathrm{B})\big)$$

$\text{Οπότε}: \boxed{x=(1-\alpha)\mathrm{P}(\Gamma)(1-\mathrm{P}(\mathrm{B}))}\,(4)$

$\text{Απο τις σχέσεις } (3),(4) \text{ θα έχω}:$

$$\begin{cases} \beta=(1-\alpha)(1-\mathrm{P}(\mathrm{B}))(1-\mathrm{P}(\Gamma)) \\ x=(1-\alpha)\mathrm{P}(\Gamma)(1-\mathrm{P}(\mathrm{B})) \end{cases} \Rightarrow \frac{\beta}{x}=\frac{\cancel{(1-\alpha)(1-\mathrm{P}(\mathrm{B}))}\,(1-\mathrm{P}(\Gamma))}{\cancel{(1-\alpha)(1-\mathrm{P}(\mathrm{B}))}\mathrm{P}(\Gamma)} \Rightarrow$$

$$\frac{\beta}{x}=\frac{1-\mathrm{P}(\Gamma)}{\mathrm{P}(\Gamma)} \Leftrightarrow \beta\mathrm{P}(\Gamma)=x(1-\mathrm{P}(\Gamma)) \Rightarrow \beta\mathrm{P}(\Gamma)+x\mathrm{P}(\Gamma)=x \Leftrightarrow$$

$$(\beta+x)\mathrm{P}(\Gamma)=x \Leftrightarrow \mathrm{P}(\Gamma)=\frac{x}{\beta+x}(5)$$

$$(\mathrm{II})\,\gamma=\mathrm{P}\left(\mathrm{A}^c \cup \mathrm{B}^c \cup \Gamma^c\right)=\mathrm{P}\left[(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\cap\Gamma)^c\right]=1-\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\cap\Gamma)=$$

$$=1-\mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{B})\mathrm{P}(\Gamma) \overset{\mathrm{P}(\mathrm{A})=\alpha,\mathrm{P}(\Gamma)=\frac{x}{\beta+x}}{=} 1-\frac{\alpha x\mathrm{P}(\mathrm{B})}{\beta+x}$$

$$\text{Έχω}: \gamma=1-\frac{\alpha x\mathrm{P}(\mathrm{B})}{\beta+x} \Leftrightarrow \frac{\alpha x\mathrm{P}(\mathrm{B})}{\beta+x}=1-\gamma \Leftrightarrow \mathrm{P}(\mathrm{B})=\frac{(\beta+x)(1-\gamma)}{\alpha x}(6)$$

$(\mathrm{III})\,\text{Απο τις σχέσεις } (4),(5),(6) \text{ θα έχω}:$

$$x=(1-\alpha)\mathrm{P}(\Gamma)(1-\mathrm{P}(\mathrm{B})) \overset{\mathrm{P}(\mathrm{B})=\frac{(\beta+x)(1-\gamma)}{\alpha x},\mathrm{P}(\Gamma)=\frac{x}{\beta+x}}{\Longleftrightarrow}$$

$$x=(1-\alpha)\frac{x}{\beta+x}\left(1-\frac{(\beta+x)(1-\gamma)}{\alpha x}\right) \Leftrightarrow$$

$$x=(1-\alpha)\frac{x}{\beta+x}\,\frac{\alpha x-\beta+\beta\gamma-x+\gamma x}{\alpha x}$$

$$x=(1-\alpha)\frac{\cancel{x}}{\beta+x}\,\frac{(\alpha+\gamma-1)x-\beta(1-\gamma)}{\alpha\cancel{x}} \Leftrightarrow$$

$$\alpha x(\beta+x)=(1-\alpha)(\alpha+\gamma-1)x-\beta(1-\gamma)(1-\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\alpha x^2+\alpha\beta x-(1-\alpha)(\alpha+\gamma-1)x+\beta(1-\gamma)(1-\alpha)=0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha x^2+\left[\alpha\beta-(1-\alpha)(\alpha+\gamma-1)\right]x+\beta(1-\gamma)(1-\alpha)=0(7)$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Αν } \rho_1, \rho_2 \text{ οι ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης } \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \\ \text{με } \alpha \neq 0 \text{ τότε θα έχω:} \\ \boxed{\rho_1 + \rho_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha}, \rho_1\rho_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha}}\end{array}}$$

Αν x_1, x_2 οι ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης (7) θα έχω:

$$x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{\alpha\beta - (1-\alpha)(\alpha+\gamma-1)}{\alpha} = \frac{(1-\alpha)(\alpha+\gamma-1) - \alpha\beta}{\alpha}$$

Επειδή x_1, x_2 εκφράζουν πιθανότητες θα ισχύει $x_1, x_2 \geq 0$. Οπότε:

$$x_1 + x_2 \geq 0 \Rightarrow \frac{(1-\alpha)(\alpha+\gamma-1) - \alpha\beta}{\alpha} \geq 0 \xRightarrow{\alpha>0} (1-\alpha)\left[-(1-\alpha)+\gamma\right] - \alpha\beta \geq 0$$

$$\Rightarrow -(1-\alpha)^2 + \gamma(1-\alpha) \geq \alpha\beta \Rightarrow \gamma(1-\alpha) \geq -(1-\alpha)^2 + \alpha\beta \Rightarrow$$

$$\gamma \geq \frac{(1-\alpha)^2 + \alpha\beta}{1-\alpha}$$

$$\left(\text{Έχω}: 1 > \alpha \Rightarrow 1-\alpha > 0\right)$$