ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ (Νο2)

ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

$$\mathrm{P}(\mathrm{A})=\frac{\mathrm{E}\upsilon\nu o\iota\kappa\acute{\varepsilon}\varsigma\ \pi\varepsilon\rho\iota\pi\tau\acute{\omega}\sigma\varepsilon\iota\varsigma\ \gamma\iota\alpha\ \tau o\ \gamma\varepsilon\gamma o\nu\acute{o}\varsigma\ \mathrm{A}}{\Delta\upsilon\nu\alpha\tau\acute{\varepsilon}\varsigma\ \pi\varepsilon\rho\iota\pi\tau\acute{\omega}\sigma\varepsilon\iota\varsigma}$$

Έστω ο δειγματοχώρος $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_\nu\}$ *όπου* $\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_\nu$ *είναι στοιχειώδη ενδεχόμενα.*Η P *είναι πιθανότητα όταν* :

$(\mathrm{I})\ 0\le \mathrm{P}(\omega_\kappa)\le 1,\ \kappa=1,2,\dots,\nu$

$(\mathrm{II})\ \mathrm{P}(\omega_1)+\mathrm{P}(\omega_2)+\dots+\mathrm{P}(\omega_\nu)=1$

(III) Αν $\mathrm{A}=\{\omega_{i_1},\omega_{i_2},\dots,\omega_{i_\kappa}\},\ i_1,i_2,\dots,i_\kappa\in\{1,2,\dots,\nu\},\ \kappa\le\nu$

τότε $\mathrm{P}(\mathrm{A})=\mathrm{P}(\omega_{i_1})+\mathrm{P}(\omega_{i_2})+\dots+\mathrm{P}(\omega_{i_\kappa})$

(IV) Αν $\mathrm{A}\subseteq\Omega$ *τότε* $0\le\mathrm{P}(\mathrm{A})\le 1$

$(V)\ \mathrm{P}(\varnothing)=0$

$(V\mathrm{I})\ \mathrm{P}(\Omega)=1$

Τ*α* $\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_\nu$ *καλούνται στοιχειώδη ενδεχόμενα ή γεγονότα*

Γ*εγονός ή ενδεχόμενο είναι κάθε υποσύνολο του* Ω

Δ*υο γεγονότα* Α,Β *είναι ασυμβίβαστα ή ξένα μεταξύ τους όταν* $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}=\varnothing$

Α*ν δυο γεγονότα* Α,Β *είναι ασυμβίβαστα ή ξένα μεταξύ τους τότε ισχύει* : $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=\mathrm{P}(\mathrm{A})+\mathrm{P}(\mathrm{A})$

$\mathrm{P}(\mathrm{A}-\mathrm{B})=\mathrm{P}(\mathrm{A})-\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$

$\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=\mathrm{P}(\mathrm{A})+\mathrm{P}(\mathrm{B})-\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$

Α*ν* $\mathrm{X}\subseteq\mathrm{Y}$ *τότε* $\mathrm{P}(\mathrm{X})\le\mathrm{P}(\mathrm{Y})$

$\mathrm{A}'\cup\mathrm{B}'=(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})'$

$\mathrm{A}'\cap\mathrm{B}'=(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})'$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1.

$\Sigma\varepsilon$ $\acute{\varepsilon}\nu\alpha$ $\kappa o\upsilon\tau\iota$ $\upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi o\upsilon\nu$ α $\acute{\alpha}\sigma\pi\rho\varepsilon\varsigma$, μ $\mu\pi\lambda\acute{\varepsilon}$ $\kappa\alpha\iota$ 8 $\pi\rho\acute{\alpha}\sigma\iota\nu\varepsilon\varsigma$ $\mu\pi\acute{\alpha}\lambda\varepsilon\varsigma$ $\alpha\rho\iota\theta\mu\eta\mu\acute{\varepsilon}\nu\varepsilon\varsigma$ $\alpha\nu\tau\acute{\iota}\sigma\tau o\iota\chi\alpha$ $\alpha\pi o$ τo 1 $\varepsilon\omega\varsigma$ $\kappa\alpha\iota$ α, $\alpha\pi o$ τo 1 $\varepsilon\omega\varsigma$ $\kappa\alpha\iota$ τo μ $\kappa\alpha\iota$ $\alpha\pi o$ τo 1 $\varepsilon\omega\varsigma$ $\kappa\alpha\iota$ τo 8.Αν $\pi\acute{\alpha}\rho o\upsilon\mu\varepsilon$ $\tau\upsilon\chi\alpha\acute{\iota}\alpha$ $\alpha\pi o$ τo $\kappa o\upsilon\tau\acute{\iota}$ $\mu\iota\alpha$ $\mu\pi\acute{\alpha}\lambda\alpha$, $\tau\acute{o}\tau\varepsilon$ η $\pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha$ $\alpha\upsilon\tau\acute{\eta}$ $\nu\alpha$ $\varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota$ $\acute{\alpha}\sigma\pi\rho\eta$ $\varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota$ $\frac{1}{3}$, $\varepsilon\nu\omega$ η $\pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha$ $\nu\alpha$ $\varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota$ $\mu\pi\lambda\acute{\varepsilon}$ $\varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota$ $\frac{1}{2}$.Να $\beta\rho\varepsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}$:

α)Πόσες $\mu\pi\acute{\alpha}\lambda\varepsilon\varsigma$ $\varepsilon\chi\varepsilon\iota$ τo $\kappa o\upsilon\tau\acute{\iota}$

β)Η $\pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha$ $\acute{o}\tau\alpha\nu$ $\pi\acute{\alpha}\rho o\upsilon\mu\varepsilon$ $\mu\iota\alpha$ $\tau\upsilon\chi\alpha\acute{\iota}\alpha$ $\mu\pi\acute{\alpha}\lambda\alpha$ $\alpha\pi o$ τo $\kappa o\upsilon\tau\acute{\iota}$, $\alpha\upsilon\tau\acute{\eta}$ $\nu\alpha$ $\varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota$ $\acute{\alpha}\sigma\pi\rho\eta$ $\acute{\eta}$ $\nu\alpha$ $\varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota$ $\alpha\rho\iota\theta\mu\eta\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta$ $\mu\varepsilon$ $\acute{\alpha}\rho\tau\iota o$ $\alpha\rho\iota\theta\mu\acute{o}$

$\alpha)\mathrm{A}=\{\mathrm{H}\ \mu\pi\acute{\alpha}\lambda\alpha\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \acute{\alpha}\sigma\pi\rho\eta\}$

<u>Ευνοικές περιπτώσεις για το γεγονός Α</u>:

Όταν πάιρνω μια άσπρη μπάλα επειδή οι άσπρες μπάλες είναι α μπορώ να την επιλέξω με α τρόπους

<u>Δυνατές περιπτώσεις</u>:

Όταν πάιρνω μια τυχαία μπάλα επειδή οι συνολικές μπάλες είναι α άσπρες, μ μπλέ και 8 πράσινες μπορώ να την επιλέξω με $\alpha+\mu+8$ *τρόπους*

$$\mathrm{P}(\mathrm{A})=\frac{\text{Ευνοικές περιπτώσεις για το γεγονός Α}}{\text{Δυνατές περιπτώσεις}}\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{3}=\frac{\alpha}{\alpha+\mu+8}\Leftrightarrow\alpha+\mu+8=3\alpha\Leftrightarrow\boxed{2\alpha-\mu=8}\,(1)$$

$\mathrm{B}=\{\mathrm{H}\ \mu\pi\acute{\alpha}\lambda\alpha\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \mu\pi\lambda\acute{\varepsilon}\}$

<u>Ευνοικές περιπτώσεις για το γεγονός Β</u>:

Όταν πάιρνω μια μπλέ μπάλα επειδή οι μπλέ μπάλες είναι μ μπορώ να την επιλέξω με μ τρόπους

<u>Δυνατές περιπτώσεις</u>:

Όταν πάιρνω μια τυχαία μπάλα επειδή οι συνολικές μπάλες είναι α άσπρες, μ μπλέ και 8 πράσινες μπορώ να την επιλέξω με $\alpha+\mu+8$ *τρόπους*

$$\mathrm{P}(\mathrm{B})=\frac{\text{Ευνοικές περιπτώσεις για το γεγονός Β}}{\text{Δυνατές περιπτώσεις}}\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}=\frac{\mu}{\alpha+\mu+8}\Leftrightarrow\alpha+\mu+8=2\mu\Leftrightarrow\boxed{-\alpha+\mu=8}\,(2)$$

$\text{Απο } \textit{τις σχέσεις } (1),(2) \textit{ θα έχω}:$

$$\underline{\left.\begin{cases} 2\alpha - \mu = 8 \\ -\alpha + \mu = 8 \end{cases}\right\}(+)}$$

$$2\alpha - \cancel{\mu} - \alpha + \cancel{\mu} = 8 + 8 \Leftrightarrow \alpha = 16$$

$\text{Θέτω } \alpha = 16 \textit{ στην εξίσωση } (2):$

$$-\underbrace{\alpha + \mu}_{16} = 8 \Leftrightarrow -16 + \mu = 8 \Leftrightarrow \mu = 24$$

$\text{Ο}\textit{πότε οι συνολικές μπάλες είναι}:$

$$\alpha + \mu + 8 = 16 + 24 + 8 = 48$$

$\beta)\Gamma = \{\text{Η } \textit{μπάλα άσπρη ή να είναι αριθμημένη με άρτιο αριθμό}\}$

$\underline{\text{Ε}\textit{υνοικές περιπτώσεις για το γεγονός } \Gamma}:$

Όταν πάιρνω μια άσπρη μπάλα επειδή οι άσπρες μπάλες είναι 16 *μπορώ να την επιλέξω με* 16 *τρόπους*

Θ*α παρατηρήσω οτι*:

Όταν παίρνω τους αριθμούς 1 *και* 2 *το πλήθος των άρτιων αριθμών είναι* 1

Όταν παίρνω τους αριθμούς 1, 2, 3, 4 *το πλήθος των άρτιων αριθμών είναι* 2

$$\vdots$$

Όταν παίρνω τους αριθμούς $1, 2, 3, \cdots, 2\nu$ *το πλήθος των άρτιων αριθμών είναι* ν

Σ*υνεπώς όταν παίρνω τους αριθμούς* $1, 2, 3, \cdots, 48$ *το πλήθος των άρτιων αριθμών είναι* $\frac{48}{2} = 24$

Άρα απο τους αριθμούς $1, 2, 3, \cdots, 48$ *μπορώ να επιλέξω άρτιο αριμό με* 24 *τρόπους*

$$\begin{pmatrix} \text{Ευνοικές} \\ \textit{περιπτώσεις} \\ \textit{για το γεγονός } \Gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Οι } \textit{τρόποι που} \\ \textit{μπορώ να επιλέξω} \\ \textit{άσπρη μπάλα} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{Οι } \textit{τρόποι που} \\ \textit{μπορώ να επιλέξω} \\ \textit{μπάλα με άρτιο} \\ \textit{αριθμό} \end{pmatrix} =$$

$= 16 + 24 = 40$

<u>*Δυνατές περιπτώσεις*</u>:

Όταν πάιρνω μια τυχαία μπάλα επειδή οι συνολικές μπάλες είναι 16 *άσπρες*, 24 *μπλέ και* 8 *πράσινες μπορώ να την επιλέξω με* $16 + 24 + 8 = 48$ *τρόπους*

$$\mathrm{P}(\Gamma) = \frac{\text{Ευνοικές περιπτώσεις για το γεγονός } \Gamma}{\text{Δυνατές περιπτώσεις}} = \frac{40:8}{48:8} = \frac{5}{6}$$

2.

Έστω ο δειγματοχώρος $\Omega = \{1, 2, 3, \cdots, 15\}$ *στον οποίο ορίζεται η πιθάνοτητα κάθε στοιχείου* $\omega \in \Omega$ *απο τον τύπο*: $\mathrm{P}(\omega) = \lambda\omega$, *όπου* $\lambda > 0$ *σταθερός αριθμός* α) *Να βρείτε τον* λ β) *Αν* Α, Β *ασυμβίβαστα ενδεχόμενα του* Ω *με* $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \frac{x^2 + 1}{4}$ *και* $\mathrm{P}(\mathrm{B}) = \frac{2 - x}{2}$ *να βρείτε το* x

Έστω ο δειγματοχώρος $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_\nu\}$ *όπου* $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_\nu$ *είναι στοιχειώδη ενδεχόμενα*. Η P *είναι πιθανότητα όταν* :

$(\mathrm{I})\ 0\le \mathrm{P}(\omega_\kappa)\le 1, \kappa=1,2,\cdots,\nu$

$(\mathrm{II})\ \mathrm{P}(\omega_1)+\mathrm{P}(\omega_2)+\cdots+\mathrm{P}(\omega_\nu)=1$

(III) Αν $\mathrm{A}=\{\omega_{i_1},\omega_{i_2},\cdots,\omega_{i_\kappa}\}, i_1,i_2,\cdots,i_\kappa\in\{1,2,\cdots,\nu\}, \kappa\le\nu$

τότε $\mathrm{P}(\mathrm{A})=\mathrm{P}(\omega_{i_1})+\mathrm{P}(\omega_{i_2})+\cdots+\mathrm{P}(\omega_{i_\kappa})$

(IV) Αν $\mathrm{A}\subseteq\Omega$ *τότε* $0\le\mathrm{P}(\mathrm{A})\le 1$

$(V)\ \mathrm{P}(\varnothing)=0$

$(VI)\ \mathrm{P}(\Omega)=1$

$\mathrm{P}(1)+\mathrm{P}(2)+\mathrm{P}(3)+\cdots+\mathrm{P}(15)=1\Leftrightarrow$

$\lambda+2\lambda+3\lambda+\cdots+15\lambda=1$

Θ*εωρώ την αριθμητική πρόοδο* : $\underbrace{\lambda}_{\alpha_1},\underbrace{2\lambda}_{\alpha_2},\underbrace{3\lambda}_{\alpha_3},\cdots,\underbrace{15\lambda}_{\alpha_\nu},\cdots$

(α_ν): Α*ριθμητική πρόοδος*

Μ*ια ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος όταν ο επόμενος όρος προκύπτει απο τον προηγούμενο όταν προσθέσουμε τον ίδιο πάντα αριθμό*

$\omega=\alpha_2-\alpha_1=\alpha_3-\alpha_2=\cdots=\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu=$ Σ*ταθερό*

$\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\omega$

$S_\nu=\frac{\nu}{2}(\alpha_1+\alpha_\nu)=\frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1+(\nu-1)\omega\right]$

ω: Η *διαφορά της αριθμητικής προόδου*

α_1: Ο *πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου*

α_ν: Ο $\nu^{o\sigma\tau o\varsigma}$ *όρος της αριθμητικής προόδου*

S_ν: Τ*ο άθροισμα των ν πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου*

$\underset{\alpha_1}{\lambda},\underset{\alpha_2}{2\lambda},\underset{\alpha_3}{3\lambda},\cdots,\underset{\alpha_\nu}{15\lambda},\cdots$

$\omega=\alpha_2-\alpha_1=2\lambda-\lambda=\lambda$

$\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\omega\Leftrightarrow 15\lambda=\lambda+(\nu-1)\lambda\Leftrightarrow 15\lambda=\cancel{\lambda}+\lambda\nu-\cancel{\lambda}\overset{\lambda>0\Rightarrow\lambda\neq 0}{\Longleftrightarrow}$

$\nu\cancel{\lambda}=15\cancel{\lambda}\Leftrightarrow\nu=15$

$\lambda+2\lambda+3\lambda+\cdots+15\lambda=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_{15}=\frac{15}{2}(\alpha_1+\alpha_{15})=$

$\frac{15}{2}(\lambda+15\lambda)=\frac{15}{2}16\lambda=15\cdot 8\lambda=120\lambda$

$\lambda+2\lambda+3\lambda+\cdots+15\lambda=1\Leftrightarrow 120\lambda=1\Leftrightarrow\lambda=\frac{1}{120}$

β)

Δυο γεγονότα Α,Β *είναι ασυμβίβαστα ή ξένα μεταξύ τους όταν* $A\cap B=\varnothing$

Αν δυο γεγονότα Α,Β *είναι ασυμβίβαστα ή ξένα μεταξύ τους τότε ισχύει:* $P(A\cup B)=P(A)+P(A)$

Επειδή Α,Β *είναι ασυμβίβαστα θα ισχύει:*

$P(A\cup B)=P(A)+P(A)=\frac{x^2+1}{4}+\frac{2-x}{2}=\frac{x^2+1}{4}+\frac{4-2x}{4}=\frac{x^2-2x+5}{4}$

Γνωρίζω οτι: $P(A\cup B)\le 1\Leftrightarrow\frac{x^2-2x+5}{4}\le 1\Leftrightarrow x^2-2x+5\le 4\Leftrightarrow$

$x^2-2x+1\le 0\Leftrightarrow x^2-2\cdot x\cdot 1+1^2\le 0\Leftrightarrow (x-1)^2\le 0$

Έχω: $\left\{\begin{matrix}(x-1)^2\le 0\\(x-1)^2\le 0\end{matrix}\right\}$

Οπότε: $(x-1)^2=0\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1$

3.

Αν *για τα ενδεχόμενα* A,B *ενός δειγματικού χώρου* Ω *είναι*

$\mathrm{P}(\mathrm{A})=0,45$ *και* $\mathrm{P}(\mathrm{B})=0,65$ *να αποδειχθεί οτι*:

$(\mathrm{I})\,\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\geq 0,1$

$(\mathrm{II})\,\mathrm{P}\left[(\mathrm{A}-\mathrm{B})\cup(\mathrm{B}-\mathrm{A})\right]\leq 0,9$

(I)

$$\boxed{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$$

$$\boxed{0\le P(X)\le 1, X\subseteq \Omega, \Omega: \text{Ο } \textit{δειγματοχώρος}}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0,45+0,65-P(A\cap B)=$$
$$=1,1-P(A\cap B)$$
$$P(A\cup B)\le 1\Leftrightarrow 1,1-P(A\cap B)\le 1\Leftrightarrow -P(A\cap B)\le 1-1,1\Leftrightarrow$$
$$-P(A\cap B)\le 1-1,1\Leftrightarrow -P(A\cap B)\le -0,1\Leftrightarrow \frac{-P(A\cap B)}{-1}\ge\frac{-0,1}{-1}\Leftrightarrow$$
$$P(A\cap B)\ge 0,1$$

(II)

$$\boxed{\begin{array}{l}\textit{Δυο γεγονότα } A,B \textit{ είναι ασυμβίβαστα ή ξένα μεταξύ τους}\\ \textit{όταν } A\cap B=\varnothing\end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\textit{Αν δυο γεγονότα } A,B \textit{ είναι ασυμβίβαστα ή ξένα μεταξύ τους}\\ \textit{τότε ισχύει}: P(A\cup B)=P(A)+P(B)\end{array}}$$

$$\boxed{P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)}$$

Επειδή τα γεγονότα $A-B$ *και* $B-A$ *είναι ασυμβίβαστα θα ισχύει*:

$$P\left[(A-B)\cup(B-A)\right]=P(A-B)+P(B-A)\overset{\substack{P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)\\ P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)}}{=}$$
$$P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)=0,45+0,65-2P(A\cap B)=$$
$$=1,1-2P(A\cap B)$$
$$P(A\cap B)\ge 0,1\Rightarrow -2P(A\cap B)\le -2\bullet 0,1\Rightarrow -2P(A\cap B)\le -0,2\Rightarrow$$
$$1,1-2P(A\cap B)\le 1,1-0,2\Rightarrow \underbrace{1,1-2P(A\cap B)}_{P\left[(A-B)\cup(B-A)\right]}\le 0,9\Rightarrow$$
$$P\left[(A-B)\cup(B-A)\right]\le 0,9$$

4.

(I) Να αποδείξετε οτι $\alpha\beta \le \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}$

(II) Έστω $\mathrm{A},\mathrm{B},\Gamma$ ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω ανα δυο ξένα μεταξύ τους. Αν ισχύει $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}\cup\Gamma=\Omega$, να αποδείξετε οτι:

$\sqrt{\mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{B})}+\sqrt{\mathrm{P}(\mathrm{B})\mathrm{P}(\Gamma)}+\sqrt{\mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\Gamma)}\le 1$

$(\mathrm{I})\ \alpha\beta \le \frac{\alpha^2+\beta^2}{2} \Leftrightarrow 2\alpha\beta \le \cancel{2}\frac{\alpha^2+\beta^2}{\cancel{2}} \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\ge 0 \Leftrightarrow$

$(\alpha-\beta)^2 \ge 0(\text{Ισχύει})$

(II) Επειδή $\mathrm{A},\mathrm{B},\Gamma$ ανα δυο ξένα μεταξύ και $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}\cup\Gamma=\Omega$ θα έχω:

$\mathrm{A}\cup\mathrm{B}\cup\Gamma=\Omega \Rightarrow \mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}\cup\Gamma)=\mathrm{P}(\Omega)\Rightarrow \mathrm{P}(\mathrm{A})+\mathrm{P}(\mathrm{B})+\mathrm{P}(\Gamma)=1(1)$

Αν $\alpha=\sqrt{\mathrm{P}(\mathrm{A})},\beta=\sqrt{\mathrm{P}(\mathrm{B})}$ θα έχω:

$$\alpha\beta\le\frac{\alpha^2+\beta^2}{2} \overset{\alpha=\sqrt{\mathrm{P}(\mathrm{A})},\beta=\sqrt{\mathrm{P}(\mathrm{B})}}{\Longleftrightarrow} \sqrt{\mathrm{P}(\mathrm{A})}\sqrt{\mathrm{P}(\mathrm{B})}\le\frac{\left(\sqrt{\mathrm{P}(\mathrm{A})}\right)^2+\left(\sqrt{\mathrm{P}(\mathrm{B})}\right)^2}{2}\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\mathrm{P}(\mathrm{A})}\sqrt{\mathrm{P}(\mathrm{B})}\le\frac{\mathrm{P}(\mathrm{A})+\mathrm{P}(\mathrm{B})}{2}(2)$$

Αν $\alpha=\sqrt{\mathrm{P}(\Gamma)},\beta=\sqrt{\mathrm{P}(\mathrm{B})}$ θα έχω:

$$\alpha\beta\le\frac{\alpha^2+\beta^2}{2} \overset{\alpha=\sqrt{\mathrm{P}(\Gamma)},\beta=\sqrt{\mathrm{P}(\mathrm{B})}}{\Longleftrightarrow} \sqrt{\mathrm{P}(\Gamma)}\sqrt{\mathrm{P}(\mathrm{B})}\le\frac{\left(\sqrt{\mathrm{P}(\Gamma)}\right)^2+\left(\sqrt{\mathrm{P}(\mathrm{B})}\right)^2}{2}\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\mathrm{P}(\Gamma)}\sqrt{\mathrm{P}(\mathrm{B})}\le\frac{\mathrm{P}(\Gamma)+\mathrm{P}(\mathrm{B})}{2}(3)$$

Αν $\alpha=\sqrt{\mathrm{P}(\Gamma)},\beta=\sqrt{\mathrm{P}(\mathrm{A})}$ θα έχω:

$$\alpha\beta\le\frac{\alpha^2+\beta^2}{2} \overset{\alpha=\sqrt{\mathrm{P}(\Gamma)},\beta=\sqrt{\mathrm{P}(\mathrm{A})}}{\Longleftrightarrow} \sqrt{\mathrm{P}(\Gamma)}\sqrt{\mathrm{P}(\mathrm{A})}\le\frac{\left(\sqrt{\mathrm{P}(\Gamma)}\right)^2+\left(\sqrt{\mathrm{P}(\mathrm{A})}\right)^2}{2}\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\mathrm{P}(\Gamma)}\sqrt{\mathrm{P}(\mathrm{A})}\le\frac{\mathrm{P}(\Gamma)+\mathrm{P}(\mathrm{A})}{2}(4)$$

$\mathrm{A}\pi o\ \tau\iota\varsigma\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\varepsilon\iota\varsigma\ (2),(3),(4)\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\left.\begin{cases}\sqrt{\mathrm{P(A)}}\sqrt{\mathrm{P(B)}}\le\dfrac{\mathrm{P(A)}+\mathrm{P(B)}}{2}\\[2mm]\sqrt{\mathrm{P}(\Gamma)}\sqrt{\mathrm{P(B)}}\le\dfrac{\mathrm{P}(\Gamma)+\mathrm{P(B)}}{2}\\[2mm]\sqrt{\mathrm{P}(\Gamma)}\sqrt{\mathrm{P(A)}}\le\dfrac{\mathrm{P}(\Gamma)+\mathrm{P(A)}}{2}\end{cases}\right\}(+)$$

$$\sqrt{\mathrm{P(A)}}\sqrt{\mathrm{P(B)}}+\sqrt{\mathrm{P}(\Gamma)}\sqrt{\mathrm{P(B)}}+\sqrt{\mathrm{P}(\Gamma)}\sqrt{\mathrm{P(B)}}\le$$

$$\frac{\mathrm{P}(\Gamma)+\mathrm{P(B)}}{2}+\frac{\mathrm{P(A)}+\mathrm{P(B)}}{2}+\frac{\mathrm{P}(\Gamma)+\mathrm{P(A)}}{2}\Rightarrow$$

$$\sqrt{\mathrm{P(A)}}\sqrt{\mathrm{P(B)}}+\sqrt{\mathrm{P}(\Gamma)}\sqrt{\mathrm{P(B)}}+\sqrt{\mathrm{P}(\Gamma)}\sqrt{\mathrm{P(B)}}\le\frac{2\mathrm{P(A)}+2\mathrm{P(B)}+2\mathrm{P}(\Gamma)}{2}\Rightarrow$$

$$\sqrt{\mathrm{P(A)}}\sqrt{\mathrm{P(B)}}+\sqrt{\mathrm{P}(\Gamma)}\sqrt{\mathrm{P(B)}}+\sqrt{\mathrm{P}(\Gamma)}\sqrt{\mathrm{P(B)}}\le\frac{2\left(\mathrm{P(A)}+\mathrm{P(B)}+\mathrm{P}(\Gamma)\right)}{2}\Rightarrow$$

$$\sqrt{\mathrm{P(A)}}\sqrt{\mathrm{P(B)}}+\sqrt{\mathrm{P}(\Gamma)}\sqrt{\mathrm{P(B)}}+\sqrt{\mathrm{P}(\Gamma)}\sqrt{\mathrm{P(B)}}\le\underbrace{\mathrm{P(A)}+\mathrm{P(B)}+\mathrm{P}(\Gamma)}_{1}\Rightarrow$$

$$\sqrt{\mathrm{P(A)}}\sqrt{\mathrm{P(B)}}+\sqrt{\mathrm{P}(\Gamma)}\sqrt{\mathrm{P(B)}}+\sqrt{\mathrm{P}(\Gamma)}\sqrt{\mathrm{P(B)}}\le 1$$

5.

$\mathrm{A}\nu\ \mathrm{A,B}\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \varepsilon\nu\delta\varepsilon\chi\acute{o}\mu\varepsilon\nu\alpha\ \varepsilon\nu\acute{o}\varsigma\ \delta\varepsilon\iota\gamma\mu\alpha\tau o\chi\acute{\omega}\rho o\upsilon\ \Omega,$
$\nu\alpha\ \alpha\pi o\delta\varepsilon\acute{\iota}\xi\varepsilon\tau\varepsilon\ o\tau\iota:\mathrm{P}(\mathrm{A}'\cup\mathrm{B}')+\mathrm{P(B)}\ge 1$

$\mathrm{A}'\cup\mathrm{B}'=(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})'$

$\mathrm{P}(\mathrm{X}')=1-\mathrm{P(X)}$

$\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=\mathrm{P(A)}+\mathrm{P(B)}-\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$

$\mathrm{A}\nu\ \mathrm{X}\subseteq\mathrm{Y}\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \mathrm{P(X)}\le\mathrm{P(Y)}$

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}'\cup\mathrm{B}')+\mathrm{P}(\mathrm{B})=\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})'+\mathrm{P}(\mathrm{B})=1-\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})+\mathrm{P}(\mathrm{B})$$

$$\overset{\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\mathrm{P}(\mathrm{A})+\mathrm{P}(\mathrm{B})-\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})}{=}\quad 1-\left[\mathrm{P}(\mathrm{A})+\mathrm{P}(\mathrm{B})-\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})\right]+\mathrm{P}(\mathrm{B})=$$

$$1-\mathrm{P}(\mathrm{A})-\cancel{\mathrm{P}(\mathrm{B})}+\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})+\cancel{\mathrm{P}(\mathrm{B})}=1-\mathrm{P}(\mathrm{A})+\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})$$

$$\mathrm{A}\subseteq\mathrm{A}\cup\mathrm{B}\Rightarrow\mathrm{P}(\mathrm{A})\le\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})\Rightarrow\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})\ge\mathrm{P}(\mathrm{A})\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})-\mathrm{P}(\mathrm{A})\ge 0\Rightarrow\underbrace{1+\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})-\mathrm{P}(\mathrm{A})}_{\mathrm{P}(\mathrm{A}'\cup\mathrm{B}')+\mathrm{P}(\mathrm{B})}\ge 1\Rightarrow$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}'\cup\mathrm{B}')+\mathrm{P}(\mathrm{B})\ge 1$$

6.

Έστω Ω *ο δειγματοχωρός ενός περάματος τύχης και* A,B *δυο ενδεχόμενα του* Ω.*Αν για τις πιθανότητες* $\mathrm{P}(\mathrm{A}),\mathrm{P}(\mathrm{B})$ *ισχύουν οι σχέσεις*:

$$|\mathrm{P}(\mathrm{A})-1|+|\mathrm{P}(\mathrm{B})+1|=\frac{13}{6},\ |\mathrm{P}(\mathrm{A})+2|+|\mathrm{P}(\mathrm{B})+3|=\frac{37}{6},\ \textit{τότε}:$$

α)Να βρείτε τις πιθανότητες $\mathrm{P}(\mathrm{A}),\mathrm{P}(\mathrm{B})$

β)Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα A,B *είναι ασυμβίβαστα*

γ)Να δείξετε οτι $\frac{1}{6}\le\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\le 1$

α)Για τις πιθανότητες $\mathrm{P}(\mathrm{A}),\mathrm{P}(\mathrm{B})$ *ισχύει*:

$$0\le\mathrm{P}(\mathrm{A})\le 1,\ 0\le\mathrm{P}(\mathrm{B})\le 1$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{A})\le 1\Leftrightarrow\mathrm{P}(\mathrm{A})-1\le 0\Leftrightarrow|\mathrm{P}(\mathrm{A})-1|=-(\mathrm{P}(\mathrm{A})-1)=1-\mathrm{P}(\mathrm{A})$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{A})\ge 0\Rightarrow\mathrm{P}(\mathrm{A})+2\ge 2>0\Rightarrow\mathrm{P}(\mathrm{A})+2>0\Rightarrow|\mathrm{P}(\mathrm{A})+2|=\mathrm{P}(\mathrm{A})+2$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{B})\ge 0\Rightarrow\begin{Bmatrix}\mathrm{P}(\mathrm{B})+1\ge 1>0\\ \mathrm{P}(\mathrm{B})+3\ge 3>0\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}\mathrm{P}(\mathrm{B})+1>0\\ \mathrm{P}(\mathrm{B})+3>0\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}|\mathrm{P}(\mathrm{B})+1|=\mathrm{P}(\mathrm{B})+1\\ |\mathrm{P}(\mathrm{B})+3|=\mathrm{P}(\mathrm{B})+3\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}|\mathrm{P}(\mathrm{A})-1|+|\mathrm{P}(\mathrm{B})+1|=\dfrac{13}{6}\\ |\mathrm{P}(\mathrm{A})+2|+|\mathrm{P}(\mathrm{B})+3|=\dfrac{37}{6}\end{Bmatrix}\overset{\substack{|\mathrm{P}(\mathrm{A})-1|=1-\mathrm{P}(\mathrm{A}),|\mathrm{P}(\mathrm{A})+2|=\mathrm{P}(\mathrm{A})+2\\ |\mathrm{P}(\mathrm{B})+1|=\mathrm{P}(\mathrm{B})+1,|\mathrm{P}(\mathrm{B})+3|=\mathrm{P}(\mathrm{B})+3}}{\Leftrightarrow}$$

$$\begin{cases} 1-P(A)+P(B)+1=\dfrac{13}{6} \\ P(A)+2+P(B)+3=\dfrac{37}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -P(A)+P(B)+2=\dfrac{13}{6} \\ P(A)+P(B)+5=\dfrac{37}{6} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -P(A)+P(B)=\dfrac{13}{6}-\dfrac{2\bullet 6}{6} \\ P(A)+P(B)=\dfrac{37}{6}-\dfrac{5\bullet 6}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -P(A)+P(B)=\dfrac{13}{6}-\dfrac{12}{6} \\ P(A)+P(B)=\dfrac{37}{6}-\dfrac{30}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -P(A)+P(B)=\dfrac{1}{6} \\ P(A)+P(B)=\dfrac{7}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -P(A)+P(B)=\dfrac{1}{6} \\ P(A)+P(B)=\dfrac{7}{6} \end{cases}(+)$$

$$\cancel{-P(A)}+P(B)+\cancel{P(A)}+P(B)=\frac{1}{6}+\frac{7}{6} \Leftrightarrow$$

$$2P(B)=\frac{8}{6} \Leftrightarrow \cancel{2}\bullet P(B)=\cancel{2}\bullet\frac{4}{6} \overset{\substack{\text{Αν } \alpha\neq 0 \text{ τότε ισχύει η ισοδυναμία:} \\ \alpha\beta=\alpha\gamma\Leftrightarrow\beta=\gamma}}{\Longleftrightarrow} P(B)=\frac{4:2}{6:2} \Leftrightarrow P(B)=\frac{2}{3}$$

Θέτω $P(B)=\dfrac{2}{3}$ *στην εξίσωση* $P(A)+P(B)=\dfrac{7}{6}$:

$$P(A)+P(B)=\frac{7}{6} \overset{P(B)=\frac{2}{3}}{\Longleftrightarrow} P(A)+\frac{2}{3}=\frac{7}{6} \Leftrightarrow P(A)=\frac{7}{6}-\frac{2\bullet 2}{3\bullet 2} \Leftrightarrow P(A)=\frac{7}{6}-\frac{4}{6} \Leftrightarrow$$

$$P(A)=\frac{2:2}{6:2} \Leftrightarrow P(A)=\frac{1}{3}$$

β)Έστω $A\cap B=\varnothing$.*Τότε θα έχω*:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)(1)$$

$$\begin{cases} -P(A)+P(B)=\dfrac{1}{6} \\ P(A)+P(B)=\dfrac{7}{6} \end{cases}(\Sigma)$$

Παίρνοντας την 2^{η} *− εξίσωση του συστήματος* (Σ) *θα έχω*:

$$P(A)+P(B)=\frac{7}{6}(2)$$

$\text{Απο τις σχέσεις } (1),(2) \text{ θα έχω}:$

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})\overset{(1)}{=}\mathrm{P}(\mathrm{A})+\mathrm{P}(\mathrm{B})\overset{(2)}{=}\frac{7}{6}>1$$

$\text{Άτοπο γιατί } \mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})\le 1$

$$\gamma)\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=\mathrm{P}(\mathrm{A})+\mathrm{P}(\mathrm{B})-\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\overset{\mathrm{P}(\mathrm{A})+\mathrm{P}(\mathrm{B})=\frac{7}{6}}{\Leftrightarrow}\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=\frac{7}{6}-\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$$

$$\text{Έχω}:\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})\le 1\Leftrightarrow\frac{7}{6}-\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\le 1\Leftrightarrow-\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\le\frac{6}{6}-\frac{7}{6}\Leftrightarrow-\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\le-\frac{1}{6}$$

$$\overset{\substack{\text{Όταν διαιρώ και τα}\\ \text{δυο μέλη μιας ανίσωσης}\\ \text{με αρνητικό αριθμό προκύπτει}\\ \text{ετερόστροφη ανίσωση}}}{\Leftrightarrow}\quad\frac{-\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{-1}\ge\frac{-\frac{1}{6}}{-1}\Leftrightarrow\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\ge\frac{1}{6}$$

$\text{Έχω}:\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\le 1$

$\text{Οπότε}:\frac{1}{6}\le\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\le 1$

7.

Αν επιλέξουμε τυχαία ένα αριθμό α απο το σύνολο $\Omega=\{0,1,2,\bullet\bullet\bullet,10\}$, να βρείτε την πιθανότητα να ισχύει $e^x\ge 5(x+\alpha)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$\text{Για κάθε } x\in\mathbb{R} \text{ έχω } e^x\ge 5(x-\alpha)\Leftrightarrow \text{Για κάθε } x\in\mathbb{R} \text{ έχω } e^x-5(x+\alpha)\ge 0$

$\text{Θεωρώ την συνάρτηση } f(x)=e^x-5(x+\alpha),x\in\mathbb{R}$

$\text{Τότε για κάθε } x\in\mathbb{R} \text{ έχω } f(x)\ge 0$

$$f'(x)=\left[e^x-5(x+\alpha)\right]'\overset{[F(x)-G(x)]'=F'(x)-G'(x)}{=}e^x-\left[5(x+\alpha)\right]'\overset{\substack{(e^x)'=e^x\\ [cF(x)]'=cF'(x),c:\text{Σταθερά}}}{=}$$

$$e^x-5(x+\alpha)'\overset{[F(x)-G(x)]'=F'(x)+G'(x)}{=}e^x-5\left[(x)'+(\alpha)'\right]\overset{\substack{(x)'=1\\ (c)'=0,c:\text{Σταθερά}}}{=}$$

$$e^x-5(1+0)=e^x-5$$

$\text{Οπότε}: f'(x)=e^x-5,x\in\mathbb{R}$

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow e^x-5>0 \Leftrightarrow e^x>5 \overset{\substack{\text{Αν } \theta_1,\theta_2>0 \text{ τότε ισχύει η ισοδυναμία:}\\ \theta_1>\theta_2 \Leftrightarrow \ln\theta_1>\ln\theta_2}}{\Longleftrightarrow} \ln e^x>\ln 5 \Leftrightarrow$$

$$\overset{\ln\theta^x=x\ln\theta,\theta>0}{\Longleftrightarrow} x\ln e>\ln 5 \overset{\ln e=1}{\Longleftrightarrow} x\bullet 1>\ln 5 \Leftrightarrow x>\ln 5$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow e^x-5=0 \Leftrightarrow e^x=5 \overset{\substack{\text{Αν } \theta_1,\theta_2>0 \text{ τότε ισχύει η ισοδυναμία:}\\ \theta_1=\theta_2 \Leftrightarrow \ln\theta_1=\ln\theta_2}}{\Longleftrightarrow} \ln e^x=\ln 5 \Leftrightarrow$$

$$\overset{\ln\theta^x=x\ln\theta,\theta>0}{\Longleftrightarrow} x\ln e=\ln 5 \overset{\ln e=1}{\Longleftrightarrow} x\bullet 1=\ln 5 \Leftrightarrow x=\ln 5$$

$\text{Οπότε}: f'(x)<0 \Leftrightarrow x<\ln 5$

$$\text{Έχω}: \left\{\begin{array}{l} (\mathrm{I})\ f'(\ln 5)=0 \\ (\mathrm{II})\ f'(x)<0,\ \text{για κάθε } x\in(-\infty,\ln 5) \\ (\mathrm{II})\ f'(x)>0,\ \text{για κάθε } x\in(\ln 5,+\infty) \end{array}\right\}$$

Άρα η συνάρτηση f έχει ελάχιστη τιμή στην θέση $x_0=\ln 5$ τον αριθμό:

$$f(\ln 5)=e^{\ln 5}-5(\ln 5+\alpha) \overset{e^{\ln\theta}=\theta,\theta>0}{=} 5-5\ln 5-5\alpha$$

x	$-\infty$		$\ln 5$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	
			min		

$\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in\mathbb{R}\ \theta\alpha\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\ f(x)\geq 0\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ f(\ln 5)\geq 0$

$\mathrm{A}\nu\tau\acute{\iota}\sigma\tau\rho o\varphi\alpha\ f(\ln 5)\geq 0\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$f(x)\geq f(\ln 5)\geq 0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in\mathbb{R}$

$\underline{\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ f(x)\geq 0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in\mathbb{R}\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ \alpha\nu\ \kappa\alpha\iota\ \mu\acute{o}\nu o\ \alpha\nu\ f(\ln 5)\geq 0}$

$$f(\ln 5)\geq 0\Leftrightarrow 5-5\ln 5-5\alpha\geq 0\Leftrightarrow 5(1-\ln 5-\alpha)\geq 0\Leftrightarrow 1-\ln 5-\alpha\geq 0\Leftrightarrow$$

$$-\alpha\geq -1+\ln 5\Leftrightarrow -\alpha\geq -1+\ln 5\ \overset{\substack{\text{Όταν διαιρώ και τα}\\ \text{δυο μέλη μιας ανίσωσης}\\ \text{με αρνητικό αριθμό προκύπτει}\\ \text{ετερόστροφη ανίσωση}}}{\Leftrightarrow}\ \frac{-\alpha}{-1}\leq\frac{-(1-\ln 5)}{-1}\Leftrightarrow$$

$$\alpha\leq 1-\ln 5\overset{\ln e=1}{\Leftrightarrow}\alpha\leq\ln e-\ln 5\ \overset{\ln\frac{\theta_1}{\theta_2}=\ln\theta_1-\ln\theta_2,\theta_1,\theta_2>0}{\Leftrightarrow}\ \alpha\leq\ln\frac{e}{5}$$

$$e<5\Leftrightarrow\frac{e}{5}<\frac{5}{5}\Leftrightarrow\frac{e}{5}<1\ \overset{\substack{\text{Αν }\theta_1,\theta_2>0\text{ τότε ισχύει η ισοδυναμία:}\\ \theta_1<\theta_2\Leftrightarrow\ln\theta_1<\ln\theta_2}}{\Leftrightarrow}\ \ln\frac{e}{5}<\ln 1\overset{\ln 1=0}{\Leftrightarrow}\ln\frac{e}{5}<0$$

$\acute{\mathrm{E}}\chi\omega:\alpha\leq\ln\frac{e}{5}<0\Rightarrow\alpha<0$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \theta\alpha\ \pi\rho\acute{\varepsilon}\pi\varepsilon\iota\ \alpha<0\ \kappa\alpha\iota\ \alpha\in\Omega=\{0,1,2,\cdots,10\}$. $\Delta\varepsilon\nu\ \upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota$
$\alpha\in\Omega=\{0,1,2,\cdots,10\}\ \mu\varepsilon\ \alpha<0$. $\Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma\ \tau o\ \sigma\acute{\upsilon}\nu o\lambda o$
$\mathrm{A}=\{\alpha\in\Omega:e^x\geq 5(x+\alpha)\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in\mathbb{R}\}\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \tau o\ \varnothing$

$\Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma:\mathrm{P}(\mathrm{A})=\mathrm{P}(\varnothing)=0$

8.

$\Delta \acute{\iota}\nu\varepsilon\tau\alpha\iota\ \eta\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f(x)=-x^2+8x-7, x\in\mathbb{R}$

a)Να βρείτε τη μονοτονία της f, το ακρότατο και το είδος του

β)Δίνονται οι πέντε τιμές μιας ματαβλητής Χ:

$1+f(1), f'\left(\frac{5}{2}\right), a, f(2), -f(0)$ με μέση τιμή $\bar{x}=4$

Ι)Να βρείτε τις τιμές της Χ

ΙΙ)Να βρείτε την διάμεσο τους, το εύρος τους και την τυπική τους απόκλιση

γ)Θεωρούμε Α, Β ενδεχόμενα ενός δειγματοχώρου Ω και γνωρίζουμε οτι:

$$P(A)=\lim_{x\to1}\frac{2x-2}{f(x)}, P(B')=\frac{1}{f'(2)}\ \kappa\alpha\iota\ P(A\cap B)=\lim_{x\to7}\frac{7-x}{f(x)}$$

Ι)Να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(A), P(B'), P(A\cap B)$

ΙΙ)Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

Γ: να πραγματοποιηθεί το Α ή το Β

Δ: να πραγματοποιηθεί το Α και οχι το Β

Ε: να μην πραγματοποιηθεί κανένα απο τα Α και Β

x	$-\infty$	4	$+\infty$
f'	+	0	−
f	↗		↘
		max	

$a) f(x) = -x^2 + 8x - 7, x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \left(-x^2 + 8x - 7\right)' \overset{\left(F(x)+G(x)+H(x)\right)'=F'(x)+G'(x)+H'(x)}{=} \left(-x^2\right)' + \left(8x\right)' + \left(-7\right)'$$

$$\overset{\substack{\left(cF(x)\right)'=cF'(x),c:\Sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha} \\ (c)'=0,c:\Sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}}}{=} -\left(x^2\right)' + 8\left(x\right)' \overset{\substack{\left(x^a\right)'=ax^{a-1} \\ (x)'=1}}{=} -2x + 8$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -2x + 8 > 0 \Leftrightarrow -2x > -8 \overset{\substack{\acute{O}\tau\alpha\nu\ \delta\iota\alpha\iota\rho\acute{\omega}\ \kappa\alpha\iota\ \tau\alpha \\ \delta\upsilon o\ \mu\acute{\varepsilon}\lambda\eta\ \mu\iota\alpha\varsigma\ \alpha\nu\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta\varsigma \\ \mu\varepsilon\ \alpha\rho\nu\eta\tau\iota\kappa\acute{o}\ \alpha\rho\iota\theta\mu\acute{o}\ \pi\rho o\kappa\acute{\upsilon}\pi\tau\varepsilon\iota \\ \varepsilon\tau\varepsilon\rho\acute{o}\sigma\tau\rho o\varphi\eta\ \alpha\nu\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta}}{\Longleftrightarrow} \frac{-2x}{-2} < \frac{-8}{-2} \Leftrightarrow x < 4$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 8 = 0 \Leftrightarrow -2x = -8 \Leftrightarrow x = \frac{-8}{-2} \Leftrightarrow x = 4$$

$\text{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon : f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 4$

$$\acute{E}\chi\omega : \left\{ \begin{array}{l} (\text{I})\ f'(4) = 0 \\ (\text{II})\ f'(x) > 0,\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x \in (-\infty, 4) \\ (\text{II})\ f'(x) < 0,\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x \in (4, +\infty) \end{array} \right\}$$

Άρα η συνάρτηση f *έχει μέγιστη τιμή στην θέση* $x_0 = 4$ *τον αριθμό*:

$$f(4) = -4^2 + 8 \bullet 4 - 7 = -16 + 32 - 7 = -23 + 32 = 9$$

Ε*πειδή* $f'(x) > 0$, *για κάθε* $x \in (-\infty, 4)$ *η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο* $(-\infty, 4)$

Ε*πειδή* $f'(x) < 0$, *για κάθε* $x \in (4, +\infty)$ *η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο* $(4, +\infty)$

$\beta) 1 + f(1) = 1 - 1^2 + 8 \bullet 1 - 7 = \cancel{1} - \cancel{1} + 8 - 7 = 1$

$$f'\left(\frac{5}{2}\right) = -2\frac{5}{2} + 8 = -5 + 8 = 3$$

$$f(2) = -2^2 + 8 \bullet 2 - 7 = -4 + 16 - 7 = -11 + 16 = 5$$

$$-f(0) = -\left(0^2 + 8 \bullet 0 - 7\right) = -(-7) = 7$$

Ε*πειδή η μέση τιμή του δείγματος* $1 + f(1), f'\left(\frac{5}{2}\right), a, f(2), -f(0)$

είναι 4 *θα έχω*:

$$\frac{1+f(1)+f'\left(\frac{5}{2}\right)+a+f(2)-f(0)}{5}=4 \quad \overset{1+f(1)=1,\ f'\left(\frac{5}{2}\right)=3,\ f(2)=5,\ -f(0)=7}{\Longleftrightarrow}$$

$$\frac{1+3+\alpha+5+7}{5}=4 \Leftrightarrow \alpha+16=4\bullet 5 \Leftrightarrow \alpha \Leftrightarrow \alpha=20-16 \Leftrightarrow \alpha=4$$

Ο$\pi\acute{o}\tau\varepsilon$ τo $\delta\varepsilon\acute{\iota}\gamma\mu\alpha$ $1+f(1), f'\left(\frac{5}{2}\right), a, f(2), -f(0)$ $\theta\alpha$ $\varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota$:

$1,3,4,5,7$

Επειδή το δείγμα $1,3,4,5,7$ το έχω διατάξει κατα αύξουσα σειρά δηλ. απο την μικρότερη προς την μεγαλύτερη τιμή μπορώ να βρώ την διάμεσο δ:

$$\delta=\frac{5+1}{2}-\Pi\alpha\rho\alpha\tau\acute{\eta}\rho\eta\sigma\eta=3^{\eta}-\Pi\alpha\rho\alpha\tau\acute{\eta}\rho\eta\sigma\eta=4$$

Το εύρος του δείγματος θα είναι:

$$R=t_{\max}-t_{\min}=7-1=4$$

Η διακύμανση s^2 του δείγματος θα είναι:

$$s^2=\frac{\left(t_1-\overline{x}\right)^2+\left(t_2-\overline{x}\right)^2+\bullet\bullet\bullet+\left(t_\nu-\overline{x}\right)^2}{\nu}=$$

$$=\frac{(1-4)^2+(3-4)^2+(4-4)^2+(5-4)^2+(6-4)^2}{5}=\frac{9+1+1+9}{5}=\frac{20}{5}=4$$

Η τυπική απόκλιση s του δείγματος θα είναι:

$$s=\sqrt{s^2}=\sqrt{4}=2$$

γ)Θεωρώ την δευτεροβάθμια εξίσωση:

$$-x^2+8x-7=0 \Leftrightarrow -\left(x^2-8x+7\right)=0 \Leftrightarrow \underbrace{1}_{\alpha=1}\bullet x^2\ \underbrace{-8}_{\beta=-8}\bullet x+\underbrace{7}_{\gamma=7}=0\ (1)$$

$$\Delta=\beta^2-4\bullet\alpha\bullet\gamma=(-8)^2-4\bullet 1\bullet 7=64-28=36>0$$

Επειδή $\Delta>0$ η δευτεροβάθμια εξίσωση (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-8)\pm\sqrt{36}}{2\bullet 1}=\frac{8\pm 6}{2}=\frac{2(4\pm 3)}{2}=4\pm 3= \begin{matrix}\nearrow 4+3=7\\ \searrow 4-3=1\end{matrix}$$

$$-x^2+8x-7 \overset{\substack{\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x_1)(x-x_2) \\ x_1,x_2:\ \text{Οι ρίζες της δευτεροβάθμιας} \\ \text{εξίσωσης } \alpha x^2+\beta x+\gamma=0 \text{ με } \Delta>0}}{=} -(x-1)(x-7)$$

$\mathrm{A}\nu\ x\in(-\infty,1)\cup(1,7)\cup(7,+\infty)\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\frac{2x-2}{f(x)}=\frac{2(x-1)}{-x^2+8x-7}=\frac{2\cancel{(x-1)}}{-\cancel{(x-1)}(x-7)}=-\frac{2}{x-7}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{2x-2}{f(x)}=\lim_{x\to1}\left(-\frac{2}{x-7}\right)=-\frac{2}{1-7}=-\frac{2}{-6}=\frac{2:2}{6:2}=\frac{1}{3}$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{A})=\lim_{x\to1}\frac{2x-2}{f(x)}=\frac{1}{3}$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}')=\frac{1}{f'(2)}=\frac{1}{-2\bullet2+8}=\frac{1}{-4+8}=\frac{1}{4}$$

$\mathrm{A}\nu\ x\in(-\infty,1)\cup(1,7)\cup(7,+\infty)\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\frac{7-x}{f(x)}=\frac{7-x}{-x^2+8x-7}=\frac{-(x-7)}{-(x-1)(x-7)}=\frac{1}{x-1}$$

$$\lim_{x\to7}\frac{7-x}{f(x)}=\lim_{x\to7}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{7-1}=\frac{1}{6}$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\lim_{x\to7}\frac{7-x}{f(x)}=\frac{1}{6}$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}')=\frac{1}{4}\overset{\mathrm{P}(\mathrm{X}')=1-\mathrm{P}(\mathrm{X})}{\Leftrightarrow}1-\mathrm{P}(\mathrm{B})=\frac{1}{4}\Leftrightarrow-\mathrm{P}(\mathrm{B})=\frac{1}{4}-1\Leftrightarrow-\mathrm{P}(\mathrm{B})=\frac{1}{4}-\frac{4}{4}\Leftrightarrow$$

$$-\mathrm{P}(\mathrm{B})=-\frac{3}{4}\Leftrightarrow\mathrm{P}(\mathrm{B})=\frac{3}{4}$$

Επειδή Γ: *να πραγματοποιηθεί το* Α *ή το* Β *θα έχω* $\Gamma=\mathrm{A}\cup\mathrm{B}$

$$\mathrm{P}(\Gamma)=\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=\mathrm{P}(\mathrm{A})+\mathrm{P}(\mathrm{B})-\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\frac{1}{3}+\frac{3}{4}-\frac{1}{6}=\frac{1\bullet4}{3\bullet4}+\frac{3\bullet3}{4\bullet3}-\frac{1\bullet2}{6\bullet2}=$$

$$\frac{4}{12}+\frac{9}{12}-\frac{2}{12}=\frac{11}{12}$$

Επειδή Δ: *να πραγματοποιηθεί το* Α *και οχι το* Β *θα έχω*:

$$\Delta=\mathrm{A}\cap\mathrm{B}'=\mathrm{A}-\mathrm{B}$$

$$\mathrm{P}(\Delta)=\mathrm{P}(\mathrm{A}-\mathrm{B})\overset{\mathrm{P}(\mathrm{X}-\mathrm{Y})=\mathrm{P}(\mathrm{X})-\mathrm{P}(\mathrm{X}\cap\mathrm{Y})}{=}\mathrm{P}(\mathrm{A})-\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1\bullet2}{3\bullet2}-\frac{1}{6}=\frac{2}{6}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$$

$\text{Επειδή}\ \mathrm{E}: \textit{να μην πραγματοποιηθεί κανένα απο τα}\ \mathrm{A}\ \textit{και}\ \mathrm{B}\ \textit{θα έχω}:$

$$\mathrm{E}=\mathrm{A}'\cap\mathrm{B}' \overset{\mathrm{X}'\cap\mathrm{Y}'=(\mathrm{X}\cup\mathrm{Y})'}{=} (\mathrm{A}\cup\mathrm{B})'$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{E})=\mathrm{P}\Big((\mathrm{A}\cup\mathrm{B})'\Big) \overset{\mathrm{P}(\mathrm{X}')=1-\mathrm{P}(\mathrm{X})}{=} 1-\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}) \overset{\mathrm{P}(\mathrm{X}\cup\mathrm{Y})=\mathrm{P}(\mathrm{X})+\mathrm{P}(\mathrm{Y})-\mathrm{P}(\mathrm{X}\cap\mathrm{Y})}{=}$$

$$1-\big(\mathrm{P}(\mathrm{A})+\mathrm{P}(\mathrm{B})-\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\big)=1-\mathrm{P}(\mathrm{A})-\mathrm{P}(\mathrm{B})+\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=$$

$$=1-\frac{1}{3}-\frac{3}{4}+\frac{1}{6}=\frac{12}{12}-\frac{1\bullet 4}{3\bullet 4}-\frac{3\bullet 3}{4\bullet 3}+\frac{1\bullet 2}{6\bullet 2}=\frac{12}{12}-\frac{4}{12}-\frac{9}{12}+\frac{2}{12}=\frac{14}{12}-\frac{13}{12}=\frac{1}{12}$$

9.

$\Delta\textit{ίνεται ο δειγματοχώρος}\ \Omega=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7\}$
$\Delta\textit{ίνεται δείγμα}\ 5\ \textit{τιμών της μεταβλητής}\ \mathrm{X}: \lambda, 4\lambda, 5\lambda, 6\lambda, 9\lambda\ \textit{όπου}\ \lambda\in\Omega$
I)N*α βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου*
A :"*η διάμεσος του δείγματος είναι ο αριθμός* 20"
II)N*α βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου*
B :"*η μέση τιμή του δείγματος είναι μεγαλύτερη απο* 20"
III)N*α βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου*
Γ :"*η διασπορά του δείγματος* (*δηλαδή το* s^2) *είναι μεγαλύτερη*
ή ίση απο 68"

I)A :"*η διάμεσος του δείγματος είναι ο αριθμός* 20"

$\lambda\in\Omega=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7\}$

$\mathrm{X}: \lambda, 4\lambda, 5\lambda, 6\lambda, 9\lambda$

$$\Delta\textit{ιακρίνω τις περιπτώσεις}: \begin{Bmatrix} 1^{\eta}: \lambda=0 \\ 2^{\eta}: \lambda>0 \\ 3^{\eta}: \lambda<0 \end{Bmatrix}$$

<u>Περιπτωση 1^{η} :</u>

A*ν* $\lambda=0$ *θα έχω το δείγμα* $0,0,0,0,0$. O*πότε η διάμεσος του είναι το* 0

<u>Περιπτωση 2^{η} :</u>

A*ν* $\lambda>0$ *θα έχω το δείγμα* :

$\lambda, 4\lambda, 5\lambda, 6\lambda, 9\lambda$

Το παραπάνω δείγμα έχει διαταχθεί κατά αύξουσα σειρά γιατί :

$$1<4<5<6<9 \overset{\lambda>0}{\Longleftrightarrow} \lambda<4\lambda<5\lambda<6\lambda<9\lambda$$

Επειδή το δείγμα $\lambda, 4\lambda, 5\lambda, 6\lambda, 9\lambda$ το έχω διατάξει κατα αύξουσα σειρά δηλ. απο την μικρότερη προς την μεγαλύτερη τιμή μπορώ να βρώ την διάμεσο δ :

$$\delta = \frac{5+1}{2} - \text{Παρατήρηση} = 3^{\eta} - \text{Παρατήρηση} = 5\lambda$$

$$\delta = 20 \Leftrightarrow 5\lambda = 20 \Leftrightarrow \lambda = \frac{20}{5} \Leftrightarrow \lambda = 4 \left(\text{Δεκτή γιατί } 4 \in \Omega\right)$$

<u>Περιπτωση 3^{η} :</u>

Αν $\lambda<0$ θα έχω το δείγμα :

$\lambda, 4\lambda, 5\lambda, 6\lambda, 9\lambda$

Θα διατάξω το παραπάνω δείγμα κατα αύξουσα σειρά

$$1<4<5<6<9 \overset{\lambda<0}{\Longleftrightarrow} \lambda>4\lambda>5\lambda>6\lambda>9\lambda \overset{\substack{\text{Γράφω το δείγμα με} \\ \text{κατεύθυνση} \\ \text{απο τα δεξιά} \\ \text{προς τα αριστερά}}}{\Longleftrightarrow} 9\lambda<6\lambda<5\lambda<4\lambda<\lambda$$

Συνεπώς έχω το δείγμα $9\lambda, 6\lambda, 5\lambda, 4\lambda, \lambda$ διατεταγμένο κατα αύξουσα σειρά δηλ. απο την μικρότερη προς την μεγαλύτερη τιμή. Οπότε μπορώ να βρώ την διάμεσο δ :

$$\delta = \frac{5+1}{2} - \text{Παρατήρηση} = 3^{\eta} - \text{Παρατήρηση} = 5\lambda$$

$$\delta = 20 \Leftrightarrow 5\lambda = 20 \Leftrightarrow \lambda = \frac{20}{5} \Leftrightarrow \lambda = 4 \left(\text{Άτοπο γιατι } \lambda<0\right)$$

Συνεπώς οι ευνοϊκές περιπτώσεις για το ενδεχόμενο Α είναι μία δηλ. $N(A)=1$

Οι δυνατές περιπτώσεις είναι όσες και τα στοιχεία του

$\Omega = \{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7\}$ δηλ. $N(\Omega)=12$

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{1}{12}$$

II)Β : "η μέση τιμή του δείγματος είναι μεγαλύτερη απο 20"

$\lambda \in \Omega = \{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7\}$

$X : \lambda, 4\lambda, 5\lambda, 6\lambda, 9\lambda$

$\text{II)}\mathrm{B}:"\eta\ \mu\acute{\varepsilon}\sigma\eta\ \tau\iota\mu\acute{\eta}\ \tau o\upsilon\ \delta\varepsilon\acute{\iota}\gamma\mu\alpha\tau o\varsigma\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \mu\varepsilon\gamma\alpha\lambda\acute{\upsilon}\tau\varepsilon\rho\eta\ \alpha\pi o\ 20"$

$\lambda \in \Omega = \{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7\}$

$\mathrm{X}: \lambda, 4\lambda, 5\lambda, 6\lambda, 9\lambda$

$$\bar{x} = \frac{t_1 + t_2 + \cdots + t_\nu}{\nu} = \frac{\lambda + 4\lambda + 5\lambda + 6\lambda + 9\lambda}{5} = \frac{25\lambda}{5} = 5\lambda$$

<u>Ευνοϊκές περιπτώσεις του Β:</u>

$$\left.\begin{cases} \bar{x} > 20 \\ \lambda \in \Omega = \{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7\} \end{cases}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{cases} 5\lambda > 20 \\ \lambda \in \Omega = \{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7\} \end{cases}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{cases} \lambda > \dfrac{20}{5} \\ \lambda \in \Omega = \{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7\} \end{cases}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{cases} \lambda > 4 \\ \lambda \in \Omega = \{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7\} \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \lambda \in \{5,6,7\}$$

Άρα οι ευνοϊκές περιπτώσεις του Β *είναι* 3 *δηλ.* $\mathrm{N}(\mathrm{B}) = 3$

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}) = \frac{\mathrm{N}(\mathrm{B})}{\mathrm{N}(\Omega)} = \frac{3:3}{12:3} = \frac{1}{4}$$

III)Γ: "*η διασπορά του δείγματος* (*δηλαδή το* s^2) *είναι μεγαλύτερη ή ίση απο* 68"

$\lambda \in \Omega = \{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7\}$

$\mathrm{X}: \lambda, 4\lambda, 5\lambda, 6\lambda, 9\lambda$ *με* $\bar{x} = 5\lambda$

Η *διακύμανση* s^2 *του δείγματος θα είναι*:

$$s^2 = \frac{(t_1 - \bar{x})^2 + (t_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (t_\nu - \bar{x})^2}{\nu} =$$

$$= \frac{(\lambda - 5\lambda)^2 + (4\lambda - 5\lambda)^2 + (5\lambda - 5\lambda)^2 + (6\lambda - 5\lambda)^2 + (9\lambda - 5\lambda)^2}{5} =$$

$$\frac{16\lambda^2 + \lambda^2 + \lambda^2 + 16\lambda^2}{5} = \frac{34}{5}\lambda^2$$

<u>$\text{Ευνοϊκές περιπτώσεις του Β}:$</u>

$$\left.\begin{cases} s^2 > 68 \\ \lambda \in \Omega = \{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7\} \end{cases}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{cases} \cancel{34}\bullet\dfrac{\lambda^2}{5} > 2\bullet\cancel{34} \\ \lambda \in \Omega = \{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7\} \end{cases}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{cases} \dfrac{\lambda^2}{5}\bullet 5 > 2\bullet 5 \\ \lambda \in \Omega = \{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7\} \end{cases}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{cases} \lambda^2 > 10 \\ \lambda \in \Omega = \{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7\} \end{cases}\right\} \overset{\text{Απο τους αριθμούς } -4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7 \text{ αυτοί που ικανοποιούν την σχέση } \lambda^2>10 \text{ είναι οι } -4,4,5,6,7}{\Leftrightarrow}$$

$$\lambda \in \{-4,4,5,6,7\}$$

Άρα οι ευνοϊκές περιπτώσεις του Γ *είναι* 5 *δηλ.* $N(\Gamma) = 5$

$$P(\Gamma) = \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{5}{12}$$

10.

Δίνεται ο δειγματοχώρος $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ *με ισοπιθανά απλά ενδεχόμενα. Για τα ενδεχόμενα* A, B, Γ *και* Ω *είναι*:

$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$, $A \cap B = \{1,3,4\}$, $A - B = \{2,6\}$ *και*

$$\Gamma = \left\{ x \in \Omega \,/\, \frac{x+1}{x-1} \geq 2 \right\}$$

α) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(A), P(B), P(\Gamma)$

β) Να βρείτε την πιθανότητα, ώστε να πραγματοποιηθεί το B και οχι το Γ

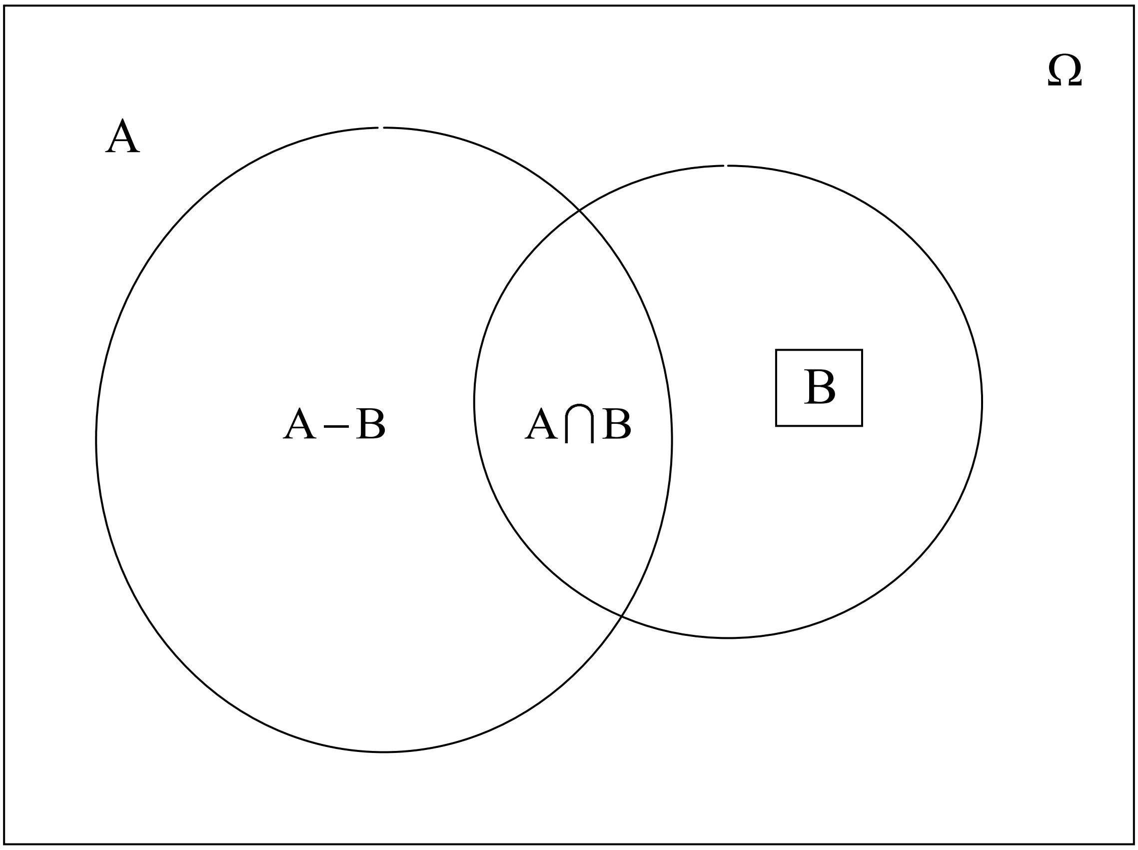
γ) Να βρείτε την πιθανότητα, ώστε να πραγματοποιηθεί μονο ένα απο το B και Γ

δ) Αν s^2 η διακύμανση των τιμών $\lambda, 3\lambda, 5\lambda$ όπου $\lambda \in \Omega$, να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου $K = \{\lambda \in \omega : s^2 > 24\}$

a)Επειδή ο δειγματοχώρος $\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ αποτελείται απο ισοπιθανά ενδεχόμενα θα ισχύει $\mathrm{P}(1)=\mathrm{P}(2)=\cdots=\mathrm{P}(10)=x$

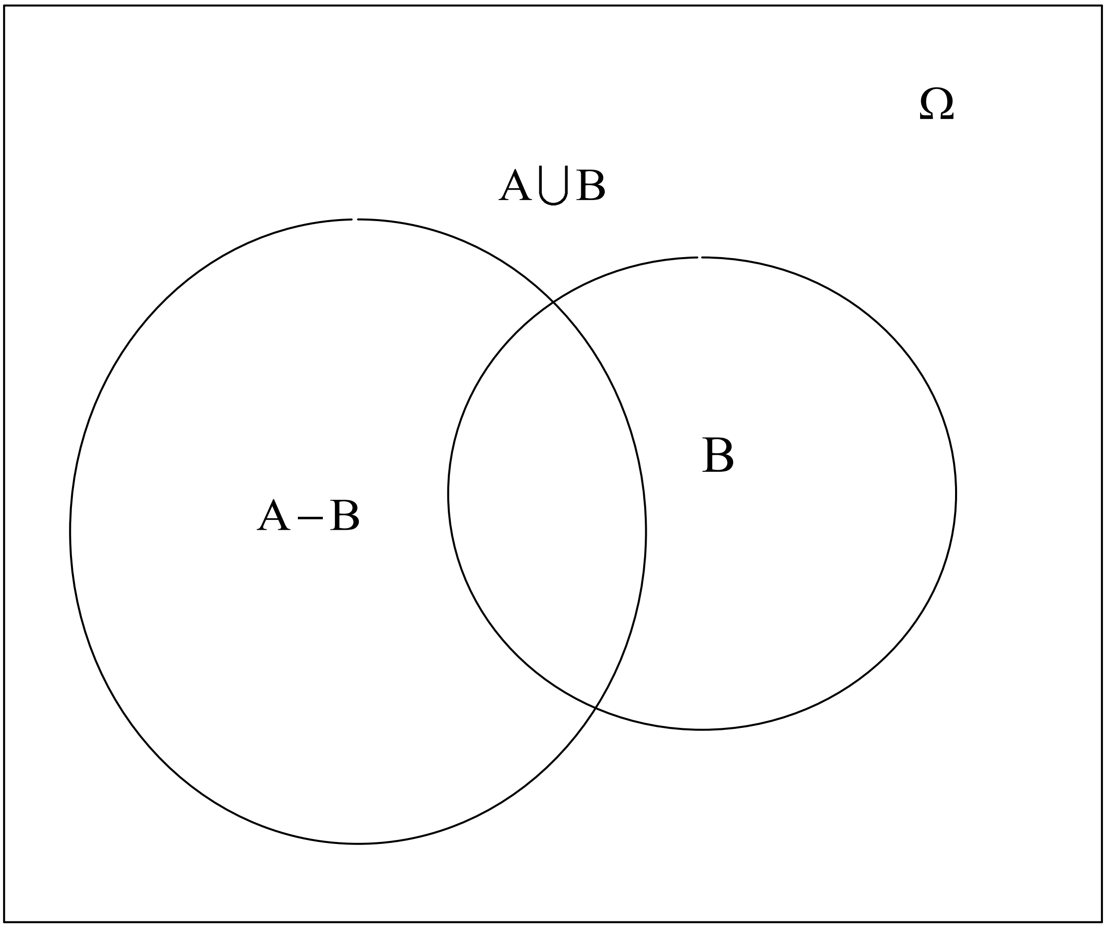
$\mathrm{P}(1)+\mathrm{P}(2)+\cdots+\mathrm{P}(10)=1 \Leftrightarrow \underbrace{x+x+\cdots+x}_{10-\phi o\rho\acute{\varepsilon}\varsigma}=1 \Leftrightarrow 10x=1 \Leftrightarrow$

$x=\dfrac{1}{10}$



$\acute{E}\chi\omega: \mathrm{A}=(\mathrm{A}-\mathrm{B})\cup(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) \overset{\substack{\mathrm{A}-\mathrm{B}=\{2,6\}\\ \mathrm{A}\cap\mathrm{B}=\{1,3,4\}}}{=} \{2,6\}\cup\{1,3,4\}=\{1,2,3,4,6\}$

$\mathrm{P}(\mathrm{A})=\mathrm{P}(1)+\mathrm{P}(2)+\mathrm{P}(3)+\mathrm{P}(4)+\mathrm{P}(6)=\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{10}=\dfrac{5:5}{10:5}=\dfrac{1}{2}$



$$\textit{Έχω}:\mathrm{B}=\left(\mathrm{A}\bigcup \mathrm{B}\right)-\left(\mathrm{A}-\mathrm{B}\right)\overset{\substack{\mathrm{A}\bigcup\mathrm{B}=\{1,2,3,4,5,6\}\\ \mathrm{A}-\mathrm{B}=\{2,6\}}}{=}\{1,2,3,4,5,6\}-\{2,6\}=\{1,3,4,5\}$$

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{B}\right)=\mathrm{P}\left(1\right)+\mathrm{P}\left(3\right)+\mathrm{P}\left(3\right)+\mathrm{P}\left(4\right)+\mathrm{P}\left(5\right)=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{4:2}{10:2}=\frac{2}{5}$$

$\Theta\varepsilon\omega\rho\acute{\omega}\ \tau\eta\nu\ \alpha\nu\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta:$

$$\left\{\begin{matrix}\dfrac{x+1}{x-1}\geq 2\\ x\neq 1\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\dfrac{x+1}{x-1}-2\geq 0\\ x\neq 1\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{2\left(x-1\right)}{x-1}\geq 0\\ x\neq 1\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\dfrac{x+1-2\left(x-1\right)}{x-1}\geq 0\\ x\neq 1\end{matrix}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\dfrac{x+1-2x+2}{x-1}\geq 0\\ x\neq 1\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\dfrac{-x+3}{x-1}\geq 0\\ x\neq 1\end{matrix}\right\}\overset{x\neq 1\Leftrightarrow\left(x-1\right)^2>0}{\Leftrightarrow}\left\{\begin{matrix}\dfrac{-x+3}{\cancel{x-1}}\left(x-1\right)^{\cancel{2}}\geq 0\bullet\left(x-1\right)^2\\ x\neq 1\end{matrix}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\left(-x+3\right)\left(x-1\right)\geq 0\\ x\neq 1\end{matrix}\right\}$$

$$\Theta\varepsilon\omega\rho\acute{\omega}\ \tau\eta\nu\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta:\left(-x+3\right)\left(x-1\right)=0\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}-x+3=0\\ \acute{\eta}\\ x-1=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}x=3\\ \acute{\eta}\\ x=1\end{matrix}\right\}$$

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
$(-x+3)(x-1)$ $x\neq 1$	$-$	‖	$+$	0	$-$

$$\text{Οπότε}: \left\{\begin{matrix} \dfrac{x+1}{x-1}\geq 2 \\ x\neq 1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow x\in[1,3]$$

$$x\in\Gamma \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x\in\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\} \\ x\in[1,3] \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow x\in\{1,2,3\}$$

$$\text{Άρα}: \Gamma=\{1,2,3\}$$

$$P(\Gamma)=P(1)+P(2)+P(3)=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{3}{10}$$

$$\beta)\mathrm{B}\cap\Gamma \overset{\substack{\mathrm{B}=\{1,3,4,5\}\\ \Gamma=\{1,2,3\}}}{=} \{1,3,4,5\}\cap\{1,2,3\}=\{1,3\}$$

$$P(\mathrm{B}\cap\Gamma)=P(1)+P(2)=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{2:2}{10:2}=\frac{1}{5}$$

$$\Delta=\Pi\text{ραγματοποιείται το B και οχι το }\Gamma=\mathrm{B}\cap\Gamma'=\mathrm{B}-\Gamma$$

$$P(\Delta)=P(\mathrm{B}-\Gamma)\overset{P(X-Y)=P(X)-P(X\cap Y)}{=}P(\mathrm{B})-P(\mathrm{B}\cap\Gamma)\overset{\substack{P(\mathrm{B})=\frac{2}{5}\\ P(\mathrm{B}\cap\Gamma)=\frac{1}{5}}}{=}\frac{2}{5}-\frac{1}{5}=\frac{1}{5}$$

$$\gamma)\mathrm{E}=\Pi\text{ραγματοποιείται μονο ένα απο το B και }\Gamma=$$

$$\begin{pmatrix}\Pi\text{ραγματοποιείται το B}\\ \text{αλλά οχι το }\Gamma\end{pmatrix}\text{ή}\begin{pmatrix}\Pi\text{ραγματοποιείται το }\Gamma\\ \text{αλλά οχι το B}\end{pmatrix}=$$

$$=(\mathrm{B}\cap\Gamma')\cup(\Gamma\cap\mathrm{B}')=(\mathrm{B}-\Gamma)\cup(\Gamma-\mathrm{B})$$

$$\text{Επειδή }(\mathrm{B}-\Gamma)\cap(\Gamma-\mathrm{B})=\varnothing\text{ θα έχω}:$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{E})=\mathrm{P}\left((\mathrm{B}-\Gamma)\bigcap(\Gamma-\mathrm{B})\right)\overset{\substack{\text{Αν } \mathrm{X}\bigcap\mathrm{Y}=\varnothing \text{ θα ισχύει:}\\ \mathrm{P}(\mathrm{X}\bigcup\mathrm{Y})=\mathrm{P}(\mathrm{X})+\mathrm{P}(\mathrm{Y})}}{=}\mathrm{P}\left((\mathrm{B}-\Gamma)\right)+\mathrm{P}\left((\mathrm{B}-\Gamma)\right)$$

$$\overset{\mathrm{P}(\mathrm{X}-\mathrm{Y})=\mathrm{P}(\mathrm{X})-\mathrm{P}(\mathrm{X}\bigcap\mathrm{Y})}{=}\mathrm{P}(\mathrm{B})-\mathrm{P}(\mathrm{B}\bigcap\Gamma)+\mathrm{P}(\Gamma)-\mathrm{P}(\mathrm{B}\bigcap\Gamma)=\mathrm{P}(\mathrm{B})+\mathrm{P}(\Gamma)-2\mathrm{P}(\mathrm{B}\bigcap\Gamma)=$$

$$\overset{\substack{\mathrm{P}(\mathrm{B})=\frac{2}{5},\mathrm{P}(\Gamma)=\frac{3}{10}\\ \mathrm{P}(\mathrm{B}\bigcap\Gamma)=\frac{1}{5}}}{=}\frac{2}{5}+\frac{3}{10}-\frac{1}{5}=\frac{1}{5}+\frac{3}{10}=\frac{1\bullet 2}{5\bullet 2}+\frac{3}{10}=\frac{2}{10}+\frac{3}{10}=\frac{5:5}{10:5}=\frac{1}{2}$$

$\delta)\mathrm{X}:\lambda,3\lambda,5\lambda,\lambda\in\Omega$

$$\bar{x}=\frac{t_1+t_2+\bullet\bullet\bullet+t_\nu}{\nu}=\frac{\lambda+3\lambda+5\lambda}{3}=\frac{9\lambda}{3}=3\lambda$$

$$s^2=\frac{\left(t_1-\bar{x}\right)^2+\left(t_2-\bar{x}\right)^2+\bullet\bullet\bullet+\left(t_\nu-\bar{x}\right)^2}{\nu}=\frac{(\lambda-3\lambda)^2+(3\lambda-3\lambda)^2+(5\lambda-3\lambda)^2}{3}$$

$$=\frac{4\lambda^2+4\lambda^2}{3}=\frac{8\lambda^2}{3}$$

$\mathrm{K}=\left\{\lambda\in\omega:s^2>24\right\}$

<u>Ε*υνοϊκές περιπτώσεις του* Κ:</u>

$$\left\{\begin{array}{l}s^2>24\\ \lambda\in\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\cancel{8}\bullet\frac{\lambda^2}{3}>3\bullet\cancel{8}\\ \lambda\in\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}\end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\frac{\lambda^2}{3}\bullet 3>3\bullet 3\\ \lambda\in\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\lambda^2>9\\ \lambda\in\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}\end{array}\right\}$$

$$\overset{\substack{\text{Απο τους αριθμούς } 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 \text{ αυτοί που}\\ \text{ικανοποιούν την σχέση } \lambda^2>9 \text{ είναι οι } 4,5,6,7,8,9,10}}{\Leftrightarrow}\lambda\in\{4,5,6,7,8,9,10\}$$

Άρα οι ευνοϊκές περιπτώσεις του Κ *είναι* 6 *δηλ.* $\mathrm{N}(\mathrm{K})=6$

Ε*πειδή* $\lambda\in\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ *θα έχω* $\mathrm{N}(\Omega)=10$

$$\mathrm{P}(\mathrm{K})=\frac{\mathrm{N}(\mathrm{K})}{\mathrm{N}(\Omega)}=\frac{6:2}{10:2}=\frac{3}{5}$$

11.

Δίνεται ενα δείγμα πέντε μονοψήφιων ακεραίων θετικών αριθμών Τέσσερις απο αυτούς είναι $2,3,6,8$. Έστω δ η διάμεσος του δείγματος και $\bar{x}$ η μέση τιμή του. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα μονοψήφιο θετικό αριθμό (ο δειγματοχώρος είναι $\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$) για πέμπτο αριθμό του δείγματος να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων α) $A=\{$Η διάμεσος είναι $3\}$ β) $B=\{$Η διάμεσος είναι $6\}$ γ) $\Gamma=\{$Η διάμεσος είναι $7\}$ δ) $\Delta=\{$Η διάμεσος είναι $5\}$ ε) $E=\{$Η μέση τιμή είναι μονοψήφιος θετικός αριθμός $\}$

α) $A=\{$Η διάμεσος είναι $3\}$

<u>Ευνοϊκές περιπτώσεις για το A:</u>

$\lambda\in\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

Έχω το δείγμα $2,3,6,8,\lambda$ (Όχι κατα ανάγκη διατεταγμένο κατά αύξουσα σειρά)

Η διάμεσος $\delta=3$ να χωρίζει το δείγμα σε δυο ίσα μέρη. Δηλαδή θα πρέπει το πλήθος των στοιχείων που είναι μικρότερα ή ίσα του 3 να είναι ίσο με το πλήθος των στοιχείων που είναι μεγαλύτερα ή ίσα του 3. Στο δείγμα $2,3,6,8,\lambda$ υπάρχουν δυο στοιχεία το 6 και το 8 που είναι μεγαλύτερα του 3

Αν έχω $\lambda>3$ τότε το πλήθος των στοιχείων το πλήθος των στοιχείων που είναι μεγαλύτερα ή ίσα του 3 θα είναι 3 ενω το πλήθος των στοιχείων που είναι μικρότερα ή ίσα του 3 θα είναι 2 (Άτοπο)

Οπότε $\lambda=1$ ή $\lambda=2$ ή $\lambda=3$

Αν $\lambda=1$ έχω το δείγμα $1,2,3,6,8$ με $\delta=3$

Αν $\lambda=2$ έχω το δείγμα $2,2,3,6,8$ με $\delta=3$

Αν $\lambda=3$ έχω το δείγμα $2,3,3,6,8$ με $\delta=3$

$\Sigma \upsilon \nu \varepsilon \pi \acute{\omega} \varsigma$ *έχω τρείς επιλογές για το* λ. *Οπότε* $\mathrm{N}(\mathrm{A}) = 3$

Επειδή $\lambda \in \Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ *έχω* $\mathrm{N}(\Omega) = 9$

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \frac{\mathrm{N}(\mathrm{A})}{\mathrm{N}(\Omega)} = \frac{3:3}{9:3} = \frac{1}{3}$$

β) $\mathrm{B} = \{$Η *διάμεσος είναι* $6\}$

<u>*Ευνοϊκές περιπτώσεις για το* B:</u>

$\lambda \in \Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

Έχω το δείγμα $2,3,6,8,\lambda$ (*Όχι κατα ανάγκη διατεταγμένο κατά αύξουσα σειρά*)

Η *διάμεσος* $\delta = 6$ *χωρίζει το δείγμα σε δυο ίσα μέρη. Δηλαδή θα πρέπει το πλήθος των στοιχείων που είναι μικρότερα ή ίσα του* 6 *να είναι ίσο με το πλήθος των στοιχείων που είναι μεγαλύτερα ή ίσα του* 6. *Στο δείγμα* $2,3,6,8,\lambda$ *υπάρχουν δυο στοιχεία το* 2 *και το* 3 *που είναι μεγαλύτερα του* 6

Αν έχω $\lambda < 6$ *τότε το πλήθος των στοιχείων το πλήθος των στοιχείων που είναι μικρότερα ή ίσα του* 6 *θα είναι* 3 *ενω το πλήθος των στοιχείων που είναι μεγαλύτερα ή ίσα του* 6 *θα είναι* 2 (*Άτοπο*)

Οπότε $\lambda = 6$ *ή* $\lambda = 7$ *ή* $\lambda = 8$ *ή* $\lambda = 9$

Αν $\lambda = 6$ *έχω το δείγμα* $2,3,6,6,8$ *με* $\delta = 6$

Αν $\lambda = 7$ *έχω το δείγμα* $2,3,6,7,8$ *με* $\delta = 6$

Αν $\lambda = 8$ *έχω το δείγμα* $2,3,6,8,8$ *με* $\delta = 6$

Αν $\lambda = 9$ *έχω το δείγμα* $2,3,6,8,9$ *με* $\delta = 6$

Συνεπώς έχω τέσσερις επιλογές για το λ. *Οπότε* $\mathrm{N}(\mathrm{A}) = 4$

Επειδή $\lambda \in \Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ *έχω* $\mathrm{N}(\Omega) = 9$

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \frac{\mathrm{N}(\mathrm{A})}{\mathrm{N}(\Omega)} = \frac{4}{9}$$

$\gamma)\Gamma = \{\text{Η } \textit{διάμεσος είναι } 7\}$

$\textit{Έχω το δείγμα } 2,3,6,8,\lambda, \lambda \in \Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$(\textit{Όχι κατα ανάγκη διατεταγμένο κατά αύξουσα σειρά})$

Ε*πειδή το πλήθος του δείγματος είναι περιττός αριθμός η διάμεσος*
$\delta = 7$ *είναι στοιχείο του δείγματος.*Ο*πότε θα πρέπει* $\lambda = 7$.Τ*ότε*
έχω το δείγμα $2,3,6,7,8$ *που έχει διάμεσο* $6!!!$(*Άτοπο*)

Σ*υνεπώς το δείγμα* $2,3,6,8,\lambda, \lambda \in \Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ *δεν μπορεί να έχει διάμεσο* 7.*Άρα* $\Gamma = \varnothing$.Ο*πότε* $P(\Gamma) = 0$

$\delta)\Delta = \{\text{Η } \textit{διάμεσος είναι } 5\}$

<u>Ε*υνοϊκές περιπτώσεις για το* Δ</u>

$\textit{Έχω το δείγμα } 2,3,6,8,\lambda, \lambda \in \Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$(\textit{Όχι κατα ανάγκη διατεταγμένο κατά αύξουσα σειρά})$

Ε*πειδή το πλήθος του δείγματος είναι περιττός αριθμός η διάμεσος*
$\delta = 5$ *είναι στοιχείο του δείγματος.*Ο*πότε θα πρέπει* $\lambda = 5$.Τ*ότε*
έχω το δείγμα $2,3,5,6,8$ *που έχει διάμεσο* 5

Σ*υνεπώς έχω μια επιλογή για το* λ.Ο*πότε* $N(\Delta) = 1$

Ε*πειδή* $\lambda \in \Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ *έχω* $N(\Omega) = 9$

$$P(\Delta) = \frac{N(\Delta)}{N(\Omega)} = \frac{1}{9}$$

$\varepsilon)E = \{\text{Η } \textit{μέση τιμή είναι μονοψήφιος θετικός αριθμός }\}$

<u>Ε*υνοϊκές περιπτώσεις για το* Ε</u>

$\textit{Έχω το δείγμα } 2,3,6,8,\lambda, \lambda \in \Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$1 \le \lambda \le 9 \Leftrightarrow 2+3+6+8+1 \le 2+3+6+8+\lambda \le 9+2+3+6+8 \Leftrightarrow$

$20 \le 2+3+6+8+\lambda \le 28$

Η *μέση του τιμή του δείγματος* $2,3,6,8,\lambda\ , \lambda \in \Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
για να είναι ακέραιος αριθμός θα πρέπει το άθροισμα των παρατηρήσεων του δηλ. το $\lambda + 2+3+6+8 = \lambda + 19$ *να είναι πολλαπλάσιο του* 5.Ε*πειδή* $20 \le \lambda + 19 \le 28$ *και* $\lambda + 19$ *πολλαπλάσιο του* 5 *θα έχω*:

$\lambda + 19 = 20$ *ή* $\lambda + 19 = 28$

$$\left.\begin{cases}\lambda+19=20\\ \lambda\in\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}\end{cases}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{cases}\lambda=20-19\\ \lambda\in\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}\end{cases}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{cases}\lambda=1\\ \lambda\in\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}\end{cases}\right\}\Leftrightarrow\lambda=1$$

$$\left.\begin{cases}\lambda+19=28\\ \lambda\in\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}\end{cases}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{cases}\lambda=28-19\\ \lambda\in\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}\end{cases}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{cases}\lambda=9\\ \lambda\in\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}\end{cases}\right\}\Leftrightarrow\lambda=9$$

$\Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ \delta\upsilon o\ \varepsilon\pi\iota\lambda o\gamma\acute{\varepsilon}\varsigma\ \gamma\iota\alpha\ \tau o\ \lambda.\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \mathrm{N}(\mathrm{E})=2$

$\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \lambda\in\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ \mathrm{N}(\Omega)=9$

$$\mathrm{P}(\mathrm{E})=\frac{\mathrm{N}(\mathrm{E})}{\mathrm{N}(\Omega)}=\frac{2}{9}$$