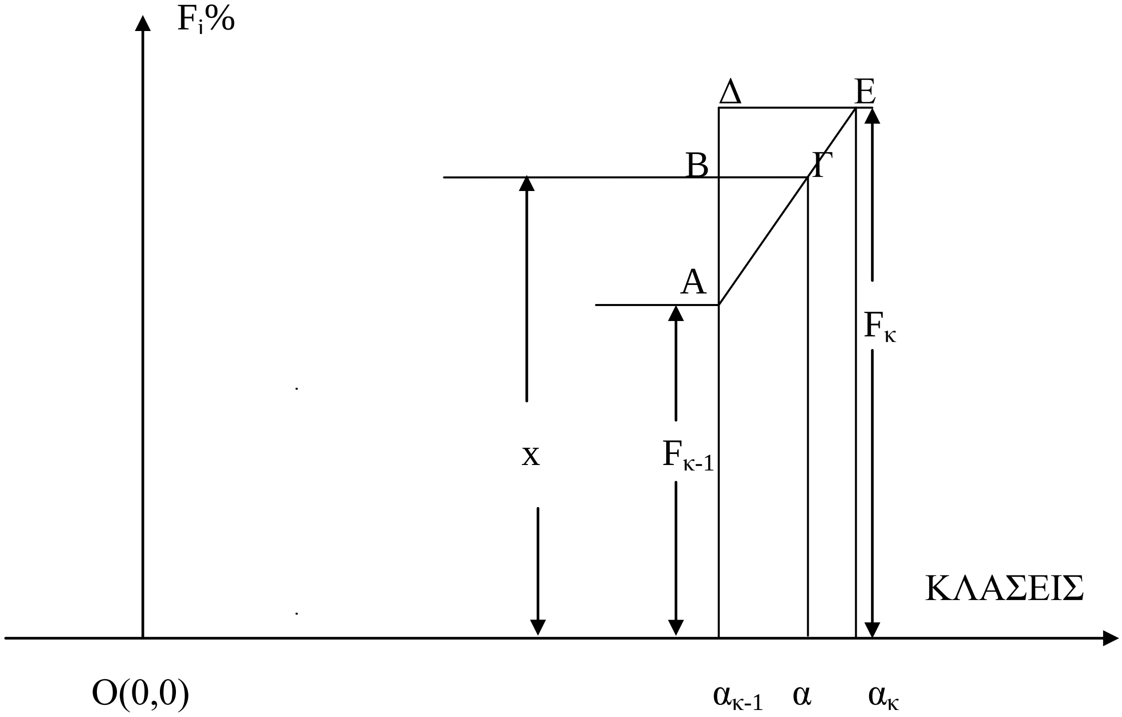
Πως βρω το ποσοστό των στοιχείων που είναι το πολύ α όπου α είναι εσωτερικό σημείο μιας κλάσης σε μια συνεχή κατανομή

(I)Κατασκευάζω το ιστόγραμμα σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων
(II)Έστω το στοιχείο α είναι εσωτερικό σημείο της κλάσης $[\alpha_{\kappa-1},\alpha_{\kappa})$
(III)Το πλήθος των στοιχείων που είναι το πολύ α είναι x



$Έχω: \mathrm{A}(\alpha_{\kappa-1},F_{\kappa-1}),\mathrm{E}(\alpha_{\kappa},F_{\kappa}),\Delta(\alpha_{\kappa-1},F_{\kappa})$

Φέρνω την κάθετο στον άξονα των κλάσεων στο σημέο $(\alpha,0)$ *που τέμνει την ευθεία* ΑΕ *στο* Γ.Α*πο το* Γ *φέρνω την παράλληλο προς την άξονα των κλάσεων που τέμνει την* ΑΔ *στο* Β.Τ*ότε ισχύει* $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}} \approx \overset{\Delta}{\mathrm{A\Delta E}}$ *γιατί* :

$$\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\,\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = \Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E}\,(\Omega\varsigma\ \kappa o\iota\nu\acute{\eta}\ \gamma\omega\nu\acute{\iota}\alpha)\\ (\mathrm{II})\,\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma = \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E}\,(\Omega\varsigma\ o\rho\theta\acute{\varepsilon}\varsigma)\end{array}\right\}$$

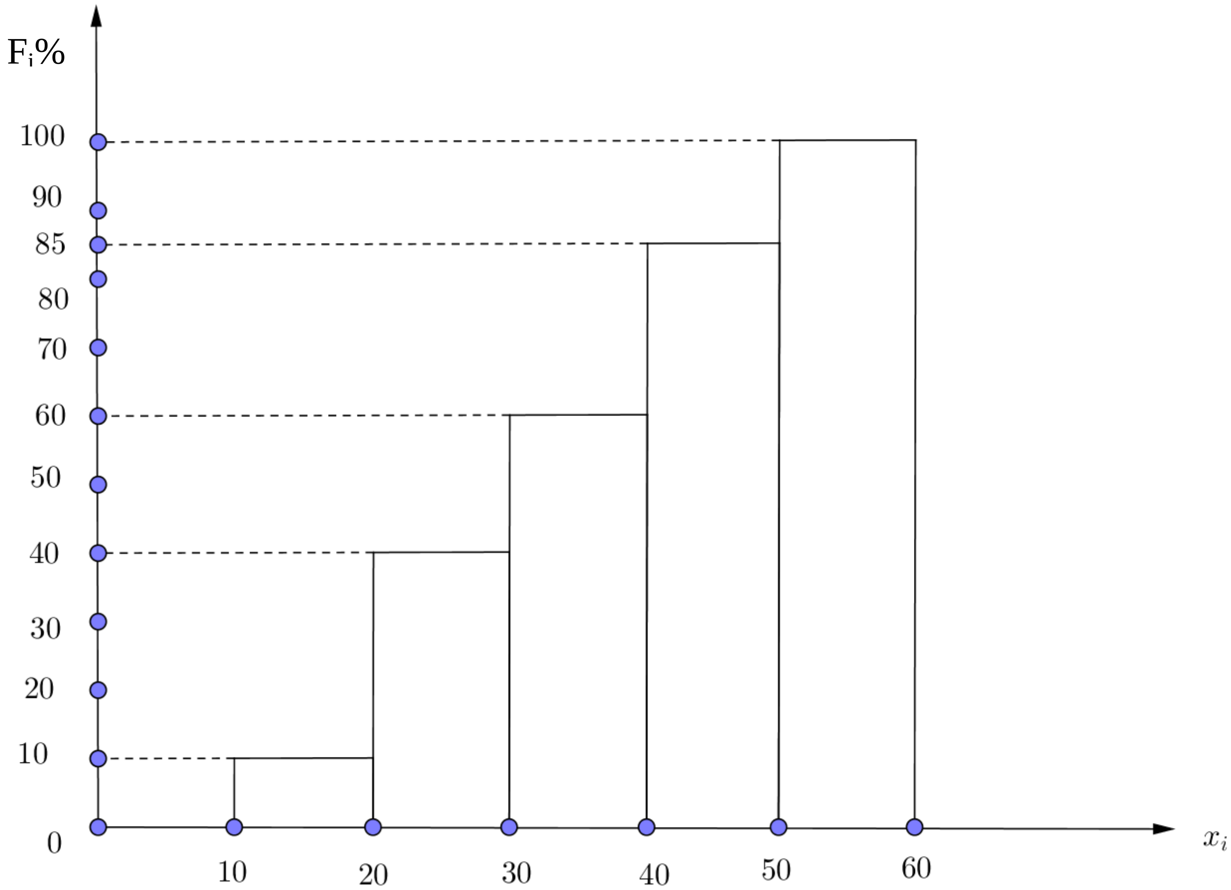
Ο*πότε απο το λόγο ομοιότητας των όμοιων τριγώνων* $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}} \approx \overset{\Delta}{\mathrm{A\Delta E}}$ *θα έχω*:

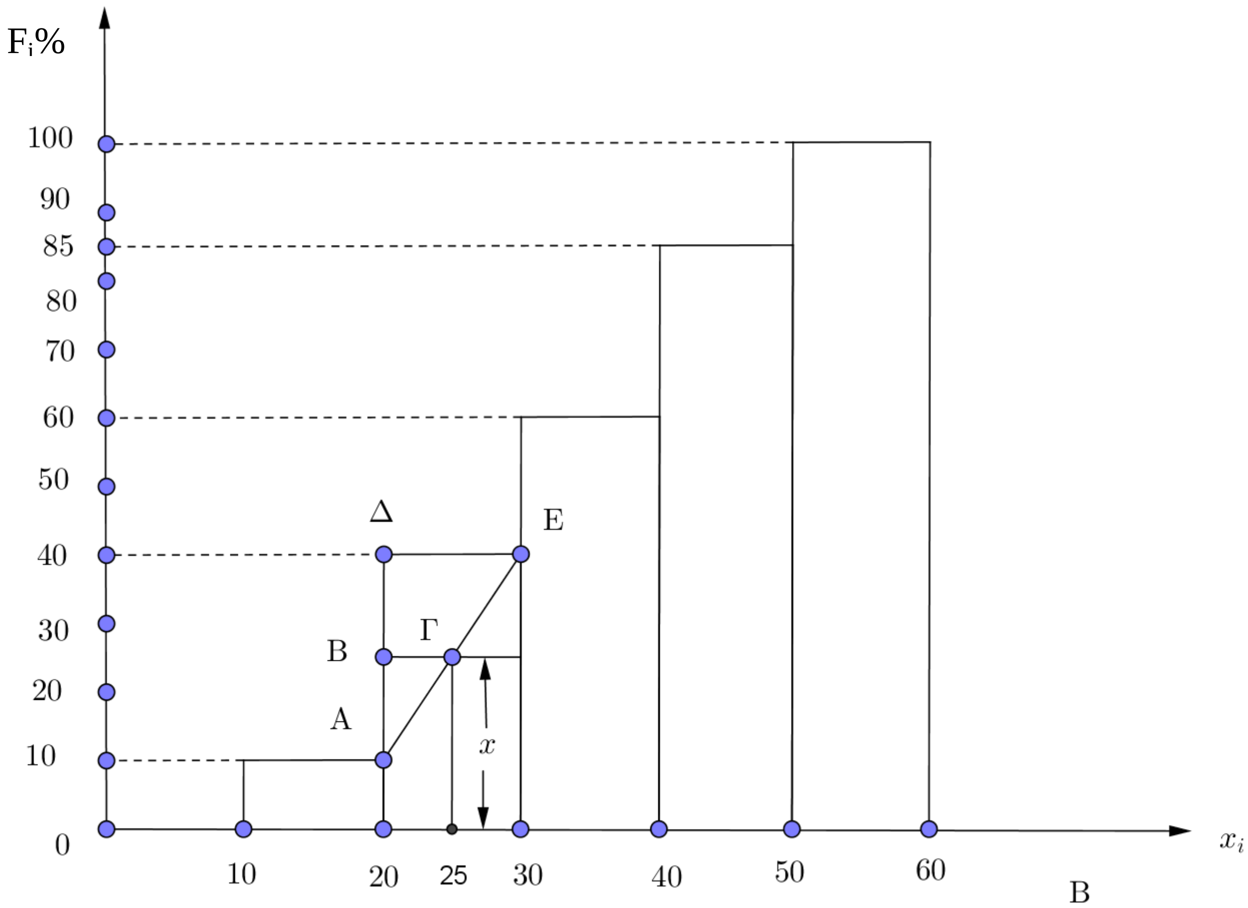
$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A\Delta}} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{\Delta\mathrm{E}} \Leftrightarrow \frac{x-F_{\kappa-1}}{F_{\kappa}-F_{\kappa-1}} = \frac{\alpha-\alpha_{\kappa-1}}{\alpha_{\kappa}-\alpha_{\kappa-1}} \Leftrightarrow \Pi\rho o\sigma\delta\iota o\rho\acute{\iota}\zeta\omega\ \tau o\ x$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1.

Δίνεται το ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων $F_i\%$ ομαδοποιημένων παρατηρήσεων.Να βρεθεί το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι το πολύ 25





Έστω το ποσοστό των παρατητρήσεων που είναι το πολύ 25 *είναι* x%.

Έχω $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}} \approx \overset{\Delta}{\mathrm{A\Delta E}}$ *γιατί* :

$$\begin{cases} (\mathrm{I})\,\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = \Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E}\,(\Omega\varsigma\ \textit{κοινή γωνία}) \\ (\mathrm{II})\,\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma = \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E}\,(\Omega\varsigma\ \textit{ορθές}) \end{cases}$$

Ο*πότε απο το λόγο ομοιότητας των όμοιων τριγώνων* $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}} \approx \overset{\Delta}{\mathrm{A\Delta E}}$
θα έχω:

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A\Delta}} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{\Delta E}} \Leftrightarrow \frac{x-10}{40-10} = \frac{25-20}{30-20} \Leftrightarrow \frac{x-10}{30} = \frac{5}{10} \Leftrightarrow \frac{x-10}{30} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\bullet\frac{x-10}{15} = \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\bullet 1 \overset{\substack{\text{Αν } \gamma\neq 0 \text{ τότε ισχύει ο νόμος} \\ \text{της διαγραφής:} \\ \alpha\bullet\gamma=\beta\bullet\gamma\Leftrightarrow\alpha=\beta}}{\Longleftrightarrow} \frac{x-10}{15} = 1 \Leftrightarrow x-10 = 15 \Leftrightarrow x = 25$$

2.

Οι χρόνοι αναμονής των πελατών σε μια τράπεζα ήταν οι ακόλουθοι :

Κλάσεις	Συχνότητα
[3,8)	10
[8, 13)	16
[13, 18)	14
[18, 23)	8
[23, 28)	2

I) Να γίνει ο πίνακας σχετικών συχνοτήτων και αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων
II) Να γίνει το ιστόγραμμα και το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων
III) Να βρεθεί το ποσοστο των πελατών που περιμένουν το πολύ 10,5 λεπτά
IV) Να βρεθεί το ποσοστό των πελατών που περιμένουν τουλάχιστον 18 λεπτά

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

I)

ΚΛΑΣΕΙΣ	ν_i	f_i	f_i %
[3,8)	10	0,2	20
[8,13)	16	0,32	32
[13,18)	14	0,28	28
[18,23)	8	0,16	16
[23,28)	2	0,04	4
ΣΥΝΟΛΟ	50	1	100

$$f_1 = \frac{\boldsymbol{\nu_1}}{\nu_{o\lambda}} = \frac{\mathbf{10}}{50} = 0{,}2 \text{ , } f_1 \% = f_1 100 = 0{,}2 \cdot 100 = 20 \%$$

$$f_2 = \frac{\boldsymbol{\nu_2}}{\nu_{o\lambda}} = \frac{\mathbf{16}}{50} = 0{,}32 \text{ , } f_2 \% = f_2 100 = 0{,}32 \cdot 100 = 32 \%$$

$$f_3 = \frac{\nu_3}{\nu_{o\lambda}} = \frac{14}{50} = 0{,}28 \text{ , } f_3\,\% = f_3\,100 = 0{,}28 \cdot 100 = 28\ \%$$

$$f_4 = \frac{\nu_4}{\nu_{o\lambda}} = \frac{8}{50} = 0{,}16 \text{ , } f_4\,\% = f_4\,100 = 0{,}16 \cdot 100 = 16\ \%$$

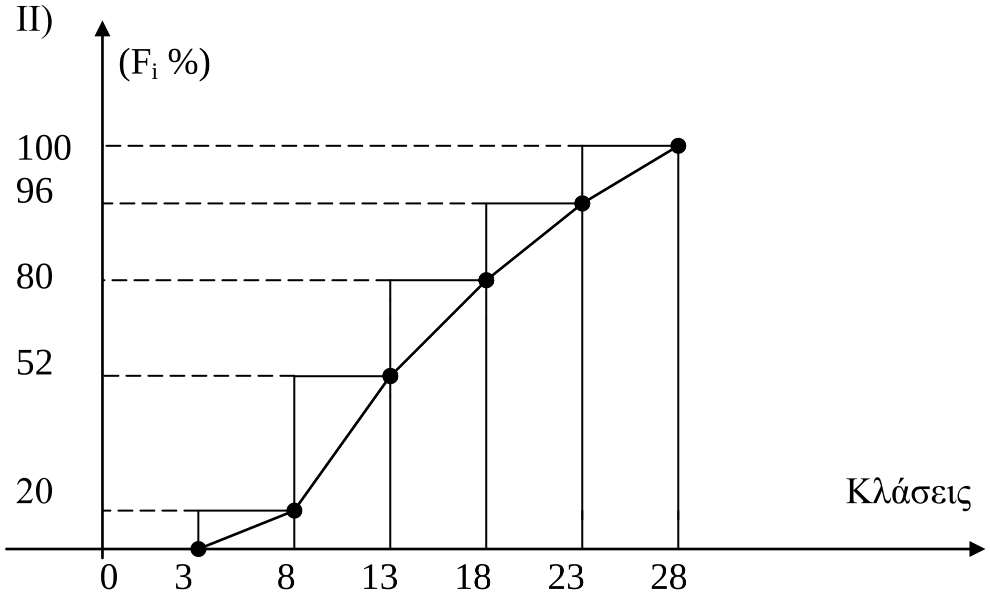
$$f_5 = \frac{\nu_5}{\nu_{o\lambda}} = \frac{2}{50} = 0{,}04 \text{ , } f_5\,\% = f_5\,100 = 0{,}04 \cdot 100 = 4\ \%$$

x_i	ν_i	f_i	F_i	F_i %
[3,8)	10	0,2 (+)	0,2	20
[8,13)	16	0,32 (+)	0,52	52
[13,18)	14	0,28 (+)	0,8	80
[18,23)	8	0,16 (+)	0,96	96
[23,28)	2	0,04	1	100
ΣΥΝΟΛΟ	50	1	_	_

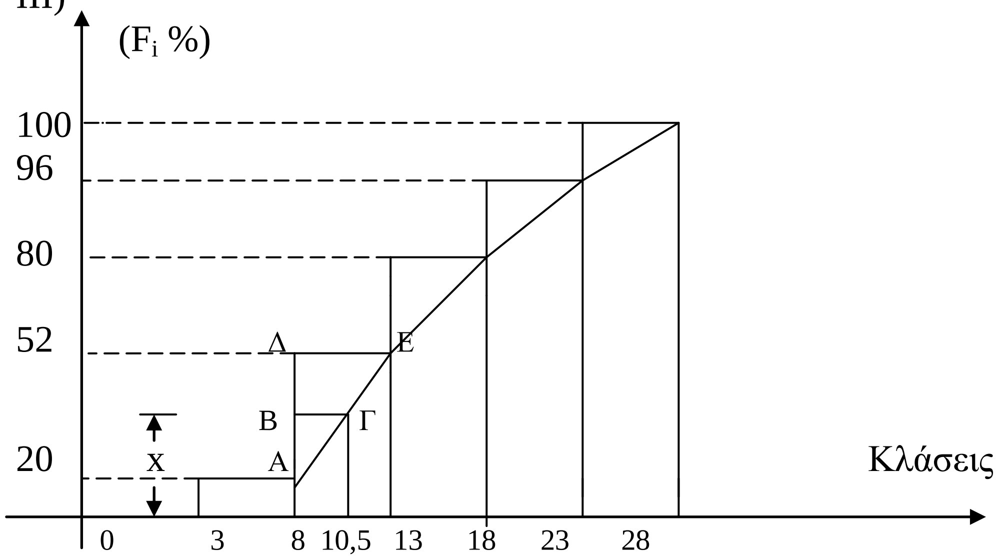
$F_1 = f_1 = 0{,}2$
$F_2 = F_1 + f_2 = 0{,}2 + 0{,}32 = 0{,}52$
$F_3 = F_2 + f_3 = 0{,}52 + 0{,}28 = 0{,}8$
$F_4 = F_3 + f_4 = 0{,}8 + 0{,}16 = 0{,}96$
$F_5 = F_4 + f_5 = 0{,}96 + 0{,}04 = 1$

$F_1\,\% = F_1\ 100 = 0{,}2 \bullet 100 = 20\%$
$F_2\,\% = F_2\ 100 = 0{,}32 \bullet 100 = 32\%$
$F_3\,\% = F_3\ 100 = 0{,}8 \bullet 100 = 80\%$
$F_4\,\% = F_4\ 100 = 0{,}96 \bullet 100 = 96\%$
$F_5\,\% = F_5\ 100 = 1 \bullet 100 = 100\%$

II)



III)



Έστω το ποσοστό των πελατών που περιμένουν το πολύ 25 *είναι x*%.

Έχω $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}} \approx \overset{\Delta}{\mathrm{A\Delta E}}$ *γιατί* :

$$\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\, \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = \Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E}\,(\Omega\varsigma\ \textit{κοινή γωνία}) \\ (\mathrm{II})\, \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma = \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E}\,(\Omega\varsigma\ \textit{ορθές})\end{array}\right\}$$

Ο*πότε απο το λόγο ομοιότητας των όμοιων τριγώνων* $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}} \approx \overset{\Delta}{\mathrm{A\Delta E}}$
θα έχω:

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A\Delta}}=\frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{\Delta E}}\Leftrightarrow\frac{x-20}{52-20}=\frac{10,5-8}{13-8}\Leftrightarrow\frac{x-20}{32}=\frac{2,5}{5}\Leftrightarrow\frac{x-20}{32}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\bullet\frac{x-20}{16}=\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\bullet 1 \overset{\substack{\text{Αν } \gamma\neq 0 \text{ τότε ισχύει ο νόμος} \\ \text{της διαγραφής:} \\ \alpha\bullet\gamma=\beta\bullet\gamma\Leftrightarrow\alpha=\beta}}{\Longleftrightarrow} \frac{x-20}{16}=1\Leftrightarrow x-20=16\Leftrightarrow x=36$$

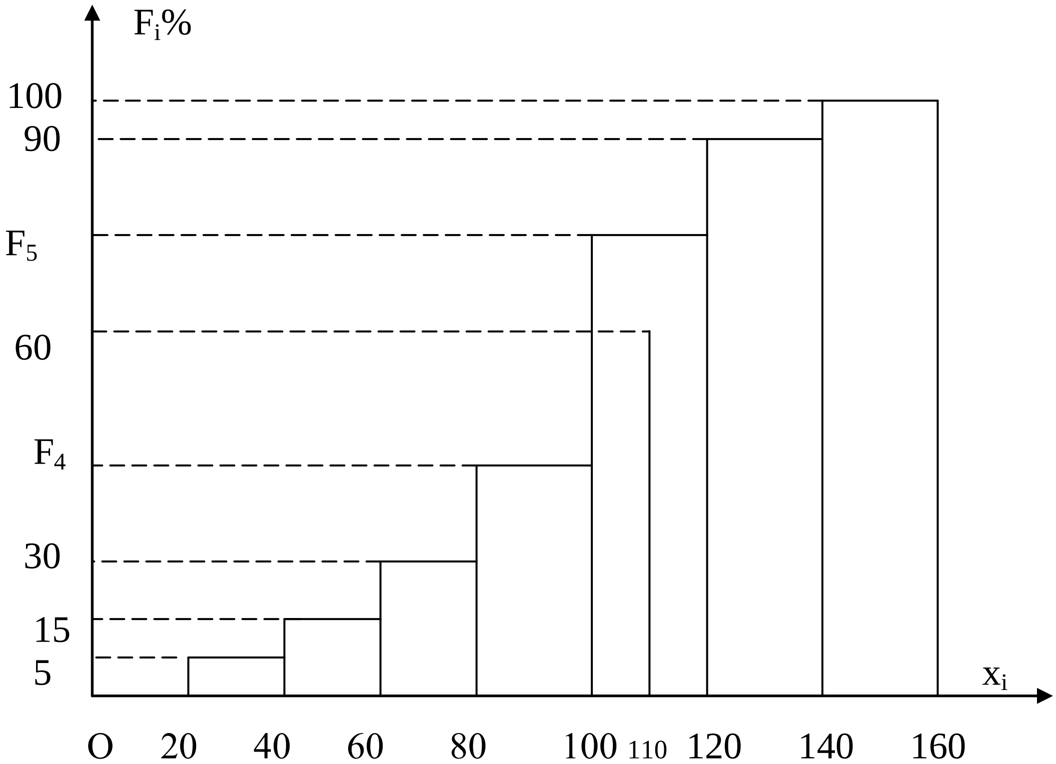
IV) Το ποσοστό των πελατών που περιμένουν τουλάχιστον 18 λεπτά είναι :

100 – $\boxed{\text{Το ποσοστό των πελατών που περιμένουν τουλάχιστον 18 λεπτά}}$ =

= 100 – F_3 = 100 – 80 = 20%

3.

Δίνεται το παρακάτω ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων F_i%.Αν είναι γνωστό ότι το 50% των τιμών των τιμών της Χ είναι μικρότερο του 100 και το 60% των τιμών της Χ είναι μικρότερο ή ίσο του 110 να βρείτε :



α) τη σχετική συχνότητα f_4 της κλάσης [80,100)

β) την αθροιστική σχετική συχνότητα F_5% της κλάσης [100,200)

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

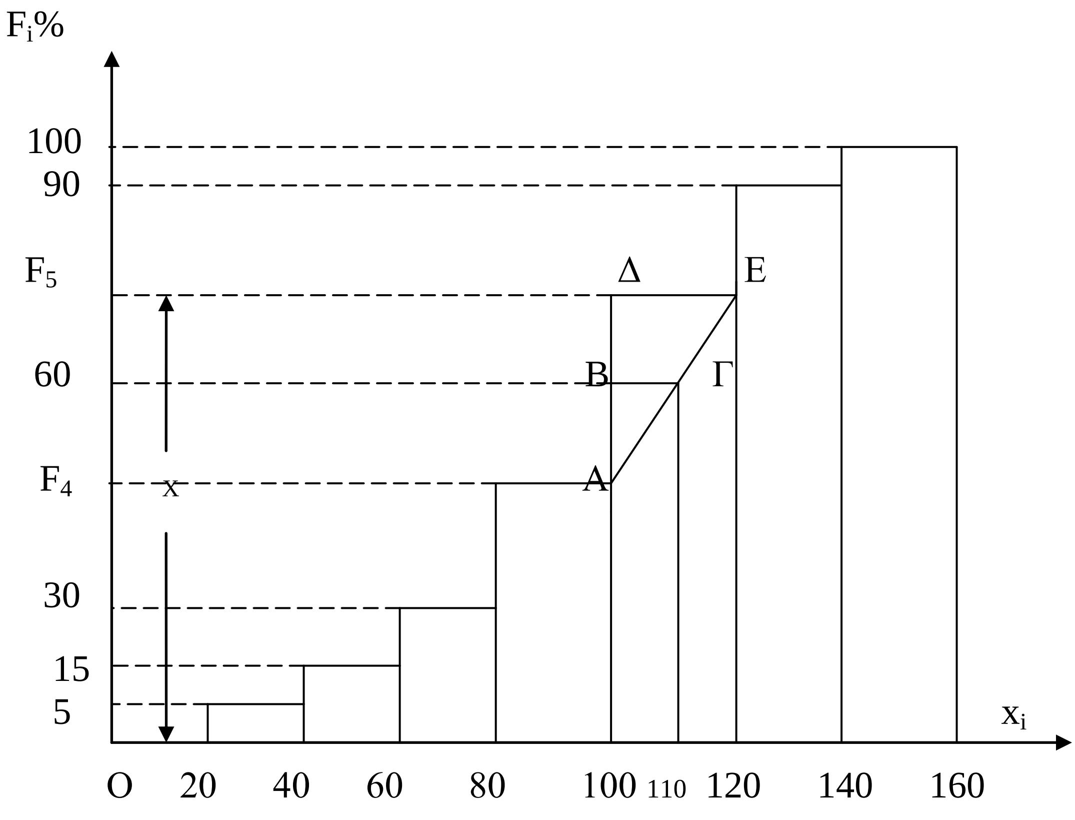
α)

ΚΛΑΣΕΙΣ	F_i%
[20,40)	5
[40,60)	15
[60,80)	30
[80,100)	F_4
[100,120)	F_5
[120,140)	90
[140,160)	100

Επειδή το 50% των τιμών των τιμών της X είναι μικρότερο του 100 θα έχω $F_4 = 50$ %

$F_4 = F_3 + f_4 \Leftrightarrow 50 = 30 + f_4 \Leftrightarrow f_4 = 50 - 30 \Leftrightarrow f_4 = 20$ %

β)



$Έστω\ F_5\% = x\%$

$Έχω\ \overset{\Delta}{\mathrm{ΑΒΓ}} \approx \overset{\Delta}{\mathrm{ΑΔΕ}}\ γιατί:$

$$\begin{cases} (\mathrm{I})\,\mathrm{Β}\hat{\mathrm{Α}}\mathrm{Γ} = \mathrm{Δ}\hat{\mathrm{Α}}\mathrm{Ε}\,(\mathrm{Ω}ς\ κοινή\ γωνία) \\ (\mathrm{II})\,\mathrm{Α}\hat{\mathrm{Β}}\mathrm{Γ} = \mathrm{Α}\hat{\mathrm{Δ}}\mathrm{Ε}\,(\mathrm{Ω}ς\ ορθές) \end{cases}$$

$\mathrm{Ο}πότε\ απο\ το\ λόγο\ ομοιότητας\ των\ όμοιων\ τριγώνων\ \overset{\Delta}{\mathrm{ΑΒΓ}} \approx \overset{\Delta}{\mathrm{ΑΔΕ}}$
$θα\ έχω:$

$$\frac{\mathrm{ΑΒ}}{\mathrm{ΑΔ}} = \frac{\mathrm{ΒΓ}}{\mathrm{ΔΕ}} \Leftrightarrow \frac{60-F_4}{x-F_4} = \frac{110-100}{120-100} \overset{F_4\%=50\%}{\Longleftrightarrow} \frac{60-50}{x-50} = \frac{10}{20} \Leftrightarrow \frac{\cancel{10}}{x-50} = \frac{\cancel{10}}{20} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x-50 = 20 \Leftrightarrow x = 70$

ΤΟ 4ο ΘΕΜΑ ΤΟΥ 2000

Στα σχολεία του δήμου υπηρετούν 100 εκπαιδευτικοί. Ο συνολικός χρόνος υπηρεσίας των εκπαιδευτικών δίνεται από τον παρακάτω πίνακα.

Χρόνια υπηρεσίας	Σχετική συχνότητα %
[0,5)	10
[5,10)	15
[10,15)	12
[15,20)	18
[25,30)	18
[30,35)	12

Α)Πόσοι εκπαιδευτικοί έχουν τουλάχιστον 15 χρόνια υπηρεσίας
Β)Με την προϋπόθεση ότι κάθε εκπαιδευτικός θα συνταξιοδοτηθεί όταν συμπληρώσει 35 χρόνια:
α)πόσοι εκπαιδευτικοί θα συνταξιοδοτηθούν μέσα σε 12,5 χρόνια; Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας.
γ)πόσοι συνολικά εκπαιδευτικοί πρέπει να προσληφθούν μέσα στα επόμενα πέντε χρόνια, ώστε ο αριθμός των εκπαιδευτικών που υπηρετούν στα σχολεία του δήμου να παραμένει ο ίδιος

Υπόδειξη του α:
Οι εκπαιδευτικοί που θα συνταξιοδοτηθούν μετά απο 12,5 χρόνια τα χρόνια υπηρεσίας που έχουν είναι τουλάχιστον 35.Οπότε προτού 12,5 χρόνια τα χρόνια υπηρεσίάς που έχουν είναι τουλάχιστον 35-12,5=22,5Οπότε ψάχνω πόσοι εκπαιδευτικοί έχουν χρόνια υπηρεσίας τουλάχιστον 22,5

Απάντηση του β:
Στα επόμενα 5 χρόνια ο αριθμός των εκπαιδευτικών που θα συνταξιοδοτηθεί θα έχει συμπληρώσει τουλάχιστον 35 χρόνια.Άρα οι εκπαιδευτικοί που θα συνταξιοδοτηθούν μέσα σε 5 χρόνια τώρα έχουν χρόνια υπηρεσίας από 30 έως 35 χρόνια.Συνεπώς στα επόμενα 5 χρόνια θα συνταξιοδοτηθούν 12 άτομα.Οπότε πρέπει να προσληφθούν 12 άτομα