ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ(SOS)
ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ
Η *συνάρτηση* f *με πεδίο ορισμού* Α *λέγεται συνεχής αν για κάθε* $x_0 \in \mathrm{A}$ *ισχύει* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

Έστω η συνάρτηση $f : D_f \to \mathbb{R}\left(D_f : \text{Το πεδίο ορισμού της } f\right)$ *και* $x_0 \in D_f$

Α*ν υπάρχει το όριο* $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ *και είναι πραγματικός αριθμός τότε η συνάρτηση* f *είναι παραγωγίσιμη στο σημείο* x_0 *και ισχύει:*

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$f'(x_0)$: Η *παράγωγος της* f *στο σημείο* x_0

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ
$\left(f(x)+g(x)\right)' = f'(x)+g'(x)$
$\left(f(x)-g(x)\right)' = f'(x)-g'(x)$
$\left(\lambda f(x)\right)' = \lambda f'(x), \lambda : \Sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}$
$\left(f(x)g(x)\right)' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
$\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}, g(x)\neq 0$
$\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x))g'(x)$

ΕΝΑΣ ΧΡΗΣΙΜΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ
$(c)' = 0, c : \Sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}$

$\left(x\right)'=1$
$\left(x^{a}\right)'=ax^{a-1}$

ΠΡΟΣΟΧΗ!!!
$\alpha^{-x}=\frac{1}{a^{x}},a\neq 0$
$\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}=\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}},\alpha>0,\mu,\nu\in\mathbb{N}^{*}$

ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ ΣΤΟΥΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

1.

$\mathrm{N}\alpha\ \alpha\pi o\delta\varepsilon\acute{\iota}\xi\varepsilon\tau\varepsilon\ o\tau\iota\ \left(c\right)'=0$ *όπου c ένας σταθερός πραγματικός αριθμός*

Θεωρώ τη συνάρτηση $f\left(x\right)=c$ *όπου c ένας σταθερός πραγματικός αριθμός*

Αν $h\neq 0$ *θα έχω*:

$$\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}\overset{\substack{\text{Ότι και να "βάλω μέσα στην } f\text{"}\\ \text{πάντα παίρνω } c}}{=}\frac{c-c}{h}=\frac{0}{h}=0$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}=\lim_{h\to 0}0=0$$

Ε*πειδή υπάρχει το* $\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}$ *και είναι πραγματικός αριθιμός*

η συνάρτηση f *είναι παραγωγίσιμη στο x και ισχύει*:

$$f'\left(x\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)-f\left(h\right)}{h}=0$$

$$\left(f\left(x\right)\right)'=0\overset{f(x)=c}{\Longrightarrow}\left(c\right)'=0$$

2.

Ν*α αποδείξετε οτι* $\left(x\right)'=1$

$\Theta\varepsilon\omega\rho\acute{\omega}\ \tau\eta\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f(x)=x$

$\mathrm{A}\nu\ h\neq 0\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \overset{\substack{\text{Η συνάρτηση } f(x)=x \\ \text{μου δίνει την τιμή που υπάρχει} \\ \text{"μέσα στην } f\text{"}}}{=} \frac{x+h-x}{h}=\frac{h}{h}=1$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}1=1$$

$\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota\ \tau o\ \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\ \kappa\alpha\iota\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \pi\rho\alpha\gamma\mu\alpha\tau\iota\kappa\acute{o}\varsigma\ \alpha\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma$

$\eta\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \pi\alpha\rho\alpha\gamma\omega\gamma\acute{\iota}\sigma\iota\mu\eta\ \sigma\tau o\ x\ \kappa\alpha\iota\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota:$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=1$$

$$\left(f(x)\right)'=0 \overset{f(x)=x}{\Longrightarrow} (x)'=1$$

3.

$\boxed{\mathrm{N}\alpha\ \alpha\pi o\delta\varepsilon\acute{\iota}\xi\varepsilon\tau\varepsilon\ o\tau\iota\ \left(x^2\right)'=2x}$

$\Theta\varepsilon\omega\rho\acute{\omega}\ \tau\eta\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f(x)=x^2$

$\mathrm{A}\nu\ h\neq 0\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(x+h)^2-x^2}{h} \overset{(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2}{=} \frac{\cancel{x^2}+2xh+h^2-\cancel{x^2}}{h}=$$

$$\frac{2xh+h^2}{h} \overset{\substack{\text{Βγάζω κονό} \\ \text{παράγοντα το } h}}{=} \frac{h(2x+h)}{h}=2x+h$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \overset{\substack{\text{Θεωρώ το } x \text{ σταθερό και η} \\ \text{μεταβλητή μου είναι } h\text{!!!}}}{=} \lim_{h\to 0}(2x+h)=2x$$

$\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota\ \tau o\ \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(h)}{h}\ \kappa\alpha\iota\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \pi\rho\alpha\gamma\mu\alpha\tau\iota\kappa\acute{o}\varsigma\ \alpha\rho\iota\theta\iota\mu\acute{o}\varsigma$

$\eta\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \pi\alpha\rho\alpha\gamma\omega\gamma\acute{\iota}\sigma\iota\mu\eta\ \sigma\tau o\ x\ \kappa\alpha\iota\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota:$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=2x$$

$$\left(f(x)\right)'=0 \overset{f(x)=x^2}{\Longrightarrow} \left(x^2\right)'=2x$$

4.

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη τότε και η συνάρτηση $cf(x)$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $\left(cf(x)\right)' = cf'(x)$ όπου c μια σταθερά

Επειδή η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη θα έχω:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Θεωρώ τη συνάρτηση $F(x) = cf(x)$

Αν $h \neq 0$ θα έχω:

$$\frac{F(x+h) - F(h)}{h} \overset{\substack{\text{Το } F \text{ είναι το γινόμενο} \\ \text{της σταθεράς } c \text{ επι το } f}}{=} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} \overset{\substack{\text{Βγάζω κοινό} \\ \text{παράγοντα το } c}}{=}$$

$$\frac{c\left(f(x+h) - f(x)\right)}{h} = c\,\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(h)}{h} = \lim_{h \to 0} c\,\frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$c \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \overset{f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(h)}{h}}{=} cf'(x)$$

Επειδή υπάρχει το $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h}$ και είναι πραγματικός αριθιμός η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη στο x και ισχύει:

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(h)}{h} = cf'(x)$$

$$\left(F(x)\right)' = cf'(x) \overset{F(x) = cf(x)}{\Longrightarrow} \left(cf(x)\right)' = cf'(x)$$

ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

x	α	x_o	β
f΄	+		–
f	↗		↘

I) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα (α,β)
II) $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (α, x_o)$
III) $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_o, β)$

Άρα η συνάρτηση f έχει τοπικό μέγιστο στη θέση x_o τον αριθμό f(xo)

x	α	x_o	β
f΄	–		+
f	↘		↗

I) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα (α,β)
II) $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (α, x_o)$
III) $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (x_o, β)$

Άρα η συνάρτηση f έχει τοπικό ελάχιστο στη θέση x_o τον αριθμό $f(x_o)$

ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ
Σε κάθε τιμή x_i της μεταβλητής Χ αντιστοιχίζεται ο φυσικός αριθμός που δηλώνει πόσα άτομα του πληθυσμού έχουν την τιμή αυτή.Ο φυσικός αυτός αριθμός συμβολίζεται με $ν_i$ και λέγεται συχνότητα της τιμής x_i .Το άθροισμα όλων των συχνοτήτων είναι ίσο με το μέγεθος ν του δείγματος

$Έστω\ οι\ τιμές\ της\ ποσοτικής\ μεταβλητής$ X $και\ οι\ αντίστοιχες$
$συχνότητες\ των\ x_1, x_2, \dots, x_\kappa\ τότε:$
$\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_\kappa = \nu$
ν : Το $μέγεθος\ του\ δείγματος$
ν_i : Η $συχνότητα\ της\ μεταβλητής\ x_i$

ΣΧΕΤΙΚΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ

Έστω $x_1 < x_2 < \dots < x_\kappa$ οι τιμές της ποσοτικής μεταβλητής X και $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_\kappa$ οι αντίστοιχες συχνότητες των $x_1, x_2, \dots, x_\kappa$ τότε ο λόγος της συχνότητας της τιμής x_i προς το μέγεθος του δείγματος λέγεται σχετική συχνότητα της τιμής x_i και συμβολίζεται με $f_i, i = 1, 2, \dots, \kappa$

$$f_i = \frac{\nu_i}{\nu}, i = 1, 2, \dots, \kappa$$

f_i : Η $σχετική\ συχνότητα\ της\ μεταβλητής\ x_i$
ν_i : Η $συχνότητα\ της\ μεταβλητής\ x_i$

Για την σχετική συχνότητα ισχύουν οι σχέσεις:

$$0 \le f_i \le 1, i = 1, 2, \dots, \kappa$$
$$f_1 + f_2 + \dots + f_\kappa = 1$$

ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ

Έστω $x_1 < x_2 < \dots < x_\kappa$ οι τιμές της ποσοτικής μεταβλητής X και $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_\kappa$ οι αντίστοιχες συχνότητες των $x_1, x_2, \dots, x_\kappa$ τότε ο άθροισμα όλων των συχνοτήτων των τιμών που είναι μικρότερες ή ίσες με το x_i ονομάζεται συχνότητα της τιμής x_i και συμβολίζεται με $N_i, i = 1, 2, \dots, \kappa$

$$N_1 = \nu_1, N_i = \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_{i-1} + \nu_i, i = 1, 2, \dots, \kappa$$

N_i : Η $αθροιστική\ συχνότητα\ της\ μεταβλητής\ x_i$
ν_i : Η $συχνότητα\ της\ μεταβλητής\ x_i$

Για την αθροιστική συχνότητα ισχύει η σχέση:

$$\nu_1 = N_1, \nu_i = N_i - N_{i-1}, i = 2, \dots, \kappa$$

ΣΧΕΤΙΚΗ ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ

Έστω $x_1 < x_2 < \dots < x_\kappa$ οι τιμές της ποσοτικής μεταβλητής X και $f_1, f_2, \dots, f_\kappa$

οι αντίστοιχες συχνότητες των $x_1, x_2, \cdots, x_\kappa$ τότε ο άθροισμα όλων των σχετικών συχνοτήτων των τιμών που είναι μικρότερες ή ίσες με το x_i ονομάζεται σχετική αθροιστική συχνότητα τιμής x_i και συμβολίζεται με $F_i, i = 1, 2, \cdots, \kappa$

$$F_1 = f_1, F_i = f_1 + f_2 + \cdots + f_{i-1} + f_i, i = 1, 2, \cdots, \kappa$$
$$F_i : \text{Η } \textit{αθροιστική συχνότητα της μεταβλητής } x_i$$
$$f_i : \text{Η } \textit{σχετική συχνότητα της μεταβλητής } x_i$$

Για την σχετική αθροιστική συχνότητα ισχύει η σχέση:

$$\boxed{f_1 = F_1,\ f_i = F_i - F_{i-1}, i = 2, \cdots, \kappa}$$

ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ

Έστω ότι έχουμε ένα δείγμα $x_1, x_2, \cdots, x_\nu$ μεγέθους ν τότε ονομάζουμε μέση τιμή της μεταβλητής x και τη συμβολίζεται με $\bar{x}$ το πηλίκο του αθροίσματος όλων των τιμών της μεταβλητής δια το πλήθος:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_\nu}{\nu}$$

$$\text{Τα } x_1, x_2, \cdots, x_\nu \textit{ είναι οι τιμές της μεταβλητής } x$$
$$\bar{x} : \text{Η } \textit{μέση τιμή της μεταβλητής } x$$
$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_\nu}{\nu}$$

ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΚΑΙ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ

Έστω $x_1 < x_2 < \cdots < x_\kappa$ οι τιμές της ποσοτικής μεταβλητής X και $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_\kappa$ οι αντίστοιχες συχνότητες των $x_1, x_2, \cdots, x_\kappa$ τότε η μέση τιμή $\bar{x}$ της μεταβλητής X δίνεται από την σχέση:

$$\bar{x} = \frac{\nu_1 x_2 + \nu_2 x_2 + \cdots + \nu_\kappa x_\kappa}{\nu}, \nu = \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_\kappa$$

$$\bar{x} = \frac{\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \cdots + \nu_\kappa x_\kappa}{\nu}, \nu = \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_\kappa$$
$$\bar{x} : \text{Η } \textit{μέση τιμή του δείγματος } x_1, x_2, \cdots, x_\kappa \textit{ με αντίστοιχες συχνότητες } \nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_\kappa$$
$$\nu_i : \text{Η } \textit{συχνότητα της μεταβλητής } x_i$$

ΔΙΑΜΕΣΟΣ

(I)Διάμεσος ενός δείγματος ν τιμών που έχουν διαταχθεί κατά αύξουσα σειρά

και το ν είναι περιττός αριθμός ορίζεται ως η μεσαία παρατήρηση (ΙΙ)Διάμεσος ενός δείγματος ν τιμών που έχουν διαταχθεί κατά αύξουσα σειρά και το ν είναι άρτιος αριθμός ορίζεται ως το ημιάθροισμα των δυο μεσαίων τιμών $\nu : \text{Το } \textit{πλήθος των στοιχείων του δείγματος}$ $\delta = \begin{cases} \frac{\nu+1}{2} - \Pi\alpha\rho\alpha\tau\acute{\eta}\rho\eta\sigma\eta, \nu : \acute{A}\rho\tau\iota o\varsigma \\ \frac{\left(\frac{\nu}{2} - \Pi\alpha\rho\alpha\tau\acute{\eta}\rho\eta\sigma\eta\right) + \left(\frac{\nu}{2} + 1 - \Pi\alpha\rho\alpha\tau\acute{\eta}\rho\eta\sigma\eta\right)}{2}, \nu : \Pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma \end{cases}$ $\delta : \text{Η } \textit{διάμεσος}$

ΕΥΡΟΣ
Το εύρος ή κύμανση ορίζεται ως η διαφορά της μικρότερης παρατήρησης απο την μεγαλύτερη παρατήρηση Εύρος R=(Μεγαλύτερη παρατήρηση)–(Μικρότερη παρατήρηση)

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ
$0 \le P(A) \le 1, P(\varnothing) = 0, P(\Omega) = 1, A : \text{Ε}\textit{νδεχόμενο του δειγματοχώρου } \Omega$
$P(A') = 1 - P(A), A' = \left\{x \in \Omega : x \notin A\right\}, A : \text{Ε}\textit{νδεχόμενο του δειγματοχώρου } \Omega$
$\Delta\textit{υο ενδεχόμενα } A, B \textit{ είναι ασυμβίβαστα ή ξένα μεταξύ τους}$ $\textit{όταν } A \cap B = \varnothing$
$\text{Α}\nu \ A, B \textit{ δυο ενδεχόμενα ασυμβίβαστα ή ξένα μεταξύ τους}$ $\textit{τότε ισχύει}: P(A \cup B) = P(A) + P(A)$
$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$\text{Α}\nu \ X \subseteq Y \textit{ τότε } P(X) \le P(Y)$
$A' \cup B' = (A \cap B)'$
$A' \cap B' = (A \cup B)'$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ (Σ),(Λ)

$\mathrm{N}\alpha$ *χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως* (Σ) *ή* (Λ)

(I) Αν *δυο γεγονότα* Α,Β *είναι ασυμβίβαστα ή ξένα μεταξύ τους τότε ισχύει* : $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})<\mathrm{P}(\mathrm{A})+\mathrm{P}(\mathrm{A})$

(II) Αν Α,Β *δυο ενδεχόμενα του δειγματοχώρου* Ω *τότε θα ισχύει* $\mathrm{P}(\mathrm{A}-\mathrm{B})=\mathrm{P}(\mathrm{A})-\mathrm{P}(\mathrm{B})$ (III) Αν Α *ενδεχόμενο του δειγματοχώρου* Ω *τότε θα ι*

$\mathrm{P}(\mathrm{A})+\mathrm{P}(\mathrm{A}')<1$

$(\mathrm{I}V)$ Αν Α,Β *ενδεχόμενα του δειγματοχώρου* Ω *με* $\mathrm{A}\subseteq\mathrm{B}$ *τότε θα ισχύει* $\mathrm{P}(\mathrm{A})<\mathrm{P}(\mathrm{B})$

(V) Αν Α *ενδεχόμενο του δειγματαχώρου* Ω *τότε ισχύει* $0<\mathrm{P}(\mathrm{A})<1$

$(V\mathrm{I})\ (x^2)'=2x$

$(V\mathrm{II})$ Αν $x_1,x_2,\cdots,x_\kappa$ *είναι οι τιμές της μεταβλητής* x *με αντίστοιχες συχνότητες* $\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_\kappa$ *τότε η μέση τιμή* $\bar{x}$ *της μεταβλητής* x *δίνεται απο την σχέση* :

$$\bar{x}=\frac{x_1\nu_1+x_2\nu_2+\cdots+x_\kappa\nu_\kappa}{\nu},\nu=\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_\kappa$$

$(V\mathrm{III})\ (x)'=2$

$(\mathrm{IX})\ (c)'=0, c:$ Σταθερά

(X) Αν Α,Β *ενδεχόμενα του δειγματοχώρου* Ω *τότε* :

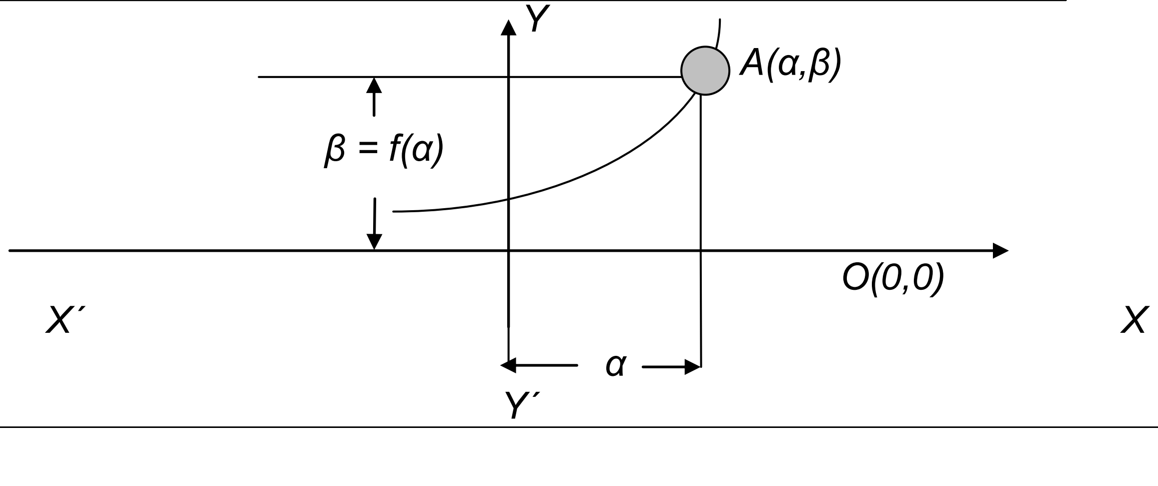
$\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=\mathrm{P}(\mathrm{A})+\mathrm{P}(\mathrm{B})-\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$

$(\mathrm{I}) \to (\Lambda)$
$(\mathrm{II}) \to (\Lambda)$
$(\mathrm{III}) \to (\Lambda)$
$(\mathrm{I}V) \to (\Lambda)$
$(V) \to (\Lambda)$
$(V\mathrm{I}) \to (\Sigma)$
$(V\mathrm{II}) \to (\Sigma)$
$(V\mathrm{III}) \to (\Lambda)$
$(\mathrm{IX}) \to (\Sigma)$
$(\mathrm{X}) \to (\Sigma)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ
Η *συνάρτηση* $f : D_f \to \mathbb{R}\left(D_f : \text{Το πεδίο ορισμού της } f\right)$ *είναι συνεχής στο σημείο* $x_0 \in D_f$ *όταν ισχύει* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
Το σημείο Α(α,β) ανήκει στην γραφική παράσταση της συνάρησης f όταν β = f(α) δηλ αν στο τύπο της f θέσω οπου x την τετμημένη του σημείου Α θα πάρω την τεταγμένη του Α

Το Α(α,β) ανήκει στην γραφική παράσταση της συνάρησης όταν : f (Τετμημένη του Α) = Τεταγμένη του Α



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1.

Η *συνάρτηση* $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x}{x^2-7x+6}, x\in\left(-\infty,1\right)\cup\left(1,6\right)\cup\left(6,+\infty\right)\\ \alpha-\dfrac{\beta}{5}, x=1\\ \alpha+\beta, x=6\end{cases}$

Ν*α βρεθούν τα* α,β *όταν η συνάρτηση* f *είναι συνεχής στα σημείο* $x_0=1$ *και η γραφική παράσταση της* f *να διέρχεται απο το σημείο* $\mathrm{A}\left(6,7\right)$

$\Theta\varepsilon\omega\rho\acute{\omega}\ \tau\eta\nu\ \delta\varepsilon\upsilon\tau\varepsilon\rho o\beta\acute{\alpha}\theta\mu\iota\alpha\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta\ x^2-7x+6=0\,(1)$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-7)^2-4\bullet1\bullet6=49-24=25$

$\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \Delta>0\ \eta\ \delta\varepsilon\upsilon\tau\varepsilon\rho o\beta\acute{\alpha}\theta\mu\iota\alpha\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta\ (1)\ \acute{\varepsilon}\chi\varepsilon\iota\ \delta\upsilon o\ \rho\acute{\iota}\zeta\varepsilon\varsigma\ \pi\rho\alpha\gamma\mu\alpha\tau\iota\kappa\acute{\varepsilon}\varsigma\ \kappa\alpha\iota\ \acute{\alpha}\nu\iota\sigma\varepsilon\varsigma:$

$$\rho_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{7\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{7\pm5}{2}=\begin{cases}\nearrow\frac{7+5}{2}=\frac{12}{2}=6\\ \searrow\frac{7-5}{2}=\frac{2}{2}=1\end{cases}$$

$$x^2-7x+6\ \overset{\substack{\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)\\ \rho_1,\rho_2:\mathrm{O}\iota\ \rho\acute{\iota}\zeta\varepsilon\varsigma\ \tau\eta\varsigma\ \delta\varepsilon\upsilon\tau\varepsilon\rho o\beta\acute{\alpha}\theta\mu\iota\alpha\varsigma\\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta\varsigma\ \alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\alpha\neq0\ \mu\varepsilon\Delta>0}}{=}\ (x-6)(x-1)$$

$\mathrm{A}\nu\ x\in(-\infty,1)\cup(1,6)\cup(6,+\infty)\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$f(x)=\frac{x^2-x}{x^2-7x+6}=\frac{x\cancel{(x-1)}}{(x-6)\cancel{(x-1)}}=\frac{x}{x-6}$$

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x}{x-6}=\frac{1}{-5}=-\frac{1}{5}$$

$\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \eta\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\ x_0=1\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)\overset{f(1)=\alpha-\frac{\beta}{5}}{\Longleftrightarrow}\alpha-\frac{\beta}{5}=-\frac{1}{5}\Leftrightarrow5\left(\alpha-\frac{\beta}{5}\right)=5\left(-\frac{1}{5}\right)\Leftrightarrow5\alpha-5\frac{\beta}{5}=-1\Leftrightarrow$$

$\boxed{5\alpha-\beta=-1}\,(1)$

$\mathrm{A}(6,7)\in C_f\Leftrightarrow f(6)=7\overset{f(6)=\alpha+\beta}{\Longleftrightarrow}\boxed{\alpha+\beta=7}\,(2)$

$\mathrm{A}\pi o\ \tau\iota\varsigma\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\varepsilon\iota\varsigma\ (1),(2)\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\underline{\left.\begin{cases}5\alpha-\beta=-1\\ \alpha+\beta=7\end{cases}\right\}}(+)$$

$$5\alpha-\beta+\alpha+\beta=-1+7\Leftrightarrow6\alpha=6\Leftrightarrow\cancel{6}\bullet\alpha=\cancel{6}\bullet1\ \overset{\substack{\mathrm{A}\nu\ \alpha\neq0\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\ \eta\\ \iota\sigma o\delta\upsilon\nu\alpha\mu\acute{\iota}\alpha:\\ \alpha\beta=\alpha\gamma\Leftrightarrow\beta=\gamma}}{\Longleftrightarrow}\ \alpha=1$$

$\Theta\acute{\varepsilon}\tau\omega\ \alpha=1\ \sigma\tau\eta\nu\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\eta\ (2):$

$$\alpha+\beta=7\overset{\alpha=1}{\Longleftrightarrow}1+\beta=7\Leftrightarrow\beta=7-1\Leftrightarrow\beta=6$$

2.

$$\text{Η συνάρτηση } f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2x^2+1}-3}{x^2-2x}, x\in(-\infty,0)\cup(0,2)\cup(2,+\infty)\\ 3\alpha^2-2\alpha+1, x=2\\ \dfrac{(3a+2)^{2013}+(6a+1)^{2011}+(9a)^{2009}}{(12a-1)^{2009}+(24a-5)^{2007}+(9a^2+2)^{2005}}, x=0\end{cases}$$

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=2$ τότε:

(Ι) Να βρεθεί το α

(ΙΙ) Να αποδείξετε οτι η γραφική παράσταση της f να διέρχεται απο το σημείο Α(0,81)

Αν $x\in(-\infty,0)\cup(0,2)\cup(2,+\infty)$ θα έχω:

$$f(x)=\frac{\sqrt{2x^2+1}-3}{x^2-2x}\overset{\substack{\text{Πολλαπλασιάζω αριθμητή}\\ \text{και παρονομαστή με } \sqrt{2x^2+1}+3\\ \text{Παραγοντοποιώ το τριώνυμο}\\ x^2-2x=x(x-2)}}{=}\frac{\left(\sqrt{2x^2+1}-3\right)\left(\sqrt{2x^2+1}+3\right)}{x(x-2)\left(\sqrt{2x^2+1}+3\right)}\overset{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=\alpha^2-\beta^2}{=}$$

$$\frac{\left(\sqrt{2x^2+1}\right)^2-3^2}{x(x-2)\left(\sqrt{2x^2+1}+3\right)}\overset{\left(\sqrt{\alpha}\right)^2=\alpha,\alpha\geq 0}{=}\frac{2x^2+1-9}{x(x-2)\left(\sqrt{2x^2+1}+3\right)}=\frac{\underbrace{2x^2-8}_{\text{Βγάζω κοινό παράγοντα το 2}}}{x(x-2)\left(\sqrt{2x^2+1}+3\right)}=$$

$$\frac{2\left(x^2-4\right)}{x(x-2)\left(\sqrt{2x^2+1}+3\right)}\overset{x^2-4=(x-2)(x+2)}{=}\frac{2\cancel{(x-2)}(x+2)}{x\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{2x^2+1}+3\right)}=\frac{2(x+2)}{x\left(\sqrt{2x^2+1}+3\right)}$$

$$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{2(x+2)}{x\left(\sqrt{2x^2+1}+3\right)}=\frac{\cancel{2}\bullet 4}{\cancel{2}\left(\sqrt{2\bullet 2^2+1}+3\right)}=\frac{4}{2\bullet 3}=\frac{2}{3}$$

$\text{Επειδή η συνάρτηση } f \text{ είναι συνεχής στο σημείο } x_0 = 2 \text{ θα έχω}:$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) \overset{f(2)=3\alpha^2-2\alpha+1}{\Leftrightarrow} 3\alpha^2 - 2\alpha + 1 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3\left(3\alpha^2 - 2\alpha + 1\right) = 3\frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$$9\alpha^2 - 3\bullet 2\alpha + 3 - 2 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{(3\alpha)^2 - 2\bullet 3\alpha \bullet 1 + 1^2}_{x^2-2\bullet x\bullet y+y^2=(x-y)^2} = 0 \Leftrightarrow (3a-1)^2 = 0 \Leftrightarrow 3a - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$3a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}$$

$$(\mathrm{II})\ f(0) = \frac{(3a+2)^{2013} + (6a+1)^{2011} + (9a)^{2009}}{(12a-1)^{2009} + (24a-5)^{2007} + \left(9a^2+2\right)^{2005}} =$$

$$= \frac{\left(3\frac{1}{3}+2\right)^{2013} + \left(6\frac{1}{3}+1\right)^{2011} + \left(9\frac{1}{3}\right)^{2009}}{\left(12\frac{1}{3}-1\right)^{2009} + \left(24\frac{1}{3}-5\right)^{2007} + \left[9\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2\right]^{2005}} = \frac{3^{2013} + 3^{2011} + 3^{2009}}{3^{2009} + 3^{2007} + 3^{2005}} =$$

$$\frac{3^4 \bullet 3^{2009} + 3^{2009} 3^2 + 3^{2009}}{3^4 \bullet 3^{2005} + 3^{2005} 3^2 + 3^{2005}} = \frac{81 \bullet 3^{2009} + 9 \bullet 3^{2009} + 3^{2009}}{81 \bullet 3^{2005} + 9 \bullet 3^{2005} + 3^{2005}} = \frac{91 \bullet 3^{2009}}{91 \bullet 3^{2005}} = 3^4 = 81$$

$\text{Άρα } \mathrm{A}(0,81) \in C_f$

3.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{2x^2+1}}{\sqrt{2x^2+16} - 2\sqrt{x^2+4}}, & x \neq 0 \\ \alpha^3 + \alpha^2 - 2\alpha - 6, & x = 0 \end{cases}$$

$\text{Να βρεθεί το α όταν η συνάρτηση } f \text{ είναι συνεχής στα σημείο } x_0 = 0$

Αν $x \neq 0$ *θα έχω*:

$$f(x)\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2x^2+1}}{\sqrt{2x^2+16}-2\sqrt{x^2+4}} \overset{\substack{\text{Πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρονομαστή με την παράσταση } \sqrt{x^2+1}+\sqrt{2x^2+1} \\ \text{Πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρονομαστή με την παράσταση } \sqrt{2x^2+16}+2\sqrt{x^2+4}}}{=}$$

$$\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2x^2+1}\right)\left(\sqrt{2x^2+16}+2\sqrt{x^2+4}\right)}{\left(\sqrt{2x^2+16}-2\sqrt{x^2+4}\right)\left(\sqrt{2x^2+16}+2\sqrt{x^2+4}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2x^2+1}\right)} \overset{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=\alpha^2-\beta^2}{=}$$

$$\frac{\left[\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-\left(\sqrt{2x^2+1}\right)^2\right]\left(\sqrt{2x^2+16}+2\sqrt{x^2+4}\right)}{\left[\left(\sqrt{2x^2+16}\right)^2-\left(2\sqrt{x^2+4}\right)\right]\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2x^2+1}\right)} \overset{\substack{\left(\sqrt{\alpha}\right)^2=\alpha,\alpha\geq 0 \\ (\alpha\beta)^\nu=\alpha^\nu\beta^\nu}}{=}$$

$$\frac{\left[x^2+1-\left(2x^2+1\right)\right]\left(\sqrt{2x^2+16}+2\sqrt{x^2+4}\right)}{\left[2x^2+16-4\left(x^2+4\right)\right]\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2x^2+1}\right)}=$$

$$\frac{\left(x^2+1-2x^2-1\right)\left(\sqrt{2x^2+16}+2\sqrt{x^2+4}\right)}{\left(2x^2+16-4x^2-16\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2x^2+1}\right)}$$

$$=\frac{-x^2\left(\sqrt{2x^2+16}+2\sqrt{x^2+4}\right)}{-2x^2\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2x^2+1}\right)}=\frac{\sqrt{2x^2+16}+2\sqrt{x^2+4}}{2\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2x^2+1}\right)}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x^2+16}+2\sqrt{x^2+4}}{2\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2x^2+1}\right)}=\frac{\sqrt{2\bullet 0^2+16}+2\sqrt{0^2+4}}{2\left(\sqrt{0^2+1}+\sqrt{2\bullet 0^2+1}\right)}=\frac{2\bullet 4}{2\bullet 2}=2$$

Επειδή *η συνάτηση f είναι συνεχής στο σημείο* $x_0=0$ *θα έχω*:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0) \overset{f(0)=\alpha^3+\alpha^2-2\alpha-6}{\Leftrightarrow} \alpha^3+\alpha^2-2\alpha-6=2 \Leftrightarrow \alpha^3+\alpha^2-2\alpha-8=0 (1)$$

Αν *ρ ακέραια ρίζα της πολυωνυμικής εξίσωσης* (1).Επειδή *το ρ είναι ακέραια ρίζα μιας πολυωνυμικής εξίσωσης με ακεραίους συντελεστές θα πρέπει να διαιρεί το σταθερό όρο του πολυωνύμου*.Οπότε *ρ διαιρεί το* -8.Συνεπώς *οι πιθανές τιμές του ρ είναι*: $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$

Τότε *απο το σχήμα του Horner για* $\rho=2$ *θα έχω*:

1	1	-2	-8	$\rho=2$
	$1\bullet 2=2$	$3\bullet 2=6$	$4\bullet 2=8$	
1	$1+2=3$	$-2+6=4$	$-8+8=0$	

$\pi(\alpha)=\alpha^2+3\alpha+4, \upsilon=0$

$$\alpha^3+\alpha^2-2\alpha-8=(x-\rho)\pi(\alpha)+\upsilon \overset{\substack{\rho=2\\ \pi(\alpha)=\alpha^2+3\alpha+4\\ \upsilon=0}}{=} (\alpha-2)(\alpha^2+3\alpha+4)$$

$$(1)\Leftrightarrow \alpha^3+\alpha^2-2\alpha-8=0 \Leftrightarrow (\alpha-2)(\alpha^2+3\alpha+4)=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \alpha-2=0 \\ \acute{\eta} \\ \alpha^2+3\alpha+4=0 \end{matrix}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \alpha=2 \\ \acute{\eta} \\ \alpha^2+3\alpha+4=0(2) \end{matrix}\right\}$$

$\alpha^2+3\alpha+4=0(2)$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=3^2-4\bullet 1\bullet 4=9-16=-7$

Ε*πειδή* $\Delta<0$ *η δευτεροβάθμια εξίσωση* (2) *δεν έχει πραγματικές ρίζες*

Ο*πότε* $\alpha=2$

4.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{\eta\mu^2 x+16}-2\sqrt{4+\eta\mu^2 x}}{\sqrt{\eta\mu^2 x+1}-\eta\mu x-1}, x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right) \\ \alpha^2\eta\mu\alpha+\eta\mu\alpha-\alpha^2-1, x=0 \end{cases}$$

Ν*α βρεθεί το α ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο σημείο* $x_0=0$

$$f(x)=\frac{\sqrt{\eta\mu^2x+16}-2\sqrt{4+\eta\mu^2x}}{\sqrt{\eta\mu^2x+1}-\eta\mu x-1}=\frac{\sqrt{\eta\mu^2x+16}-2\sqrt{4+\eta\mu^2x}}{\sqrt{\eta\mu^2x+1}-(\eta\mu x+1)}=$$

$$\frac{\left(\sqrt{\eta\mu^2x+16}-2\sqrt{4+\eta\mu^2x}\right)\left(\sqrt{\eta\mu^2x+16}+2\sqrt{4+\eta\mu^2x}\right)\left[\sqrt{\eta\mu^2x+1}+(\eta\mu x+1)\right]}{\left[\sqrt{\eta\mu^2x+1}-(\eta\mu x+1)\right]\left[\sqrt{\eta\mu^2x+1}+(\eta\mu x+1)\right]\left(\sqrt{\eta\mu^2x+16}+2\sqrt{4+\eta\mu^2x}\right)}=$$

$$\frac{\left[\left(\sqrt{\eta\mu^2x+16}\right)^2-\left(2\sqrt{4+\eta\mu^2x}\right)^2\right]\left(\sqrt{\eta\mu^2x+1}+\eta\mu x+1\right)}{\left[\left(\sqrt{\eta\mu^2x+1}\right)^2-(\eta\mu x+1)^2\right]\left(\sqrt{\eta\mu^2x+16}+2\sqrt{4+\eta\mu^2x}\right)}=$$

$$\frac{\left[\eta\mu^2x+16-4\left(4+\eta\mu^2x\right)\right]\left(\sqrt{\eta\mu^2x+1}+\eta\mu x+1\right)}{\left(\eta\mu^2x+1-\eta\mu^2x-1-2\eta\mu x\right)\left(\sqrt{\eta\mu^2x+16}+2\sqrt{4+\eta\mu^2x}\right)}=$$

$$\frac{\left(\eta\mu^2x+16-16-4\eta\mu^2x\right)\left(\sqrt{\eta\mu^2x+1}+\eta\mu x+1\right)}{-2\eta\mu x\left(\sqrt{\eta\mu^2x+16}+2\sqrt{4+\eta\mu^2x}\right)}=$$

$$\frac{-3\eta\mu^2x\left(\sqrt{\eta\mu^2x+1}+\eta\mu x+1\right)}{-2\eta\mu x\left(\sqrt{\eta\mu^2x+16}+2\sqrt{4+\eta\mu^2x}\right)}=\frac{3\eta\mu x\left(\sqrt{\eta\mu^2x+1}+\eta\mu x+1\right)}{2\left(\sqrt{\eta\mu^2x+16}+2\sqrt{4+\eta\mu^2x}\right)}$$

$$\lim_{x\to0}f(x)=\frac{3}{2}\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu x\left(\sqrt{\eta\mu^2x+1}+\eta\mu x+1\right)}{\left(\sqrt{\eta\mu^2x+16}+2\sqrt{4+\eta\mu^2x}\right)}=\frac{3}{2}\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu0\left(\sqrt{\eta\mu^2 0+1}+\eta\mu0+1\right)}{\left(\sqrt{\eta\mu^2 0+16}+2\sqrt{4+\eta\mu^2 0}\right)}=0$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$ θα έχω:

$$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)\Leftrightarrow\alpha^2\eta\mu\alpha+\eta\mu\alpha-\alpha^2-1=0\Leftrightarrow\eta\mu\alpha\left(\alpha^2+1\right)-\left(\alpha^2+1\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\left(\alpha^2+1\right)(\eta\mu\alpha-1)=0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\alpha^2+1=0\\ \acute{\eta}\\ \eta\mu\alpha-1=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\alpha^2=-1(\acute{A}\tau o\pi o)\\ \acute{\eta}\\ \eta\mu\alpha=1\end{array}\right\}$$

$$\eta\mu\alpha=\frac{\pi}{2}\ \overset{\eta\mu x=\eta\mu\theta\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}x=2\kappa\pi+\theta,\kappa\in\mathbb{Z}\\ \acute{\eta}\\ x=2\kappa\pi+(\pi-\theta),\kappa\in\mathbb{Z}\end{array}\right\}}{\Longleftrightarrow}\left\{\begin{array}{c}x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\kappa\in\mathbb{Z}\\ \acute{\eta}\\ x=2\kappa\pi+\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right),\kappa\in\mathbb{Z}\end{array}\right\}\Leftrightarrow x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\kappa\in\mathbb{Z}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Η συνάρτηση $f=\begin{cases} \dfrac{x^2-2x}{x^2-5x+6}, x\in(-\infty,2)\cup(2,3)\cup(3,+\infty) \\ \alpha-\dfrac{\beta}{3}, x=2 \\ \alpha+\beta, x=3 \end{cases}$

Να βρεθούν τα α,β όταν η συνάρτηση f είναι συνεχής στα σημείο $x_0=2$ και η γραφική παράσταση της f να διέρχεται απο το σημείο $\mathrm{A}(3,2)$

2.

Η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{8x^2+1}-3}{x^2-x}, x\in(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty) \\ 3\alpha^2-4\alpha+4, x=1 \\ \dfrac{(3a)^{3121}+(6a-2)^{3119}+(9a-4)^{3117}}{(12a-6)^{3117}+(15a-8)^{3115}+(9a^2-2)^{3113}}, x=0 \end{cases}$

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=1$ τότε:

(I) Να βρεθεί το α

(II) Να αποδείξετε οτι η γραφική παράσταση της f να διέρχεται απο το σημείο $\mathrm{A}(0,16)$

3.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+4}-\sqrt{3x^2+4}}{\sqrt{5x^2+81}-3\sqrt{x^2+9}}, x\neq 0 \\ \alpha^3+\alpha^2+\dfrac{1}{4}, x=0 \end{cases}$$

Να βρεθεί το α όταν η συνάρτηση f είναι συνεχής στα σημείο $x_0=0$

4.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{\eta\mu^2 x+64}-2\sqrt{16+\eta\mu^2 x}}{\sqrt{\eta\mu^2 x+4}-\eta\mu x-2}, x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right) \\ \alpha^4\eta\mu\alpha-\eta\mu\alpha-3\alpha^4+3, x=0 \end{cases}$$

Να βρεθεί το α ώστε η συνάρτση f να είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$

ΑΚΡΟΤΑΤΑ – ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ – ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΗ ΣΧΕΤΙΚΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ

1.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 6x + 3$ *και ο πίνακας συχνοτήτων που εκφράζει την βαθμολογία* 20 *μαθητών σε ένα test μαθηματικών*

ΚΛΑΣΕΙΣ	ν_i
[0,5)	ν_1
[5,10)	2
[10,15)	13
[15,20)	2

Α*ν* ν_1 *η θέση ολικού ελαχίστου της* f *τότε*:

(I) Ν*α συμπληρωθεί ο παραπάνω πίνακας*

(II) Ν*α κατασκευάσετε τον πίνακα αθροιστικών συχνοτήτων*

(III) Ν*α βρεθεί πόσοι μαθητές έπιασαν την βάση*

$(\mathrm{I}V)$ Ν*α βρεθεί πόσοι μαθητές πήραν τουλάχιστον* 5

(V) Ν*α βρεθεί πόσοι μαθητές πήραν βαθμολογία απο* 5 *μέχρι* 15

$$(\mathrm{I})\ f'(x) = \left(x^2 - 6x + 3\right)' \overset{\substack{(F(x)+G(x))' = F'(x)+G'(x) \\ (F(x)-G(x))' = F'(x)-G'(x)}}{=} \left(x^2\right)' - (6x)' + (3)' \overset{\substack{(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \\ (\lambda F(x))' = \lambda F'(x),\lambda:\Sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha} \\ (c)'=0, c:\Sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}}}{=}$$

$$= 2x - 6(x)' + 0 \overset{(x)'=1}{=} 2x - 6 \bullet 1 = 2x - 6 = 2(x-3)$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2(x-3) \geq 0 \Leftrightarrow x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$$

Ο*πότε*:

$$\boxed{\begin{array}{l} f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 3 \\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \\ f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 3 \end{array}}$$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

min

$$Έχω:\begin{cases} (\mathrm{I})\ \text{Η } f \textit{ είναι συνεχής στο } (-\infty,+\infty) \\ (\mathrm{II})\ f'(x)<0 \textit{ για κάθε } x\in(-\infty,3) \\ (\mathrm{III})\ f'(x)>0 \textit{ για κάθε } x\in(3,+\infty) \end{cases}$$

Οπότε η συνάρτηση f έχει ολικό ελάχιστο στην θέση $\nu_1 = 3$.

Συνεπώς θα έχω τον πίνακα συχνοτήτων:

ΚΛΑΣΕΙΣ	ν_i
[0, 5)	3
[5,10)	2
[10,15)	13
[15, 20)	2

(ΙΙ) Ο πίνακας αθροιστικών συχνοτήτων θα είναι:

ΚΛΑΣΕΙΣ	ν_i	N_i
$[0,5)$	3	3
$[5,10)$	(+) 2	5
$[10,15)$	(+) 13	18
$[15,20)$	(+) 2	20
ΣΥΝΟΛΟ	20	–

$\mathrm{N}_1 = \nu_1 = 3$

$\mathrm{N}_2 = \mathrm{N}_1 + \nu_2 = 3 + 2 = 5$

$\mathrm{N}_3 = \mathrm{N}_2 + \nu_3 = 5 + 13 = 18$

$\mathrm{N}_4 = \mathrm{N}_3 + \nu_4 = 18 + 2 = 20$

(III) Το *πλήθος των μαθητών έπιασαν την βάση* =

$$\begin{pmatrix}\Sigma\upsilon\nu o\lambda\iota\kappa o\acute{\iota}\\ \mu\alpha\theta\eta\tau\acute{\varepsilon}\varsigma\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Το πλήθος των μαθητών}\\ \text{που πήραν το πολύ } 10\end{pmatrix} = 20 - 5 = 15$$

(IV) Το *πλήθος των μαθητών πήραν τουλάχιστον* 5 =

$$\begin{pmatrix}\Sigma\upsilon\nu o\lambda\iota\kappa o\acute{\iota}\\ \mu\alpha\theta\eta\tau\acute{\varepsilon}\varsigma\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Το πλήθος των μαθητών}\\ \text{που πήραν το πολύ } 5\end{pmatrix} = 20 - 3 = 17$$

(V) Το *πλήθος των μαθητών πήραν βαθμολογία απο* 5 *μέχρι* 15 =

$$\begin{pmatrix}\text{Το πλήθος των μαθητών}\\ \text{που πήραν το πολύ } 15\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Το πλήθος των μαθητών}\\ \text{που πήραν το πολύ } 5\end{pmatrix} = 18 - 3 = 15$$

2.

Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+6x$ και ο πίνακας συχνοτήτων που εκφράζει το βάρος 50 μαθητών σε κιλά

ΚΛΑΣΕΙΣ	ν_i
$[40,50)$	$5\nu_1$
$[50,60)$	$6\nu_2$
$[60,70)$	12
`$[70,80)$	8
$[80,90)$	2

Αν ν_1,ν_2 οι θέσεις τοπικού μεγίστου και ελαχίστου της f τότε:

(I) Να συμπληρωθεί ο παραπάνω πίνακας

(II) Να κατασκευάσετε τον πίνακα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επι % $\left(F_i\%\right)$

(III) Να βρεθεί το ποσοστό των μαθητών που έχουν βάρος το πολύ 60 κιλά

(IV) Να βρεθεί το ποσοστό των μαθητών που έχουν βάρος τουλάχιστον 70 κιλά

(V) Να βρεθεί το ποσοστό των μαθητών που έχουν βάρος απο 50 μέχρι 80 κιλά

$$(\mathrm{I})\ f'\left(x\right)=\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+6x\right)'\overset{\substack{\left(F(x)+G(x)\right)'=F'(x)+G'(x)\\ \left(F(x)-G(x)\right)'=F'(x)-G'(x)}}{=}\left(\frac{1}{3}x^3\right)'-\left(\frac{5}{2}x^2\right)'+\left(6x\right)'$$

$$\overset{\left(\lambda F(x)\right)'=\lambda F'(x),\lambda:\Sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}}{=}\frac{1}{3}\left(x^3\right)'-\frac{5}{2}\left(x^2\right)'+6\left(x\right)'\overset{\substack{\left(x^\alpha\right)'=\alpha x^{\alpha-1}\\ \left(x\right)'=1}}{=}\frac{1}{3}3x^2-\frac{5}{2}2x+6\bullet 1=$$

$$=x^2-5x+6$$

Θεωρώ την δευτεροβάθμια εξίσωση: $x^2-5x+6=0\left(1\right)$

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma\overset{\alpha=1,\beta=-5,\gamma=6}{=}\left(-5\right)^2-4\bullet 1\bullet 6=25-24=1>0$$

Επειδή $\Delta > 0$ η δευτεροβάθμια εξίσωση (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες:

$$\rho_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \bullet 1} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \nearrow \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ \searrow \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
			$\tau.\mu$		$\tau.\varepsilon$		

$$Έ\chi\omega : \begin{cases} (\mathrm{I})\ \mathrm{H}\ f \text{ είναι συνεχής στο } (-\infty, 3) \\ (\mathrm{II})\ f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in (-\infty, 2) \\ (\mathrm{III})\ f'(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in (2, 3) \end{cases}$$

Οπότε η συνάρτηση f έχει τοπικό μέγιστο στην θέση $\nu_1 = 2$.

$$Έ\chi\omega : \begin{cases} (\mathrm{I})\ \mathrm{H}\ f \text{ είναι συνεχής στο } (2, +\infty) \\ (\mathrm{II})\ f'(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in (2, 3) \\ (\mathrm{II}I)\ f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in (3, +\infty) \end{cases}$$

Οπότε η συνάρτηση f έχει τοπικό ελάχιστο στην θέση $\nu_2 = 3$

Συνεπώς θα έχω τον πίνακα συχνοτήτων:

ΚΛΑΣΕΙΣ	ν_i
[40,50)	10
[50,60)	18
[60,70)	12
[70,80)	8
[80,90)	2

(II) $\underline{\text{Κατακευάζω το } f_i:}$

$$f_1=\frac{\nu_1}{\nu}=\frac{1\cancel{0}}{5\cancel{0}}=\frac{1}{5}\overset{\substack{\text{Πολλασιάζω αριθμητή και}\\ \text{παρονομαστή με το 2 έτσι}\\ \text{ώστε στον παρονομαστή να}\\ \text{σχηματιστεί το 10}}}{=}\frac{1\bullet 2}{5\bullet 2}=\frac{2}{10}=0,2$$

$$f_2=\frac{\nu_2}{\nu}=\frac{18}{5}\overset{\substack{\text{Πολλασιάζω αριθμητή και}\\ \text{παρονομαστή με το 2 έτσι}\\ \text{ώστε στον παρονομαστή να}\\ \text{σχηματιστεί το 100}}}{=}\frac{18\bullet 2}{50\bullet 2}=\frac{36}{100}=0,36$$

$$f_3=\frac{\nu_3}{\nu}=\frac{12}{50}\overset{\substack{\text{Πολλασιάζω αριθμητή και}\\ \text{παρονομαστή με το 2 έτσι}\\ \text{ώστε στον παρονομαστή να}\\ \text{σχηματιστεί το 100}}}{=}\frac{12\bullet 2}{50\bullet 2}=\frac{24}{100}=0,24$$

$$f_4=\frac{\nu_4}{\nu}=\frac{8}{50}\overset{\substack{\text{Πολλασιάζω αριθμητή και}\\ \text{παρονομαστή με το 2 έτσι}\\ \text{ώστε στον παρονομαστή να}\\ \text{σχηματιστεί το 100}}}{=}\frac{8\bullet 2}{50\bullet 2}=\frac{16}{100}=0,16$$

$$f_5=\frac{\nu_5}{\nu}=\frac{2}{50}\overset{\substack{\text{Πολλασιάζω αριθμητή και}\\ \text{παρονομαστή με το 2 έτσι}\\ \text{ώστε στον παρονομαστή να}\\ \text{σχηματιστεί το 100}}}{=}\frac{2\bullet 2}{50\bullet 2}=\frac{4}{100}=0,04$$

$\underline{\text{Κατακευάζω το } F_i:}$

$F_1=f_1=0,2$

$F_2=F_1+f_2=0,2+0,36=0,56$

$F_3=F_2+f_3=0,56+0,24=0,8$

$F_4=F_3+f_4=0,8+0,16=0,96$

$F_5=F_4+f_5=0,96+0,04=1$

$\underline{\text{Κατακευάζω το } F_i\%:}$

$F_1\%=(F_1\bullet 100)\%=(0,2\bullet 100)\%=20\%$

$F_2\%=(F_2\bullet 100)\%=(0,56\bullet 100)\%=56\%$

$F_3\%=(F_3\bullet 100)\%=(0,8\bullet 100)\%=80\%$

$F_4\%=(F_4\bullet 100)\%=(0,96\bullet 100)\%=96\%$

$F_5\%=(F_5\bullet 100)\%=(1\bullet 100)\%=100\%$

Ο πίνακας αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επι $\%(F_i\%)$ *είναι:*

ΚΛΑΣΕΙΣ	ν_i	f_i	F_i	$F_i\%$
$[40,50)$	10	$0,2$	$0,2$	20%
$[50,60)$	18	$(+)$ $0,36$	$0,56$	56%
$[60,70)$	12	$(+)$ $0,24$	$0,8$	80%
$[70,80)$	8	$(+)$ $0,16$	$0,96$	96%
$[80,90)$	2	$(+)$ $0,04$	1	100%
ΣΥΝΟΛΟ	50	1	–	–

(III) Το *ποσοστό των μαθητών που έχουν βάρος το πολύ* 60 *κιλά* $= 56\%$

(IV) Το *ποσοστό των μαθητών που έχουν βάρος τουλάχιστον* 70 *κιλά* $=$

$$100\% - \begin{pmatrix} \text{Το ποσοστό των μαθητών που έχουν βάρος} \\ \text{το πολύ } 70 \text{ κιλά} \end{pmatrix} = 100\% - 80\% = 20\%$$

(V) Το *ποσοστό των μαθητών που έχουν βάρος απο* 50 *μέχρι* 80 *κιλά* $=$

$$\begin{pmatrix} \text{Το ποσοστό των μαθητών που} \\ \text{έχουν βάρος} \\ \text{το πολύ } 80 \text{ κιλά} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{Το ποσοστό των μαθητών που} \\ \text{έχουν βάρος} \\ \text{το πολύ } 50 \text{ κιλά} \end{pmatrix} =$$

$$= 96\% - 20\% = 76\%$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 8x + 5$ *και ο πίνακας συχνοτήτων που εκφράζει την βαθμολογία* 20 *μαθητών σε ένα test μαθηματικών*

ΚΛΑΣΕΙΣ	ν_i
$[0,5)$	ν_1
$[5,10)$	3
$[10,15)$	11
$[15,20)$	2

Αν ν_1 *η θέση ολικού ελάχιστου της* f *τότε*:

(I) Ν*α συμπληρωθεί ο παραπάνω πίνακας*

(II) Ν*α κατασκευάσετε τον πίνακα αθροιστικών συχνοτήτων*

(III) Ν*α βρεθεί πόσοι μαθητές έπιασαν την βάση*

(IV) Ν*α βρεθεί πόσοι μαθητές πήραν τουλάχιστον* 5

(V) Ν*α βρεθεί πόσοι μαθητές πήραν βαθμολογία απο* 5 *μέχρι* 15

2.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{7x^2}{2}+10x$ *και ο πίνακας συχνοτήτων που εκφράζει το βάρος* 50 *μαθητών σε κιλά*

ΚΛΑΣΕΙΣ	ν_i
$[40,50)$	$5\nu_1$
$[50,60)$	$3\nu_2$
$[60,70)$	11
$[70,80)$	8
$[80,90)$	6

Αν ν_1,ν_2 *οι θέσεις τοπικού μεγίστου και ελαχίστου της* f *τότε*:

(I) Ν*α συμπληρωθεί ο παραπάνω πίνακας*

(II) Ν*α κατασκευάσετε τον πίνακα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επι* $\%(F_i\%)$

(III) Ν*α βρεθεί το ποσοστό των μαθητών που έχουν βάρος το πολύ* 70 *κιλά*

(IV) Ν*α βρεθεί το ποσοστό των μαθητών που έχουν βάρος τουλάχιστον* 60 *κιλά*

(V) Ν*α βρεθεί το ποσοστό των μαθητών που έχουν βάρος απο* 60 *μέχρι* 80 *κιλά*

Πως εργάζομαι για να κατασκευάσω τον πίνακα αθροιστικών συχνοτήτων σε μια συνεχή κατανομή

ΚΛΑΣΕΙΣ	ν_i	N_i
$[\alpha_0 , \alpha_1)$	ν_1 (+)	$N_1 = \nu_1$
$[\alpha_2 , \alpha_3)$	ν_2	N_2
. . .	. . .	. . .
$[\alpha_{\kappa-2} , \alpha_{\kappa-1})$	$\nu_{\kappa-1}$ (+)	$N_{\kappa-1}$
$[\alpha_{\kappa-1} , \alpha_\kappa)$	ν_κ	$N_\kappa = \nu_{ο\lambda}$
ΣΥΝΟΛΟ	$\nu_{ο\lambda} = \nu_1 + \nu_2 + . . . + \nu_\kappa$	–

ν_i: Συχνότητα της κλάσης $[\alpha_{i-1}, \alpha_i)$: Εκφράζει πόσες φορές εμφανίζονται τα στοιχεία της κλάσης $[\alpha_{i-1}, \alpha_i)$

N_i : Αθροιστική συχνότητα της κλάσης $[\alpha_{i-1}, \alpha_i)$: Εκφράζει πόσες φορές εμφανίζονται όλα τα στοιχεία που ανήκουν σε μια από τις κλάσεις $[\alpha_0 , \alpha_1)$, $[\alpha_2 , \alpha_3)$, . . . , $[\alpha_{i-1}, \alpha_i)$

$$N_1 = \nu_1 , N_i = \nu_1 + \nu_2 + . . . + \nu_i , N_\kappa = \nu_{ο\lambda}$$

$$N_1 = \nu_1 , N_i = N_{i-1} + \nu_i , N_\kappa = \nu_{ο\lambda}$$

$N_1 = \nu_1$, Νέο Ν = Προηγούμενο Ν + Νέο ν , $N_\kappa = \nu_{ο\lambda}$

Πως εργάζομαι για να κατασκευάσω τον πίνακα σχετικών αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων σε μια συνεχή κατανομή

ΚΛΑΣΕΙΣ	ν_i	f_i	F_i	F_i %
$[\alpha_0 , \alpha_1)$	ν_1	f_1 (+)	F_1	F_1 %
$[\alpha_1 , \alpha_2)$	ν_2	f_2	F_2	F_2 %
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$[\alpha_{\kappa-2} , \alpha_{\kappa-1})$	$\nu_{\kappa-1}$	$f_{\kappa-1}$ (+)	$F_{\kappa-1}$	$F_{\kappa-1}$ %
$[\alpha_{\kappa-1} , \alpha_{\kappa})$	ν_{κ}	f_{κ}	$F_{\kappa} = 1$	F_{κ} %
ΣΥΝΟΛΟ	$\nu_{o\lambda} = \nu_1 + \nu_2 + . . . + \nu_{\kappa}$	1	–	–

ν_i: Συχνότητα της κλάσης $[\alpha_{i-1}, \alpha_i)$: Εκφράζει πόσες φορές εμφανίζονται τα στοιχεία της κλάσης $[\alpha_{i-1}, \alpha_i)$ f_i : Σχετική συχνότητα της κλάσης $[\alpha_{i-1}, \alpha_i)$

F_i : Σχετική αθροιστική συχνότητα της κλάσης $[\alpha_{i-1}, \alpha_i)$

F_i % : Εκφράζει πόσες φορές εμφανίζονται όλα τα στοιχεία που ανήκουν σε μια από τις κλάσεις $[\alpha_0 , \alpha_1)$, $[\alpha_2 , \alpha_3)$, . . . , $[\alpha_{i-1}, \alpha_i)$ όταν ο πληθυσμός είναι 100: Εκφράζει το ποσοστο των στοιχείων που ανήκουν σε μια από τις κλάσεις $[\alpha_0 , \alpha_1)$, $[\alpha_2 , \alpha_3)$, . . . , $[\alpha_{i-1}, \alpha_i)$

$$f_i = \frac{\boldsymbol{\nu_i}}{\boldsymbol{\nu_{o\lambda}}} , \quad \nu_{o\lambda} = \nu_1 + \nu_2 + . . . + \nu_{\kappa}$$

$f_1 + f_2 + …. f_{\kappa} = 1$

F_i % = F_i 100 = Πολλαπλασιάζω το F_i με το 100 και όλο αυτό είναι εκφρασμένο επί τοις εκατό = Μεταφέρω την υποδιαστολή του F_i δυο θέσεις προς τα δεξιά 100 και όλο αυτό είναι εκφρασμένο επί τοις εκατό

$F_1 = f_1$, $F_i = f_1 + f_2 + . . . + f_i$, $F_{\kappa} = 1$

$F_1 = \nu_1$, $F_i = F_{i-1} + f_i$, $F_{\kappa} = 1$

$F_1 = f_1$, Νέο F = Προηγούμενο F + Νέο f , $F_{\kappa} = 1$

$$F_i = \frac{N_i}{\nu_{o\lambda}} , \quad N_i = \nu_1 + \nu_2 + . . . + \nu_i$$

N_i : Αθροιστική συχνότητα της κλάσης $[\alpha_{i-1}, \alpha_i)$

ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ
$\left(f(x)+g(x)\right)' = f'(x)+g'(x)$
$\left(f(x)-g(x)\right)' = f'(x)-g'(x)$
$\left(\lambda f(x)\right)' = \lambda f'(x), \lambda : \Sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}$
$(c)' = 0, c : \Sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}$

$(x)' = 1$
$\left(x^{a}\right)' = ax^{a-1}$

x	α $\quad$ x_o	β
f΄	+	–
f	$\nearrow$	$\searrow$

I) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα (α,β)
II) $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_o)$
III) $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_o, \beta)$

Άρα η συνάρτηση f έχει τοπικό μέγιστο στη θέση x_o τον αριθμό $f(x_o)$

x	α $\quad$ x_o	β
f΄	–	+
f	$\searrow$	$\nearrow$

I) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα (α,β)
II) $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_o)$
III) $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (x_o, \beta)$

Άρα η συνάρτηση f έχει τοπικό ελάχιστο στη θέση x_o τον αριθμό $f(x_o)$

ΠΡΟΣΟΧΗ!!!
Σε μια συνεχή κατανομή το ποσοστό των στοιχείων που είναι το πολύ α είναι το ποσοστό των στοιχείων που είναι μικρότερο ή ίσο του α Άρα αυτό που θέλω βρω είναι : Η αθροιστική σχετική συχνότητα που αντιστοιχεί στην κλάση με τέλος α
Σε μια συνεχή συνεχή κατανομή ο αριθμός των στοιχείων που είναι το πολύ α είναι ο αριθμός των στοιχείων που είναι μικρότερος ή ίσος του α Άρα αυτό που θέλω βρω είναι : Η αθροιστική συχνότητα που αντιστοιχεί στην κλάση με τέλος α
Σε μια συνεχή κατανομή το ποσοστό των στοιχείων που είναι τουλάχιστον α είναι το ποσοστό των στοιχείων που είναι μεγαλύτερο ή ίσο του α Άρα αυτό που θέλω βρω είναι : 100%–(Η αθροιστική σχετική συχνότητα που αντιστοιχεί στην κλάση με τέλος α)
Σε μια συνεχή κατανομή ο αριθμός των στοιχείων που είναι τουλάχιστον α είναι ο αριθμός των στοιχείων που είναι μεγαλύτερο ή ίσο του α Άρα αυτό που θέλω βρω είναι : $\nu_{ολ}$ – (Η αθροιστική συχνότητα που αντιστοιχεί στην κλάση με τέλος α)
Σε μια συνεχή κατανομή το ποσοστό των στοιχείων που είναι από α μέχρι β είναι: (Η αθροιστική σχετική συχνότητα που αντιστοιχεί στην κλάση με τέλος β) – (Η αθροιστική σχετική συχνότητα που αντιστοιχεί στην κλάση με τέλος α)
Σε μια συνεχή κατανομή ο αριθμός των στοιχείων που είναι από α μέχρι β είναι: (Η αθροιστική συχνότητα που αντιστοιχεί στην κλάση με τέλος β) – (Η αθροιστική σχετική συχνότητα που αντιστοιχεί στην κλάση με τέλος α)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ
$0 \le \mathrm{P}(\mathrm{A}) \le 1, \mathrm{P}(\varnothing) = 0, \mathrm{P}(\Omega) = 1, \mathrm{A} : \mathrm{E}\textit{νδεχόμενο του δειγματαχώρου}\ \Omega$
$\mathrm{P}(\mathrm{A}') = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{A})$
Δυο ενδεχόμενα A, B *είναι ασυμβίβαστα ή ξένα μεταξύ τους* *όταν* $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$
Α*ν δυο ενδεχόμενα* A, B *είναι ασυμβίβαστα ή ξένα μεταξύ τους* *τότε ισχύει* : $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\mathrm{B})$

$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
$A\nu\ X\subseteq Y\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ P(X)\leq P(Y)$
$A'\cup B'=(A\cap B)'$
$A'\cap B'=(A\cup B)'$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1.

$$\Delta\acute{\iota}\nu\varepsilon\tau\alpha\iota\ \eta\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}(4\alpha-3)^2, & x\neq 2\\ -(2\beta-1)^2, & x=2\end{cases}$$

H *συνάρτηση* f *είναι συνεχής στο σημείο* $x_0=2$ *και* $\alpha=P(A)$,

$\beta=P(B)$ *είναι οι πιθανότητες των ενδεχομένων* A,B

(I) *Να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων* A,B

(II) *Να δειχτεί οτι τα ενδεχόμενα* A,B *δεν είναι ασυμβίβαστα*

(III) *Να δειχτεί οτι* $\dfrac{1}{4}\leq P(A\cap B)\leq\dfrac{3}{4}$

$$(I)\ f(x)=\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}(4\alpha-3)^2\ \overset{\text{Πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρονομαστή με } \sqrt{x^2+5}+3}{=}$$

$$\frac{\left(\sqrt{x^2+5}-3\right)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}(4\alpha-3)^2\ \overset{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=\alpha^2-\beta^2}{=}\ \frac{\left(\sqrt{x^2+5}\right)^2-3^2}{(x-2)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}(4\alpha-3)^2$$

$$\overset{\left(\sqrt{\alpha}\right)^2=\alpha,\alpha\geq 0}{=} \frac{x^2+5-9}{(x-2)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}(4\alpha-3)^2 = \frac{x^2-4}{(x-2)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}(4\alpha-3)^2 =$$

$$\frac{x^2-2^2}{(x-2)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}(4\alpha-3)^2 \overset{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=\alpha^2-\beta^2}{=}$$

$$\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}(4\alpha-3)^2 = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}(4\alpha-3)^2$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(4\alpha-3)^2}{\sqrt{x^2+5}+3} = \frac{4(4\alpha-3)^2}{6} = \frac{2(4\alpha-3)^2}{3}$$

Επειδή η f *είναι συνεχής στο σημείο* $x_0 = 2$ *θα έχω*:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow \frac{2(4\alpha-3)^2}{3} = -(2\beta-1)^2 \Leftrightarrow \frac{2(4\alpha-3)^2}{3} + (2\beta-1)^2 = 0$$

$$\boxed{\kappa\alpha^2+\lambda\beta^2=0 \Leftrightarrow \alpha=\beta=0 \ \mu\varepsilon\ \kappa,\lambda>0}$$

$$\begin{Bmatrix} 4\alpha-3=0 \\ 2\beta-1=0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 4\alpha=3 \\ 2\beta=1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha=\dfrac{3}{4} \\ \beta=\dfrac{1}{2} \end{Bmatrix}$$

(II) *Έστω τα ενδεχόμενα* Α, Β *είναι ασυμβίβαστα*. Τότε *θα έχω*:

$A \cap B = \varnothing$

Οπότε *θα ισχύει*:

$$P(A\cup B) = P(A)+P(B) = \frac{3}{4}+\frac{1}{2} = \frac{3}{4}+\frac{2}{4} = \frac{5}{4} > 1 \ (\text{Άτοπο})$$

Άρα $A\cap B \neq \varnothing$. *Συνεπώς τα ενδεχόμενα* Α, Β *δεν είναι ασυμβίβαστα*

$$(\text{II})\ A\cap B \subseteq A \Rightarrow P(A\cap B) \leq P(A) \Rightarrow P(A\cap B) \leq \frac{3}{4}$$

$$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B) \Leftrightarrow P(A\cup B) = \frac{3}{4}+\frac{1}{2}-P(A\cap B)$$

$$\Leftrightarrow P(A\cup B) = \frac{3}{4}+\frac{2}{4}-P(A\cap B) \Leftrightarrow P(A\cup B) = \frac{5}{4}-P(A\cap B)$$

$$P(A\cup B) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{5}{4}-P(A\cap B) \leq 1 \Leftrightarrow -P(A\cap B) \leq 1-\frac{5}{4} \Leftrightarrow -P(A\cap B) \leq -\frac{1}{4}$$

$$\frac{-\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{-1} \geq \frac{-\frac{1}{4}}{-1} \Leftrightarrow \mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) \geq \frac{1}{4}$$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon: \frac{1}{4} \leq \mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) \leq \frac{3}{4}$

2.

$\Delta\acute{\iota}\nu\varepsilon\tau\alpha\iota\ \eta\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}(3\alpha-1)^2, & x \neq 1 \\ -(2\beta-1)^2-(6\gamma-1)^2, & x=1 \end{cases}$
Η *συνάρτηση* f *είναι συνεχής στο σημείο* $x_0 = 1$ *και* $\alpha = \mathrm{P}(\mathrm{A})$,
$\beta = \mathrm{P}(\mathrm{B}), \gamma = \mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$ *είναι οι πιθανότητες των ενδεχομένων* $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{A}\cap\mathrm{B}$
(I) Ν*α βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων* $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{A}\cap\mathrm{B}$
(II) Ν*α βρεθεί η πιθανότητα να πραγματοποιείται τουλάχιστον ένα απο τα* A, B
(III) Ν*α βρεθεί η πιθανότητα να πραγματοποιείται μόνο ένα απο τα* A, B
(IV) Ν*α βρεθεί η πιθανότητα να μην πραγματοποιείται κανένα απο τα* A, B

$$(\mathrm{I})\ f(x) = \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}(3\alpha-1)^2 \overset{\substack{\Pi o\lambda\lambda\alpha\pi\lambda\alpha\sigma\iota\acute{\alpha}\zeta\omega\ \alpha\rho\iota\theta\mu\eta\tau\acute{\eta}\ \kappa\alpha\iota \\ \pi\alpha\rho o\nu o\mu\alpha\sigma\tau\acute{\eta}\ \mu\varepsilon\ \sqrt{x^2+3}+2}}{=}$$

$$\frac{\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}(3\alpha-1)^2 \overset{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=\alpha^2-\beta^2}{=} \frac{\left(\sqrt{x^2+3}\right)^2-2^2}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}(3\alpha-1)^2$$

$$\overset{\left(\sqrt{\alpha}\right)^2=\alpha,\alpha\geq 0}{=} \frac{x^2+3-4}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}(3\alpha-1)^2 = \frac{x^2-1^2}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}(3\alpha-1)^2$$

$$\overset{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=\alpha^2-\beta^2}{=} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}(3\alpha-1)^2 = \frac{(x+1)(3\alpha-1)^2}{\sqrt{x^2+3}+2}$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(3\alpha-1)^2}{\sqrt{x^2+3}+2} = \frac{(1+1)(3a-1)^2}{\sqrt{1^2+3}+2} = \frac{2(3a-1)^2}{4} = \frac{(3\alpha-1)^2}{2}$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 1$ θα έχω:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \frac{(3\alpha-1)^2}{2} = -(2\beta-1)^2 - (6\gamma-1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(3\alpha-1)^2}{2} + (2\beta-1)^2 + (6\gamma-1)^2 = 0$$

$$\boxed{\kappa\alpha^2 + \lambda\beta^2 + \mu\gamma^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0 \text{ με } \kappa, \lambda, \mu > 0}$$

$$\left\{\begin{matrix} 3\alpha - 1 = 0 \\ 2\beta - 1 = 0 \\ 6\gamma - 1 = 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} 3\alpha = 1 \\ 2\beta = 1 \\ 6\gamma = 1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \alpha = \dfrac{1}{3} \\ \beta = \dfrac{1}{2} \\ \gamma = \dfrac{1}{6} \end{matrix}\right\}$$

(II) Γ: Πραγματοποιείται τουλάχιστον ένα απο τα Α, Β

Οπότε: $\Gamma = A \cup B$

$$P(\Gamma) = P(A\cup B) = P(A) + P(A) - P(A\cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

(III) Δ: Πραγματοποιείται μόνο ένα απο τα Α, Β

Οπότε πραγματοποιείται το Α και όχι το Β ή πραγματοποιείται το Β και όχι το Α. Άρα θα έχω: $\Delta = (A - B) \cup (B - A)$

Επειδή $(A-B)\cap(B-A) = \varnothing$ θα έχω:

$$P((A-B)\cup(B-A)) = P(A-B) + P(B-A)$$

$$P(\Delta) = P((A-B)\cup(B-A)) \overset{(A-B)\cap(B-A)=\varnothing}{=} P(A-B) + P(B-A) \overset{\substack{P(A-B)=P(A)-P(A\cap B) \\ P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)}}{=}$$

$$P(A) - P(A\cap B) + P(B) - P(A\cap B) = P(A) + P(B) - 2P(A\cap B) =$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\frac{1}{6} = \cancel{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

(IV) Ε: Δεν πραγματοποιείται κανένα απο τα Α, Β

Οπότε δεν πραγματοποιείται το Α και δεν πραγματοποιείται το Β

Συνεπώς θα έχω: $\Delta = A' \cap B' = (A \cup B)'$

$$P(E) = P\left((A\cup B)'\right) = 1 - P(A\cup B) \overset{P(A\cup B)=\frac{2}{3}}{=} 1 - \frac{2}{3} = \frac{3}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$