<u>ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΘΕΣΕΙΣ ΔΥΟ ΚΥΚΛΩΝ</u>

1.

Αν (K,R) *και* (Λ,ρ) *είναι δυο κύκλοι που έχουν διαφορετικά κέντρα και* $R>\rho, \mathrm{K}\Lambda=\delta$, *να αντιστοιχίσετε κάθε φράση της πρώτης στήλης με την αντίστοιχη σχέση στη δεύτερη στήλη.*

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
α. Ο *κύκλος* (Λ,ρ) *είναι εσωτερικός του* (K,R) β. Ο *κύκλος* (Λ,ρ) *είναι εφάπτεται εσωτερικά του* (K,R) γ. Ο*ι κύκλοι* (K,R) *και* (Λ,ρ) *τέμνονται* δ. Ο*ι κύκλοι εφάπτοναται εξωτερικά* ε. Κ*άθε κύκλος είναι εξωτερικός του άλλου*	1. $\delta>R+\rho$ 2. $\delta=R+\rho$ 3. $\delta=R-\rho$ 4. $\delta<R-\rho$ 5. $2\delta=R-\rho$ 6. $\rho<\delta<R$ 7. $2\delta=R\rho$ 8. $R-\rho<\delta<R+\rho$

α. <u>*Ένας κύκλος είναι εσωτερικός κάποιου άλλου κύκλου αν και μόνο αν η διάκεντρος είναι μικρότερη απο την διαφορά των ακτίνων των δυο κύκλων*</u>. *Συνεπώς ο κύκλος* (Λ,ρ) *είναι εσωτερικός του* (K,R) *αν και μόνο αν ισχύει* $\delta<R-\rho$. Ο*πότε θα έχω* $\alpha\to 4$

β. <u>Δ*υο κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά αν και μόνο αν η διάκεντρος είναι ίση με την διαφορά των ακτίνων τους*</u>. Σ*υνεπώς κύκλος* (Λ,ρ) *εφάπτεται εσωτερικά του* (K,R) *αν και μόνο αν ισχύει* $\delta=R-\rho$

Ο*πότε επιλέγω* $\beta\to 3$

γ. Δυο κύκλοι τέμνονται όταν :

$$\boxed{\begin{matrix}\text{Διαφορά των}\\ \text{ακτίνων τους}\end{matrix}} < \boxed{\text{Διάκεντρος}} < \boxed{\begin{matrix}\text{Άθροισμα των}\\ \text{ακτίνων τους}\end{matrix}}$$

Οπότε οι κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) τέμνονται αν και μόνο αν ισχύει $R-\rho<\delta<R+\rho$. Οπότε επιλέγω $\gamma \rightarrow 8$

δ. <u>Δυο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά αν και μόνο αν η διάκεντρος είναι ίση με το άθροισμα των ακτίνων τους</u>. Συνεπώς οι κύκλοι $(\Lambda, \rho),(\mathrm{K}, R)$ εφάπτονται εξωτερικά του αν και μόνο αν ισχύει $\delta=R+\rho$. Οπότε επιλέγω $\delta \rightarrow 2$.

ε. <u>Δυο κύκλοι βρίσκονται ο ένας εξωτερικός του άλλου αν και μόνο αν η διάκεντρος είναι μεγαλύτερη απο το άθροισμα των ακτίνων τους</u>. Οι κύκλοι $(\Lambda, \rho),(\mathrm{K}, R)$ βρίσκονται ο ένας εξωτερικά του άλλου αν και μόνο αν ισχύει $\delta>R+\rho$. Οπότε επιλέγω $\varepsilon \rightarrow 1$.

2.

Να προσδιοριστούν οι σχετικές θέσεις των κύκλων (K, ρ) και $(\Lambda, 2\rho)$ αν:

$(\mathrm{I})\ \mathrm{K\Lambda}=\frac{\rho}{2}$ $(\mathrm{II})\ \mathrm{K\Lambda}=\rho$ $(\mathrm{III})\ \mathrm{K\Lambda}=2\rho$ $(\mathrm{IV})\ \mathrm{K\Lambda}=3\rho$ $(V)\ \mathrm{K\Lambda}=4\rho$

(I) Έχω τους κύκλους $(\mathrm{K}, \rho),(\Lambda, 2\rho)$ με $\mathrm{K\Lambda}=\frac{\rho}{2}$

<u>Ένας κύκλος είναι εσωτερικός κάποιου άλλου κύκλου αν και μόνο αν η διάκεντρος είναι μικρότερη απο την διαφορά των ακτίνων των δυο κύκλων</u>.

Έχω: $\mathrm{K\Lambda}<2\rho-\rho \Leftrightarrow \frac{\rho}{2}<\rho \Leftrightarrow \rho>\frac{\rho}{2} \Leftrightarrow \rho-\frac{\rho}{2}>0 \Leftrightarrow \frac{2\rho}{2}-\frac{\rho}{2}>0 \Leftrightarrow$

$\frac{\rho}{2}>0 \Leftrightarrow \rho>0$ (Ισχύει)

Συνεπώς ο κύκλος (K, ρ) είναι εσωτερικός του $(\Lambda, 2\rho)$

(II) *Έχω τους κύκλους* $(\mathrm{K},\rho),(\Lambda,2\rho)$ *με* $\mathrm{K\Lambda}=\rho$

<u>*Δυο κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά αν και μόνο αν η διάκεντρος είναι ίση με την διαφορά των ακτίνων τους.*</u>

Έχω $\mathrm{K\Lambda}=2\rho-\rho$. *Συνεπώς οι κύκλοι* $(\mathrm{K},\rho),(\Lambda,2\rho)$ *εφάπτονται εσωτερικά.*

(III) *Έχω τους κύκλους* $(\mathrm{K},\rho),(\Lambda,2\rho)$ *με* $\mathrm{K\Lambda}=2\rho$

Δυο κύκλοι τέμνονται όταν :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Διαφορά των}\\ \text{ακτίνων τους}\end{array}} < \boxed{\text{Διάκεντρος}} < \boxed{\begin{array}{l}\text{Άθροισμα των}\\ \text{ακτίνων τους}\end{array}}$$

$$2\rho-\rho<\mathrm{K\Lambda}<2\rho+\rho \Leftrightarrow \rho<2\rho<3\rho \overset{\rho>0}{\Longleftrightarrow} \frac{\rho}{\rho}<\frac{2\rho}{\rho}<\frac{3\rho}{\rho} \Leftrightarrow 1<2<3\,(\text{Ισχύει})$$

Συνεπώς οι κύκλοι $(\mathrm{K},\rho),(\Lambda,2\rho)$ *τέμνονται*

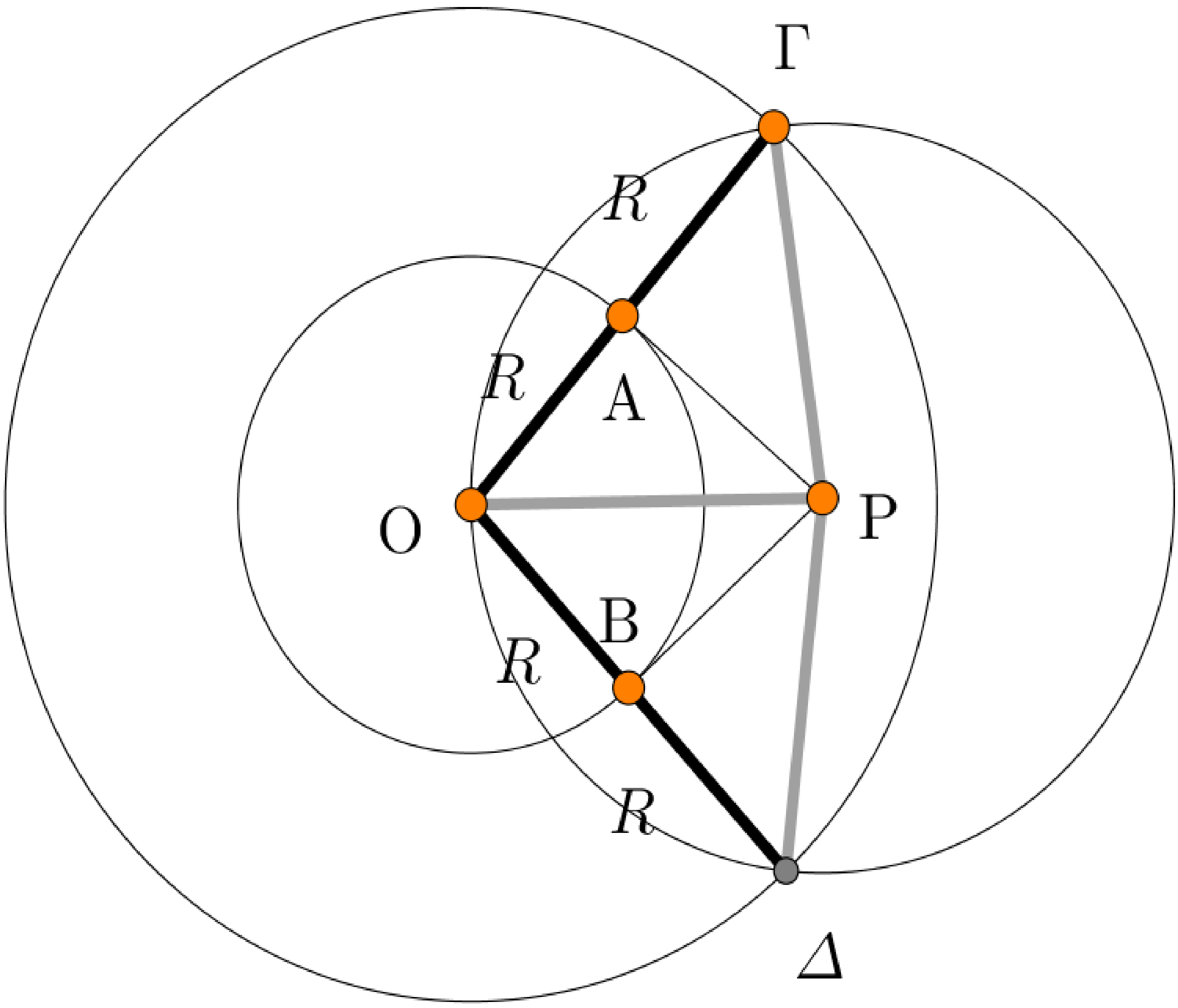
(IV) *Έχω τους κύκλους* $(\mathrm{K},\rho),(\Lambda,2\rho)$ *με* $\mathrm{K\Lambda}=4\rho$

<u>*Δυο κύκλοι βρίσκονται ο ένας εξωτερικός του άλλου αν και μόνο αν η διάκεντρος είναι μεγαλύτερη απο το άθροισμα των ακτίνων τους.*</u> *Έχω* $\mathrm{K\Lambda}=4\rho>3\rho=2\rho+\rho$. *Συνεπώς οι κύκλοι* $(\mathrm{K},\rho),(\Lambda,2\rho)$ *βρίσκονται ο ένας εξωτερικά του άλλου.*

3.

Δίνεται κύκλος (O,R) *και εξωτερικό σημείο* P, *ώστε* $OP<2R$.
Γράφουμε τον κύκλο $(O,2R)$. *Να αποδείξετε ότι :*
(I) *Ο κύκλος* $(O,2R)$ *τέμνει τον κύκλο* (P,PO) *σε δυο σημεία* Γ *και* Δ
(II) *Τα ευθύγραμμα τμήματα* $O\Gamma, O\Delta$ *τέμνουν τον κύκλο* (O,R) *σε δυο σημεία* A *και* B
(III) *Τα* $P\mathrm{A}, P\mathrm{B}$ *εφάπτονται στον κύκλο* (O,R)

ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$R < OP < 2R$	(I) Οι κύκλοι $(O,2R)$, (P,PO) τέμνονται στα σημεία Γ και Δ (II) Τα ευθύγραμμα τμήματα $O\Gamma$, $O\Delta$ τέμνουν τον κύκλο (O,R) σε δυο σημεία Α και Β (III) Τα $P\mathrm{A}$, $P\mathrm{B}$ εφάπτονται στον κύκλο (O,R)



(I) Οι κύκλοι $(O,2\mathrm{P})$, (P,PO) τέμνονται αν και μόνο αν ισχύει:

$\boxed{\begin{matrix}\text{Διαφορά των}\\ \text{ακτίνων τους}\end{matrix}} < \boxed{\text{Διάκεντρος}} < \boxed{\begin{matrix}\text{Άθροισμα των}\\ \text{ακτίνων τους}\end{matrix}} \Leftrightarrow$

$2R - PO < PO < PO + 2R$

$$2R - PO < PO \Leftrightarrow 2R < PO + PO \Leftrightarrow 2R < 2PO \overset{\substack{\text{Αν διαιρέσω και τα δυο}\\ \text{μέλη μιας ανίσωσης με}\\ \text{ένα θετικό αριθμό προκύπτει}\\ \text{ομόστροφη ανίσωση}}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\frac{2R}{2} < \frac{2PO}{2} \Leftrightarrow R < PO \Leftrightarrow PO > R\ (\text{Ισχύει})$$

$$PO < PO + 2R \overset{\alpha+\beta<\alpha+\gamma \Leftrightarrow \beta<\gamma}{\Longleftrightarrow} 0 < 2R \Leftrightarrow 2R > 0 \Leftrightarrow R > 0\ (\text{Ισχύει})$$

Συνεπώς οι κύκλοι $(O,2R)$, (P,PO) τέμνονται.

(II) Έστω Γ, Δ τα σημεία τομής των κύκλων $(O,2R)$, (P,PO)

Επειδή $\mathrm{O\Gamma} = \mathrm{O\Delta} = 2R > R$ είναι εξωτερικά σημεία του κύκλου $(O,2R)$. Γνωρίζω ότι <u>το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζεται απο το κέντρο του κύκλου και απο ένα σημείο εκτός του κύκλου τέμνει τον κύκλο</u>

Οπότε τα ευθύγραμμα τμήματα $\mathrm{O\Gamma}, \mathrm{O\Delta}$ τέμνουν τον κύκλο (O,R)

(III) Τα ευθύγραμμα τμήματα $\mathrm{O\Gamma}, \mathrm{O\Delta}$ τέμνουν τον κύκλο (O,R) αντίστοιχα στα σημεία A, B. Τότε θα έχω $\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = R$

$$\mathrm{A\Gamma} = \mathrm{O\Gamma} - \mathrm{OA} \overset{\substack{\mathrm{O\Gamma}=2R\\ \mathrm{OA}=R}}{=} 2R - R = R$$

$$\left.\begin{matrix}\mathrm{A\Gamma} = R\\ \mathrm{OA} = R\end{matrix}\right\} \Rightarrow \mathrm{OA} = \mathrm{A\Gamma}$$

Άρα A μέσο του ευθυγράμμου τμήματος $\mathrm{O\Gamma}$. Στο ισοσκελές τρίγωνο $\mathrm{OP\Gamma}$ $(\mathrm{OP} = \mathrm{P\Gamma})$ η PA είναι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην βάση $\mathrm{O\Gamma}$.

Οπότε θα έχω $\mathrm{PA} \perp \mathrm{O\Gamma}$

(Ως διάμεσος ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχεί στην βάση του)

$\Sigma \upsilon \nu \varepsilon \pi \acute{\omega} \varsigma$ PA *εφαπτομένη του κύκλου* (O,R) *γιατί είναι κάθετη στην ακτίνα επαφής.*

$$\mathrm{B\Delta} = \mathrm{O\Delta} - \mathrm{OB} \overset{\substack{\mathrm{O\Delta}=2R \\ \mathrm{OB}=R}}{=} 2R - R = R$$

$$\left.\begin{cases} \mathrm{B\Delta} = R \\ \mathrm{OB} = R \end{cases}\right\} \Rightarrow \mathrm{OB} = \mathrm{B\Delta}$$

Άρα B *μέσο του ευθυγράμμου τμήματος* $\mathrm{O\Delta}$. *Στο ισοσκελές τρίγωνο* $\mathrm{OP\Delta}\left(\mathrm{OP} = \mathrm{P\Delta}\right)$ *η* PB *είναι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην βάση* $\mathrm{O\Delta}$.
Ο*πότε θα έχω* $\mathrm{PB} \perp \mathrm{O\Delta}$
(*Ως διάμεσος ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχεί στην βάση του*)
Συνεπώς PB *εφαπτομένη του κύκλου* (O,R) *γιατί είναι κάθετη στην ακτίνα επαφής.*

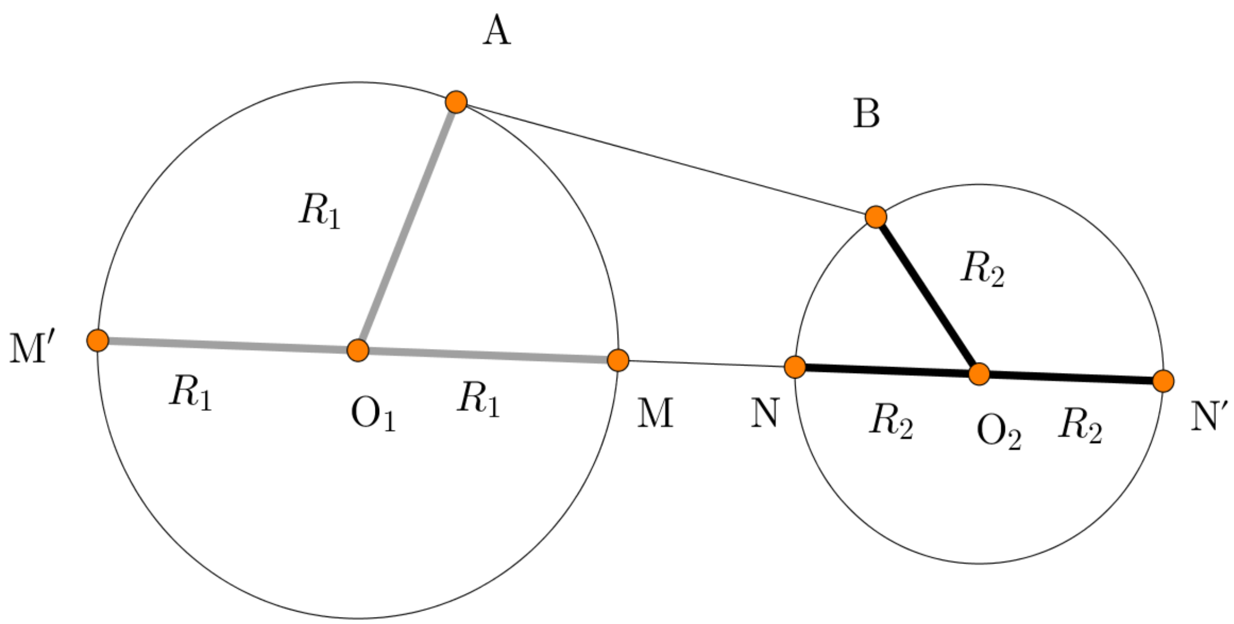
4.

Δίνονται δυο κύκλοι (O_1,R_1) *και* (O_2,R_2) *με* $O_1O_2 > R_1 + R_2 > 2R_2$ (I) Ν*α αποδείξετε οτι ο ένας βρίσκεται στο εξωτερικό του άλλου* (II) *Έστω ότι η διάκεντρος τέμνει τον* (O_1,R_1) *στα σημεία* M,M' *και τον* (O_2,R_2) *στα σημεία* N,N' *αντίστοιχα με τα* M,N *μεταξύ των* M',N'. Ν*α αποδείξετε ότι* $\mathrm{MN} \le \mathrm{AB} \le \mathrm{M'N'}$, *όπου* A,B *τυχαία σημεία των κύκλων* (O_1,R_1) *και* (O_2,R_2) *αντίστοιχα.*

Δίνονται δυο κύκλοι (O_1,R_1) *και* (O_2,R_2) *με* $O_1O_2 > R_1 + R_2 > 2R_2$

(I) $R_1 + R_2 > 2R_2 \Leftrightarrow R_1 > 2R_2 - R_2 \Leftrightarrow R_1 > R_2$

<u>*Δυο κύκλοι βρίσκονται ο ένας εξωτερικός του άλλου αν και μόνο αν η διάκεντρος είναι μεγαλύτερη απο το άθροισμα των ακτίνων τους.*</u> Ε*πειδή* $O_1O_2 > R_1 + R_2$ *ο κύκλος* (O_2,R_2) *βρίσκεται στο εξωτερικό του κύκλου* (O_1,R_1)



(II) Γ*νωρίζω ότι* <u>*για τυχαία σημεία* Α,Β,Γ,Δ *ισχύει η ανισότητα*</u>
<u>$\mathrm{AB} \le \mathrm{A\Gamma} + \mathrm{\Gamma\Delta} + \mathrm{\Delta A}$</u>. Ο*πότε θα έχω*:

$$\mathrm{AB} \le \mathrm{AO_1} + \mathrm{O_1O_2} + \mathrm{O_2B} \overset{\substack{\mathrm{AO_1=O_1M'} \\ \mathrm{O_2B=O_2N'}}}{\Longrightarrow} \mathrm{AB} \le \mathrm{O_1M'} + \mathrm{O_1O_2} + \mathrm{O_2N'} \Rightarrow \mathrm{AB} \le \mathrm{M'N'}$$

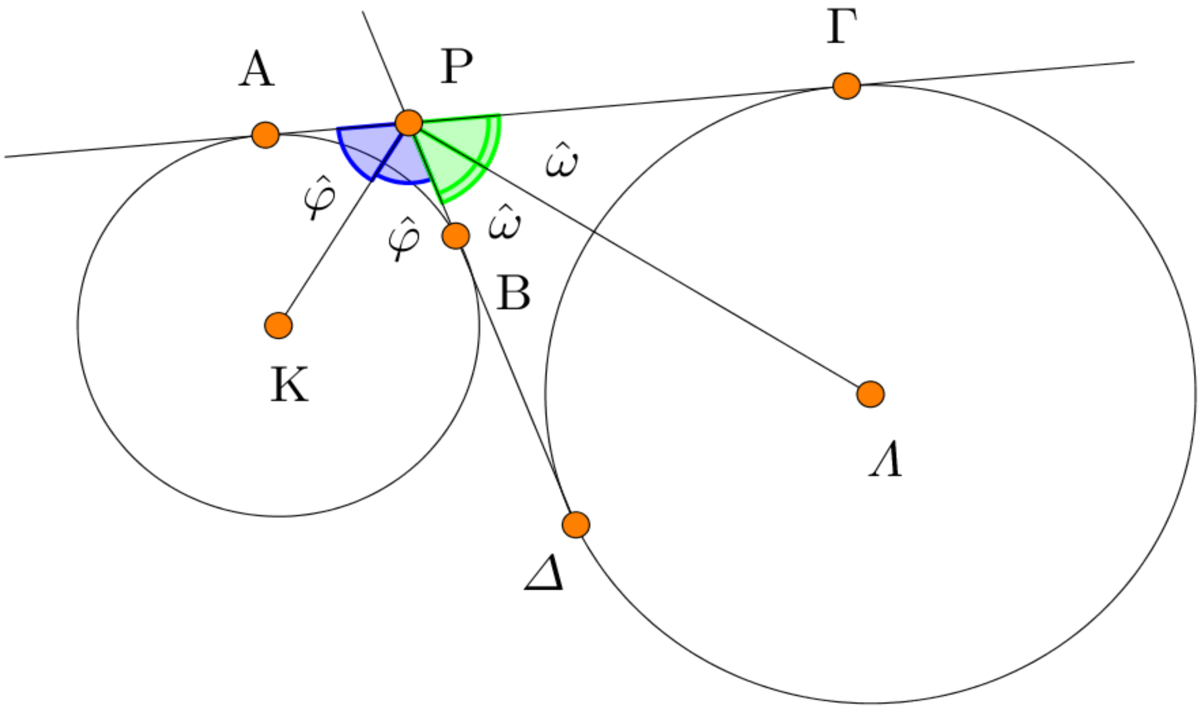
Έχω: $\mathrm{O_1O_2} = \mathrm{O_1M} + \mathrm{MN} + \mathrm{NO_2}$

$$\mathrm{O_1O_2} \le \mathrm{O_1A} + \mathrm{AB} + \mathrm{BO_2} \overset{\mathrm{O_1O_2=O_1M+MN+NO_2}}{\Longrightarrow} \mathrm{O_1M} + \mathrm{MN} + \mathrm{NO_2} \le \mathrm{O_1A} + \mathrm{AB} + \mathrm{BO_2}$$

$$\overset{\substack{\mathrm{O_1M=O_1A=}R_1 \\ \mathrm{NO_2=BO_2=}R_2}}{\Longrightarrow} \cancel{R_1} + \mathrm{MN} + \cancel{R_2} \le \cancel{R_1} + \mathrm{AB} + \cancel{R_2} \overset{a+x\le a+y \Leftrightarrow x\le y}{\Longrightarrow} \mathrm{MN} \le \mathrm{AB}$$

5.

Ένας κύκλος Κ *είναι εξωτερικός άλλου κύκλου* Λ. Μ*ια κοινή εξωτερική εφαπτομένη και μια κοινή εσωτερική εφαπτομένη των δυο κύκλων τέμνονται στο* Ρ. Ν*α αποδείξετε ότι* $\mathrm{K\hat{P}\Lambda} = 90^0$



ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
ΑΓ : *Κοινή εξωτερική εφαπτομένη των κύκλων* $(\mathrm{K}, R_1), (\Lambda, R_2)$ ΡΔ : *Κοινή εσωτερική εφαπτομένη των κύκλων* $(\mathrm{O}_1, R_1), (\mathrm{O}_2, R_2)$	$\mathrm{K}\hat{\mathrm{P}}\Lambda = 90^0$

Γ*νωρίζω οτι* <u>*η διακεντρική ευθεία διχοτομεί την γωνία που σχηματίζουν εφαπτόμενα τμήματα που άγονται απο το ίδιο σημείο*</u>

$\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}$ PA,PB *εφαπτόμενα τμήματα στον κύκλο* (K,R_1) *η διακεντρική ευθεία θα διχοτομεί την γωνία που σχηματίζουν τα* PA,PB.Ο*πότε θα έχω*:

$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{P}}\mathrm{K}=\mathrm{K}\hat{\mathrm{P}}\mathrm{B}=\hat{\varphi}\,(1)$$

$\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}$ $\mathrm{P\Delta},\mathrm{P\Gamma}$ *εφαπτόμενα τμήματα στον κύκλο* (Λ,R_2) *η διακεντρική ευθεία θα διχοτομεί την γωνία που σχηματίζουν τα* $\mathrm{P\Delta},\mathrm{P\Gamma}$.Ο*πότε θα έχω*:

$$\Delta\hat{\mathrm{P}}\Lambda=\Gamma\hat{\mathrm{P}}\Lambda=\hat{\omega}\,(2)$$

$$\acute{E}\chi\omega:\mathrm{A}\hat{\mathrm{P}}\Gamma=180^0\Leftrightarrow \mathrm{A}\hat{\mathrm{P}}\mathrm{K}+\mathrm{K}\hat{\mathrm{P}}\mathrm{B}+\Delta\hat{\mathrm{P}}\Lambda+\Lambda\hat{\mathrm{P}}\Gamma=180^0 \overset{\substack{\mathrm{A}\hat{\mathrm{P}}\mathrm{K}=\mathrm{K}\hat{\mathrm{P}}\mathrm{B}=\hat{\varphi}\\ \Delta\hat{\mathrm{P}}\Lambda=\Gamma\hat{\mathrm{P}}\Lambda=\hat{\omega}}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\hat{\varphi}+\hat{\varphi}+\hat{\omega}+\hat{\omega}=180^0\Leftrightarrow 2\hat{\varphi}+2\hat{\omega}=180^0\Leftrightarrow 2\left(\hat{\varphi}+\hat{\omega}\right)=2\bullet 90^0$$

$$\overset{\substack{\mathrm{A}\nu\ \alpha\neq 0\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:\\ \alpha x=\alpha y\Leftrightarrow x=y}}{\Longleftrightarrow}\quad \hat{\varphi}+\hat{\omega}=90^0$$

$$\acute{E}\chi\omega:\mathrm{K}\hat{\mathrm{P}}\Lambda=\mathrm{K}\hat{\mathrm{P}}\Delta+\Delta\hat{\mathrm{P}}\Lambda \overset{\substack{\mathrm{K}\hat{\mathrm{P}}\Delta=\hat{\varphi}\\ \Delta\hat{\mathrm{P}}\Lambda=\hat{\omega}}}{=} \hat{\varphi}+\hat{\omega}=90^0$$