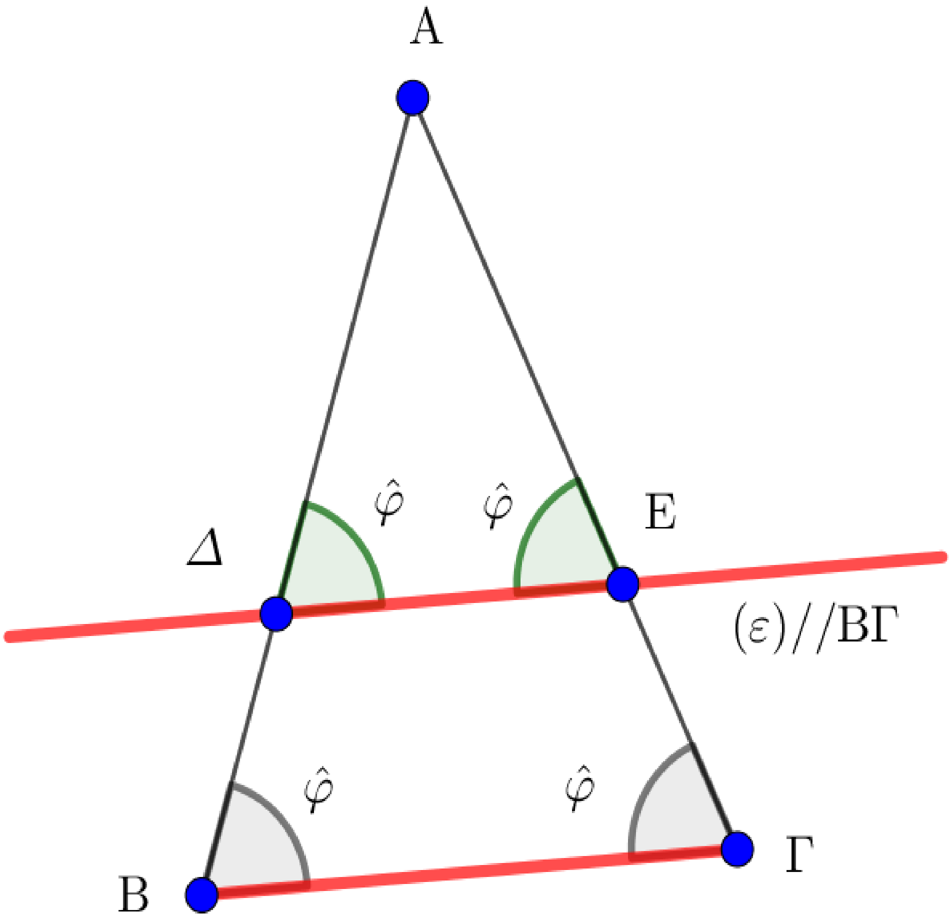
ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ

1.

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ *και ευθεία ε παράλληλη προς την* ΒΓ, *που τέμνει τις* ΑΒ *και* ΑΓ *στα* Δ *και* Ε *αντίστοιχα.* Ν*α αποδείξετε ότι το τρίγωνο* ΑΔΕ *είναι ισοσκελές.*



ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
ΑΒ = ΑΓ, ΔΕ / /ΒΓ	ΑΔ = ΑΕ

Σ*το ισοσκελές τρίγωνο* ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) *θα έχω* $\mathrm{A\hat{B}\Gamma} = \mathrm{A\hat{\Gamma}B} = \hat{\varphi}\,(1)$

(Ω*ς γωνίες προσκείμενες στην βάση ισοσκελούς τριγώνου*)

Ο*ι παράλληλες ευθείες* ΔΕ / / ΒΓ *τέμνουν την* ΑΒ. Ο*πότε θα έχω*:

$\mathrm{A\hat{\Delta}E} = \mathrm{A\hat{B}\Gamma} = \hat{\varphi}\,(2)$ (Ω*ς εντός εκτός και επι τα αυτά μέρη*)

$Οι\ παράλληλες\ ευθείες\ ΔΕ//ΒΓ\ τέμνουν\ την\ ΑΓ. Οπότε\ θα\ έχω:$

$\hat{ΑΕΔ} = \hat{ΑΓΒ} = \hat{\varphi}(3)(Ως\ εντός\ εκτός\ και\ επι\ τα\ αυτά\ μέρη)$

$Απο\ τις\ σχέσεις\ (2),(3)\ θα\ έχω:$

$$\left.\begin{matrix} \hat{ΑΔΕ} = \hat{\varphi} \\ \hat{ΑΕΔ} = \hat{\varphi} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \hat{ΑΔΕ} = \hat{ΑΕΔ}$$

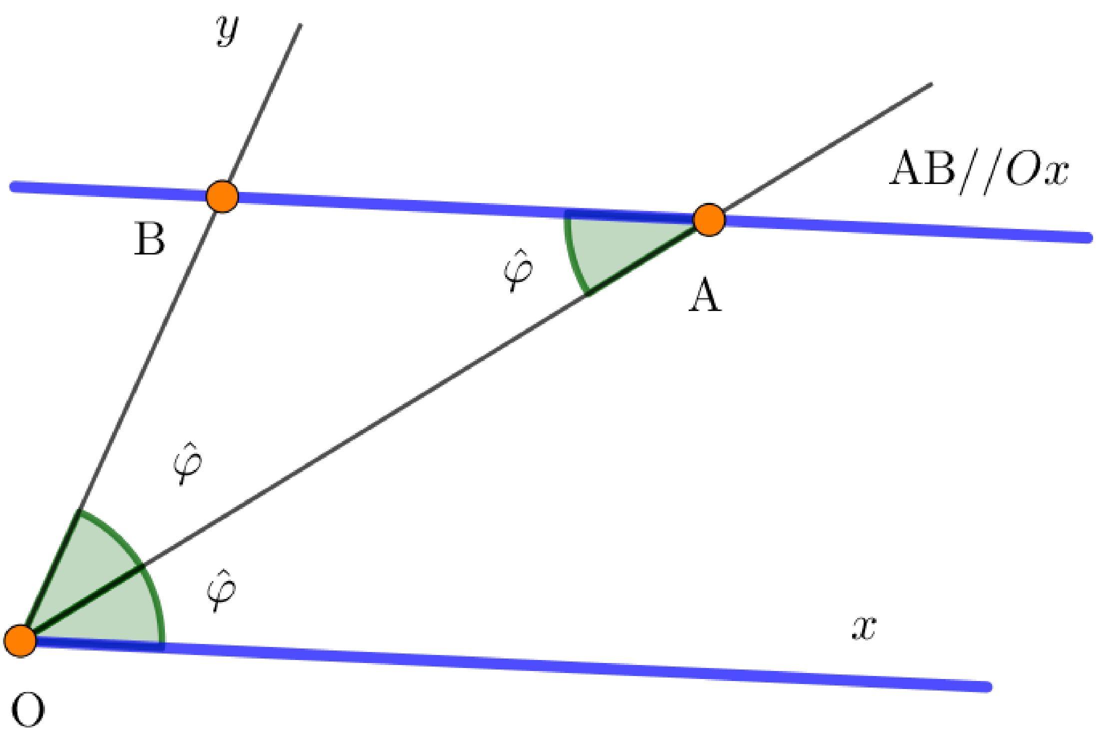
$Στο\ τρίγωνο\ ΑΔΕ\ έχω\ \hat{ΑΔΕ} = \hat{ΑΕΔ}. Οπότε\ θα\ ισχύει\ ΑΔ = ΑΕ$

$\left(\begin{matrix} Γιατί\ στο\ ίδιο\ τρίγωνο\ απέναντι\ απο\ ίσες\ γωνίες\ βρίσκονται \\ ίσες\ πλευρές \end{matrix}\right)$

$Συνεπώς\ το\ τρίγωνο\ ΑΔΕ(ΑΔ = ΑΕ)\ είναι\ ισοσκελές\ γιατί\ έχει\ δυο\ τουλάχιστον\ πλευρές\ ίσες.$

2.

$Δίνεται\ γωνία\ x\hat{O}y$ και σημείο Α της διχοτόμου της. Αν η προς την Οx τέμνει την την Οy στο Β, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές.



ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$\mathrm{OA}: \Delta\iota\chi o\tau \acute{o}\mu o\varsigma\ \tau\eta\varsigma\ x\hat{\mathrm{O}}y$ $\mathrm{AB}//\mathrm{O}x$	$\mathrm{OB}=\mathrm{AB}$

$\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \mathrm{OA}\ \delta\iota\chi o\tau\acute{o}\mu o\varsigma\ \tau\eta\varsigma\ x\hat{\mathrm{O}}y\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{A}=\mathrm{A}\hat{\mathrm{O}}x=\hat{\varphi}\,(1)$$

$\mathrm{O}\iota\ \pi\alpha\rho\acute{\alpha}\lambda\lambda\eta\lambda\varepsilon\varsigma\ \varepsilon\upsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\varepsilon\varsigma\ \mathrm{AB}//\mathrm{O}x\ \tau\acute{\varepsilon}\mu\nu o\upsilon\nu\ \tau\eta\nu\ \mathrm{OA}.\ \mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{O}=\mathrm{A}\hat{\mathrm{O}}x=\hat{\varphi}\,(2)\,(\Omega\varsigma\ \varepsilon\nu\tau\acute{o}\varsigma\ \varepsilon\nu\alpha\lambda\lambda\acute{\alpha}\xi)$$

$\mathrm{A}\pi o\ \tau\iota\varsigma\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\varepsilon\iota\varsigma\ (1),(2)\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\left.\begin{cases}\mathrm{B}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{A}=\hat{\varphi}\\ \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{O}=\hat{\varphi}\end{cases}\right\}\Rightarrow \mathrm{B}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{A}=\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{O}$$

$\Sigma\tau o\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu o\ \mathrm{OBA}\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ \mathrm{B}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{A}=\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{O}.\ \mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \theta\alpha\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\ \mathrm{OB}=\mathrm{AB}$

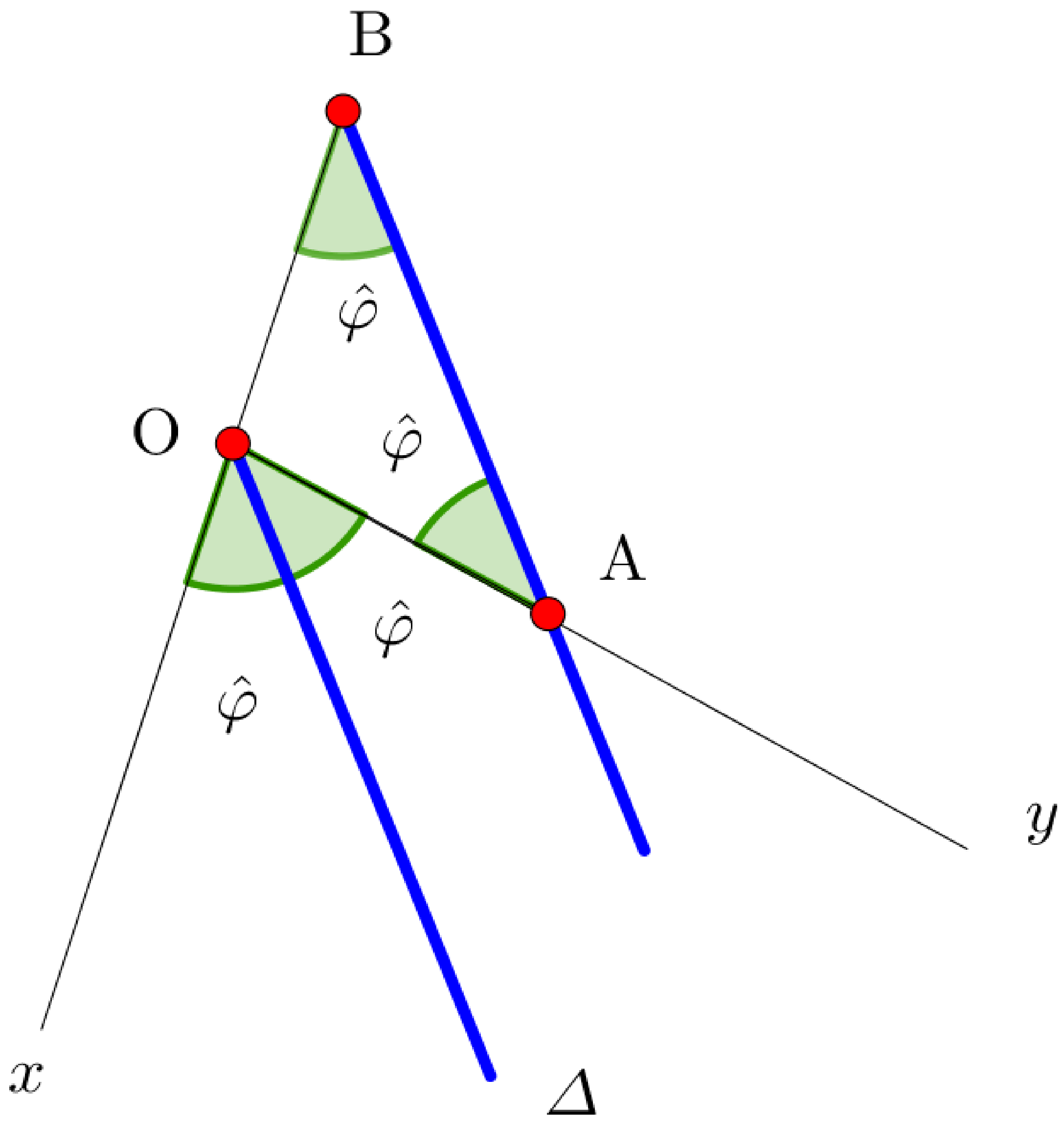
$\left(\begin{array}{l}\Gamma\iota\alpha\tau\acute{\iota}\ \sigma\tau o\ \acute{\iota}\delta\iota o\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu o\ \alpha\pi\acute{\varepsilon}\nu\alpha\nu\tau\iota\ \alpha\pi o\ \acute{\iota}\sigma\varepsilon\varsigma\ \gamma\omega\nu\acute{\iota}\varepsilon\varsigma\ \beta\rho\acute{\iota}\sigma\kappa o\nu\tau\alpha\iota\\ \acute{\iota}\sigma\varepsilon\varsigma\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\varepsilon}\varsigma\end{array}\right)$

$\Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma\ \tau o\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu o\ \mathrm{OBA}\,(\mathrm{OB}=\mathrm{AB})\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \iota\sigma o\sigma\kappa\varepsilon\lambda\acute{\varepsilon}\varsigma\ \gamma\iota\alpha\tau\acute{\iota}\ \acute{\varepsilon}\chi\varepsilon\iota$ $\delta\upsilon o\ \tau o\upsilon\lambda\acute{\alpha}\chi\iota\sigma\tau o\nu\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\varepsilon}\varsigma\ \acute{\iota}\sigma\varepsilon\varsigma.$

3.

$\Delta\acute{\iota}\nu\varepsilon\tau\alpha\iota\ \gamma\omega\nu\acute{\iota}\alpha\ x\hat{\mathrm{O}}y\ \kappa\alpha\iota\ \eta\ \delta\iota\chi o\tau\acute{o}\mu o\varsigma\ \tau\eta\varsigma\ \mathrm{O}\Delta.\ \mathrm{A}\pi\acute{o}\ \tau o\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\ \mathrm{A}\ \tau\eta\varsigma\ \mathrm{O}y$ $\varphi\acute{\varepsilon}\rho o\upsilon\mu\varepsilon\ \pi\alpha\rho\acute{\alpha}\lambda\lambda\eta\lambda\eta\ \pi\rho o\varsigma\ \tau\eta\nu\ \mathrm{O}\Delta\ \pi o\upsilon\ \tau\acute{\varepsilon}\mu\nu\varepsilon\iota\ \tau\eta\nu\ \pi\rho o\acute{\varepsilon}\kappa\tau\alpha\sigma\eta\ \tau\eta\varsigma$ $\tau\eta\varsigma\ \mathrm{O}x\ \sigma\tau o\ \mathrm{B}.\ \mathrm{N}\alpha\ \alpha\pi o\delta\varepsilon\acute{\iota}\xi\varepsilon\tau\varepsilon\ \acute{o}\tau\iota\ \mathrm{OA}=\mathrm{OB}$

ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$\mathrm{O}\Delta: \Delta\iota\chi o\tau \acute{o}\mu o\varsigma\ \tau\eta\varsigma\ x\hat{\mathrm{O}}y$ $\mathrm{AB}//\mathrm{O}\Delta$	$\mathrm{OB}=\mathrm{AB}$



$\text{Επειδή ΟΔ } \textit{διχοτόμος της } x\hat{O}y \textit{ θα έχω}:$

$x\hat{O}\Delta = \Delta\hat{O}A = \hat{\varphi}\,(1)$

$\text{Οι } \textit{παράλληλες } O\Delta // AB \textit{ τέμνουν την } Oy.\ \text{Οπότε } \textit{θα έχω}:$

$B\hat{A}O = \Delta\hat{O}A = \hat{\varphi}\,(2)\,(\textit{Ως εντός εναλλάξ})$

$\text{Οι } \textit{παράλληλες } O\Delta // AB \textit{ τέμνουν την } Bx.\ \text{Οπότε } \textit{θα έχω}:$

$O\hat{B}A = x\hat{O}\Delta = \hat{\varphi}\,(3)$

$\text{Απο τις σχέσεις } (2),(3) \text{ θα έχω}:$

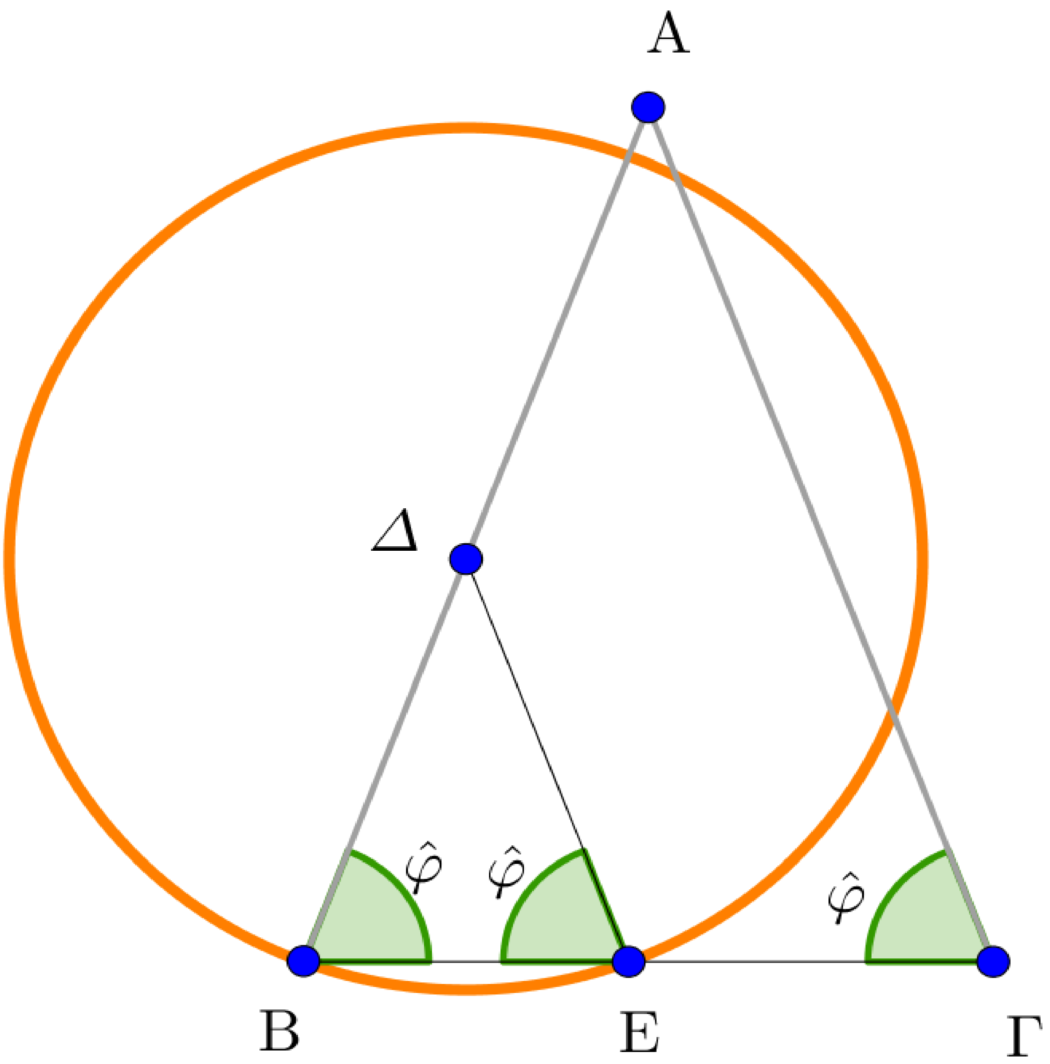
$$\left.\begin{cases} \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{O} = \hat{\varphi} \\ \mathrm{O}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{A} = \hat{\varphi} \end{cases}\right\} \Rightarrow \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{O} = \mathrm{O}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{A}$$

Στο τρίγωνο OBA έχω $\mathrm{O}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{A} = \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{O}$. Οπότε θα ισχύει $\mathrm{OA} = \mathrm{OB}$

(Γιατί στο ίδιο τρίγωνο απέναντι απο ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές)

4.

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}\,(\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma})$ και σημείο Δ της πλευράς AB. Αν ο κύκλος $(\Delta, \Delta\mathrm{B})$ ότι $\Delta\mathrm{E} // \mathrm{A\Gamma}$.



ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$AB = A\Gamma$ $(\Delta, \Delta B)$	$\Delta E // A\Gamma$

Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma\left(AB = A\Gamma\right)$ *θα έχω*:

$$A\hat{B}\Gamma = A\hat{\Gamma}B = \hat{\varphi}\,(1)\left(\begin{array}{l}\text{Ως γωνίες προσκείμενες στην βάση}\\ \text{ισοσκελούς τριγώνου}\end{array}\right)$$

Στον κύκλο $(\Delta, \Delta B)$ *θα έχω* $\Delta B = \Delta E$ (*Ως ακτίνες του ίδιου κύκλου*)

Οπότε στο ισοσκελές τρίγωνο $\Delta BE\left(\Delta B = \Delta E\right)$ *θα έχω*:

$$\Delta\hat{E}B = \Delta\hat{B}E = \hat{\varphi}\,(2)\left(\begin{array}{l}\text{Ως γωνίες προσκείμενες στην βάση}\\ \text{ισοσκελούς τριγώνου}\end{array}\right)$$

Απο τις σχέσεις $(1), (2)$ *θα έχω*:

$$\left\{\begin{array}{l}A\hat{\Gamma}B = \hat{\varphi}\\ \Delta\hat{B}E = \hat{\varphi}\end{array}\right\} \Rightarrow A\hat{\Gamma}B = \Delta\hat{B}E$$

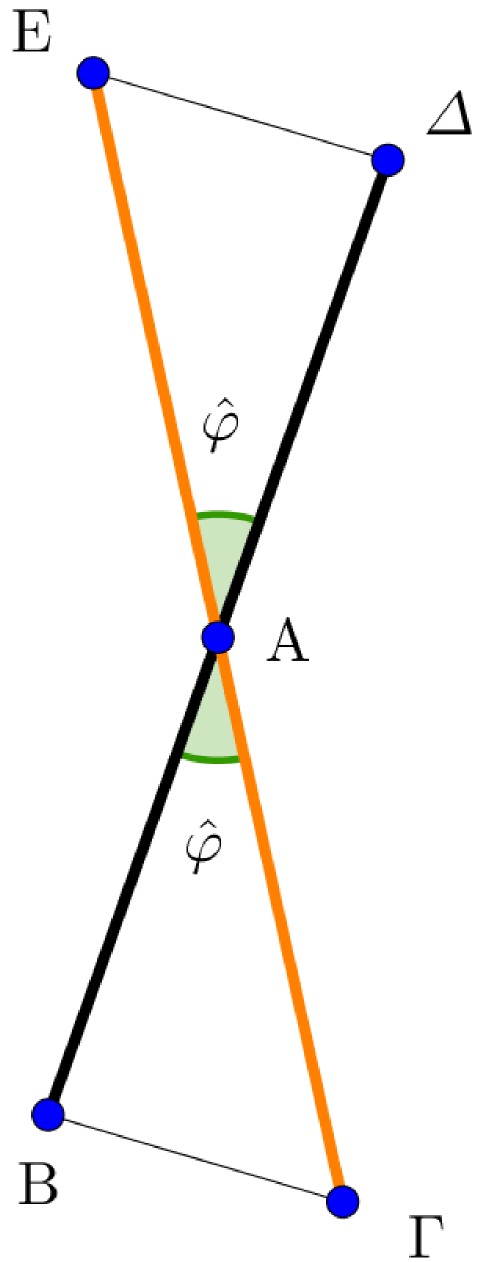
Οι ευθείες $\Delta E, A\Gamma$ *τέμνουν την* $B\Gamma$ *και έχουν δυο τουλάχιστον* <u>*εντός εκτός και επι τα αυτά μέρη γωνίες ίσες*</u> *τις* $A\hat{\Gamma}B$ *και* $\Delta\hat{B}E$.

Συνεπώς θα έχω $\Delta E // A\Gamma$

5.

Στις προεκτάσεις των πλευρών $BA, \Gamma A$ *τριγώνου* $AB\Gamma$ *παίρνουμε αντίστοιχα τα τμήματα*: $A\Delta = AB$ *και* $AE = A\Gamma$. *Να αποδείξετε ότι* $\Delta E // B\Gamma$.

ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$A\Delta = AB$ $AE = A\Gamma$	$\Delta E // B\Gamma$


E
Δ
$\hat{\varphi}$
A
$\hat{\varphi}$
B
Γ

$\Sigma\upsilon\gamma\kappa\rho\acute{\iota}\nu\omega\ \tau\alpha\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu\alpha\ \Delta\overset{\triangle}{\mathrm{A}}\mathrm{E}\ \kappa\alpha\iota\ \mathrm{B}\overset{\triangle}{\mathrm{A}}\Gamma$. $\mathrm{A}\upsilon\tau\acute{\alpha}\ \acute{\varepsilon}\chi o\upsilon\nu$:

$$\left.\begin{cases}(\mathrm{I})\ \mathrm{A}\Delta=\mathrm{AB}\left(\Upsilon\pi\acute{o}\theta\varepsilon\sigma\eta\right)\\(\mathrm{II})\ \mathrm{AE}=\mathrm{A}\Gamma\left(\Upsilon\pi\acute{o}\theta\varepsilon\sigma\eta\right)\\(\mathrm{III})\ \mathrm{E}\hat{\mathrm{A}}\Delta=\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma\left(\Omega\varsigma\ \kappa\alpha\tau\alpha\kappa o\rho\upsilon\varphi\acute{\eta}\nu\right)\end{cases}\right\}$$

$\Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ \Delta\overset{\triangle}{\mathrm{A}}\mathrm{E}=\mathrm{B}\overset{\triangle}{\mathrm{A}}\Gamma\left(\Pi\Gamma\Pi\right)$.$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega$:

$$\mathrm{E}\hat{\Delta}\mathrm{A}=\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma\begin{pmatrix}\Omega\varsigma\ \gamma\omega\nu\acute{\iota}\varepsilon\varsigma\ \pi o\upsilon\ \beta\rho\acute{\iota}\sigma\kappa o\nu\tau\alpha\iota\ \alpha\pi\acute{\varepsilon}\nu\alpha\nu\tau\iota\ \sigma\varepsilon\ \delta\upsilon o\ \acute{\iota}\sigma\alpha\\\tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu\alpha\ \alpha\pi\acute{\varepsilon}\nu\alpha\nu\tau\iota\ \alpha\pi o\ \acute{\iota}\sigma\varepsilon\varsigma\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\varepsilon}\varsigma\end{pmatrix}$$

$\mathrm{O}\iota\ \varepsilon\upsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\varepsilon\varsigma\ \Delta\mathrm{E},\mathrm{B}\Gamma\ \tau\acute{\varepsilon}\mu\nu o\upsilon\nu\ \tau\eta\nu\ \mathrm{B}\Delta\ \kappa\alpha\iota\ \acute{\varepsilon}\chi o\upsilon\nu\ \delta\upsilon o\ \tau o\upsilon\lambda\acute{\alpha}\chi\iota\sigma\tau o\nu$

$\underline{\varepsilon\nu\tau\acute{o}\varsigma\ \varepsilon\nu\alpha\lambda\lambda\acute{\alpha}\xi\ \gamma\omega\nu\acute{\iota}\varepsilon\varsigma\ \acute{\iota}\sigma\varepsilon\varsigma}\ \tau\iota\varsigma\ \mathrm{E}\hat{\Delta}\mathrm{A}\ \kappa\alpha\iota\ \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma$.

$\Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ \Delta\mathrm{E}//\mathrm{B}\Gamma$

6.

$\Delta\acute{\iota}\nu\varepsilon\tau\alpha\iota\ \kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\varsigma\ \left(\mathrm{O},\rho\right)\ \kappa\alpha\iota\ \mathrm{M}\ \tau o\ \mu\acute{\varepsilon}\sigma o\ \tau\eta\varsigma\ \chi o\rho\delta\acute{\eta}\varsigma\ \mathrm{AB}$. $\Phi\acute{\varepsilon}\rho o\upsilon\mu\varepsilon$ $\mathrm{O}x\perp\mathrm{OM}$. $\mathrm{N}\alpha\ \alpha\pi o\delta\varepsilon\acute{\iota}\xi\varepsilon\tau\varepsilon\ \acute{o}\tau\iota\ \mathrm{O}x//\mathrm{AB}$.

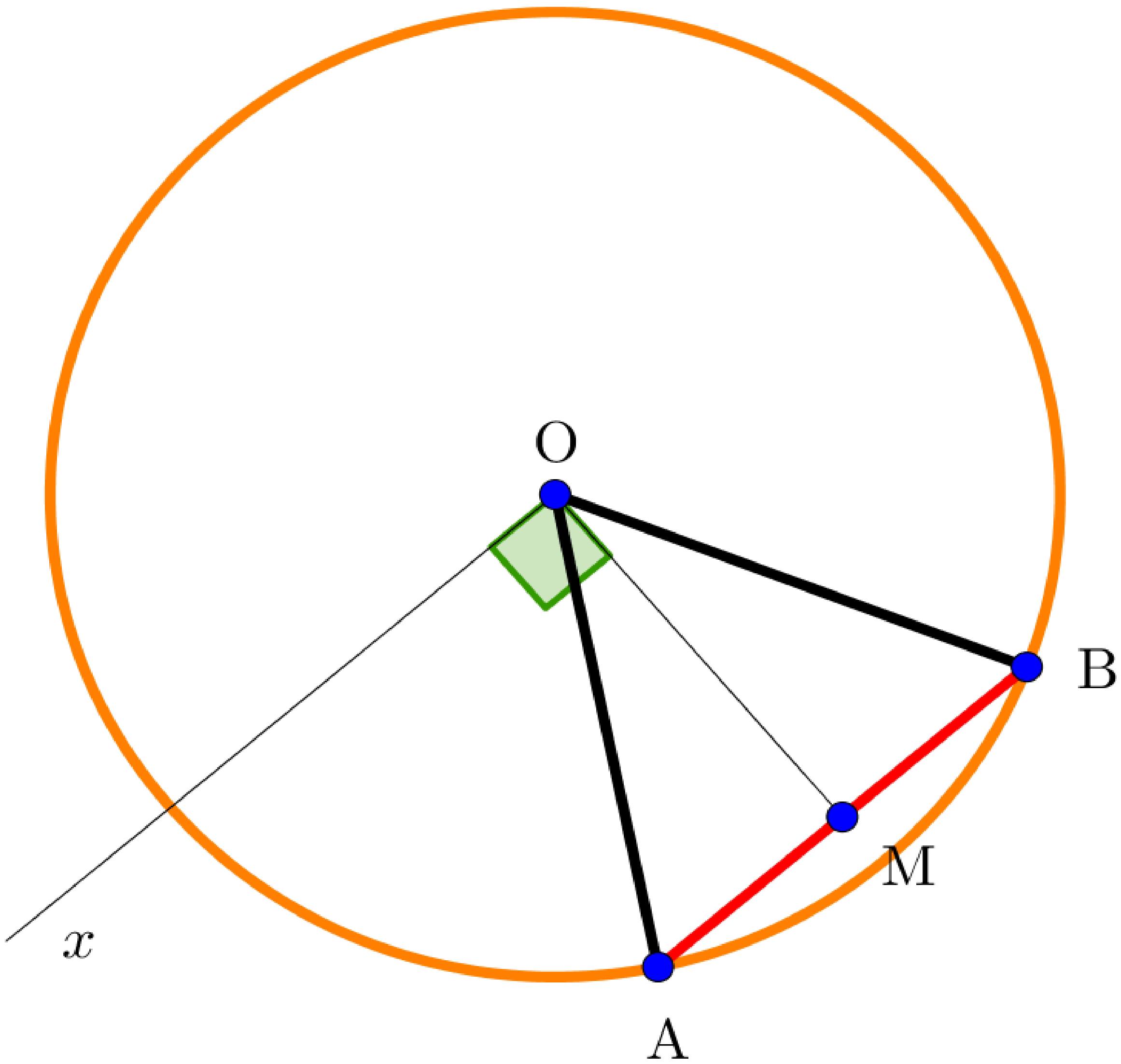
ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$\mathrm{M}:\mathrm{M}\acute{\varepsilon}\sigma o\ \tau\eta\varsigma\ \chi o\rho\delta\acute{\eta}\varsigma\ \mathrm{AB}$ $\mathrm{O}x\perp\mathrm{OM}$	$\mathrm{O}x//\mathrm{AB}$

$\acute{E}\chi\omega\ \mathrm{OA}=\mathrm{OB}\left(\Omega\varsigma\ \alpha\kappa\tau\acute{\iota}\nu\varepsilon\varsigma\ \tau o\upsilon\ \acute{\iota}\delta\iota o\upsilon\ \kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\upsilon\right)$.$\Sigma\tau o\ \iota\sigma o\sigma\kappa\varepsilon\lambda\acute{\varepsilon}\varsigma\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu o$ $\mathrm{OAB}\left(\mathrm{OA}=\mathrm{OB}\right)\ \eta\ \mathrm{AM}\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \eta\ \delta\iota\acute{\alpha}\mu\varepsilon\sigma o\varsigma\ \pi o\upsilon\ \alpha\nu\tau\iota\sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\acute{\iota}$ $\sigma\tau\eta\nu\ \beta\acute{\alpha}\sigma\eta\ \tau o\upsilon\ \mathrm{AB}$.$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega$:

$$\mathrm{OM}\perp\mathrm{AB}\begin{pmatrix}\Omega\varsigma\ \delta\iota\acute{\alpha}\mu\varepsilon\sigma o\varsigma\ \iota\sigma o\sigma\kappa\varepsilon\lambda o\acute{\upsilon}\varsigma\ \tau\rho\iota\gamma\acute{\omega}\nu o\upsilon\ \pi o\upsilon\ \alpha\nu\tau\iota\sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\acute{\iota}\\\sigma\tau\eta\nu\ \beta\acute{\alpha}\sigma\eta\ \tau o\upsilon\end{pmatrix}$$

$\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \mathrm{AB}\perp\mathrm{OM}\ \kappa\alpha\iota\ \mathrm{O}x\perp\mathrm{OM}\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega$:

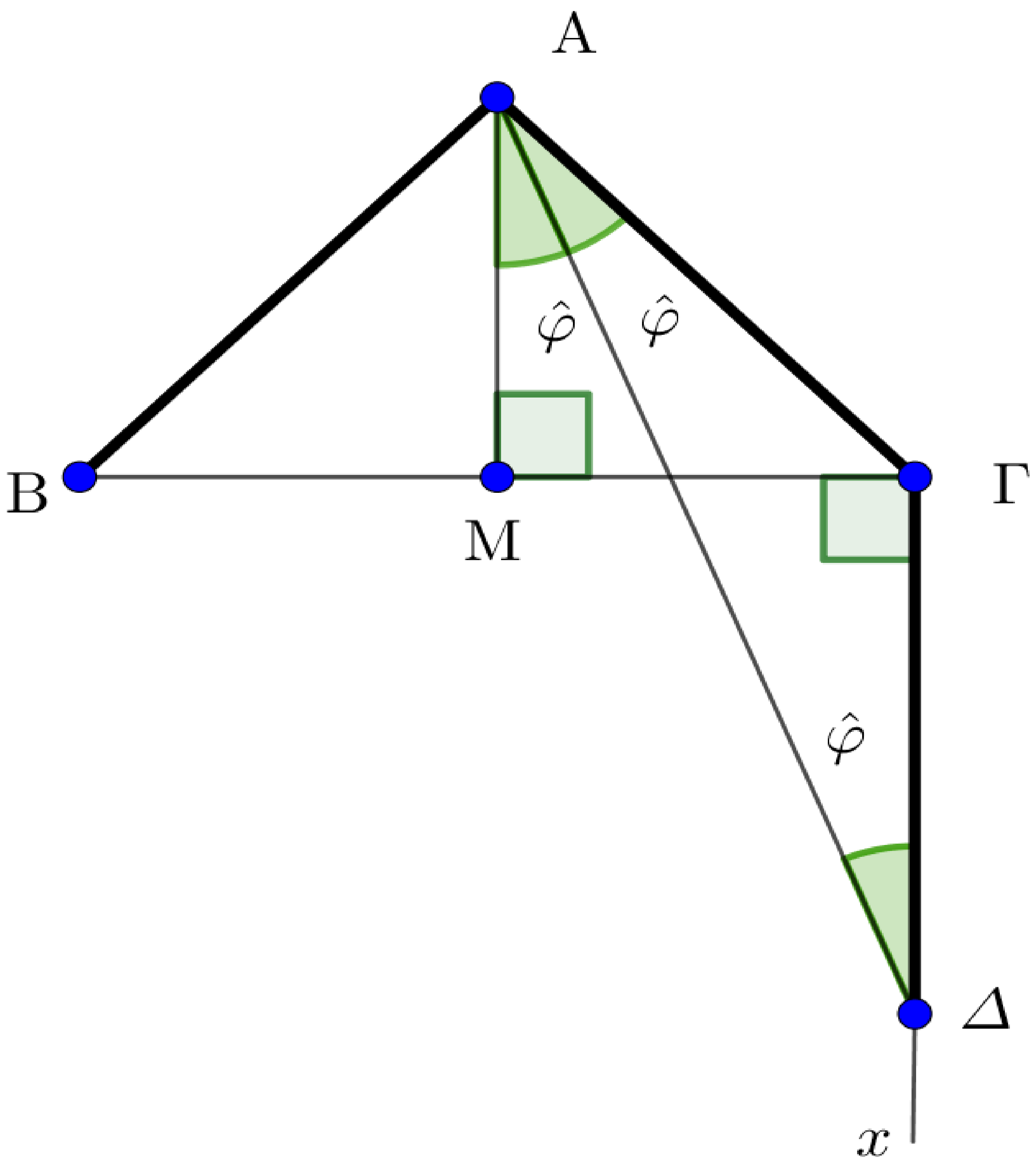
$$\mathrm{AB}//\mathrm{O}x\begin{pmatrix}\Omega\varsigma\ \varepsilon\upsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\varepsilon\varsigma\ \tau o\upsilon\ \acute{\iota}\delta\iota o\upsilon\ \varepsilon\pi\iota\pi\acute{\varepsilon}\delta o\upsilon\ \pi o\upsilon\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau\varepsilon\varsigma\ \sigma\tau\eta\nu\\\acute{\iota}\delta\iota\alpha\ \varepsilon\upsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\alpha\end{pmatrix}$$



7.

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma\left(AB = A\Gamma\right)$ *και η διάμεσος του* AM. *Φέρουμε* $\Gamma x \perp B\Gamma$ *προς το ημιέπιπεδο που δεν ανήκει το* A *και παίρνουμε σε αυτή τμήμα* $\Gamma\Delta = AB$. *Να αποδείξετε ότι η* $A\Delta$ *είναι διχοτόμος της γωνίας* $M\hat{A}\Gamma$.

ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$AB = A\Gamma$ M : *Μέσο της* $B\Gamma$ $\Gamma x \perp B\Gamma, \Gamma\Delta = AB$	$A\Delta$: *Διχοτόμος της* $M\hat{A}\Gamma$



$\Sigma\tau o\ \iota\sigma o\sigma\kappa\varepsilon\lambda\acute{\varepsilon}\varsigma\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu o$ $\mathrm{AB\Gamma}\left(\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}\right)$ η AM $\varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \eta\ \delta\iota\acute{\alpha}\mu\varepsilon\sigma o\varsigma\ \pi o\upsilon$ $\alpha\nu\tau\iota\sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\acute{\iota}\ \sigma\tau\eta\nu\ \beta\acute{\alpha}\sigma\eta\ \tau o\upsilon$ $\mathrm{B\Gamma}$. $\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega$:

$$\mathrm{AM}\perp\mathrm{B\Gamma}\left(\begin{array}{l}\Omega\varsigma\ \delta\iota\acute{\alpha}\mu\varepsilon\sigma o\varsigma\ \iota\sigma o\sigma\kappa\varepsilon\lambda o\acute{\upsilon}\varsigma\ \tau\rho\iota\gamma\acute{\omega}\nu o\upsilon\ \pi o\upsilon\ \alpha\nu\tau\iota\sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\acute{\iota}\\ \sigma\tau\eta\nu\ \beta\acute{\alpha}\sigma\eta\ \tau o\upsilon\end{array}\right)$$

$\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}$ $\mathrm{AM}\perp\mathrm{B\Gamma}$ $\kappa\alpha\iota$ $\mathrm{\Gamma\Delta}\perp\mathrm{B\Gamma}$ $\theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega$:

$$\mathrm{AM}//\mathrm{\Gamma\Delta}\left(\begin{array}{l}\Omega\varsigma\ \varepsilon\upsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\varepsilon\varsigma\ \tau o\upsilon\ \acute{\iota}\delta\iota o\upsilon\ \varepsilon\pi\iota\pi\acute{\varepsilon}\delta o\upsilon\ \pi o\upsilon\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau\varepsilon\varsigma\ \sigma\tau\eta\nu\\ \acute{\iota}\delta\iota\alpha\ \varepsilon\upsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\alpha\end{array}\right)$$

$\text{Οι } \textit{παράλληλες } AM//Γ\Delta \textit{ τέμνουν την } A\Delta. \text{ Οπότε θα έχω}:$

$M\hat{A}\Delta = A\hat{\Delta}\Gamma = \hat{\varphi}\,(1)$

Στο ισοσκελές τρίγωνο $A\Gamma\Delta\,(A\Gamma = \Gamma\Delta)$ θα έχω:

$\Delta\hat{A}\Gamma = A\hat{\Delta}\Gamma = \hat{\varphi}\,(2)$

Απο τις σχέσεις $(1),(2)$ θα έχω:

$$\left.\begin{cases} M\hat{A}\Delta = \hat{\varphi} \\ \Delta\hat{A}\Gamma = \hat{\varphi} \end{cases}\right\} \Rightarrow M\hat{A}\Delta = \Delta\hat{A}\Gamma$$

Επειδή $M\hat{A}\Delta = \Delta\hat{A}\Gamma$ προκύπτει ότι η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $M\hat{A}\Gamma$.

8.

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διχοτόμος του $A\Delta$. Απο την κορυφή B φέρουμε $BE//A\Delta$ που τέμνει την προέκταση της ΓA στο E. Να αποδείξετε ότι $E\Gamma = AB + A\Gamma$.

ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$AB = A\Gamma$ M : Μέσο της $B\Gamma$ $\Gamma x \perp B\Gamma, \Gamma\Delta = AB$	$A\Delta$: Διχοτόμος της $M\hat{A}\Gamma$

Επειδή $A\Delta$ διχοτόμος της $B\hat{A}\Gamma$ θα έχω:

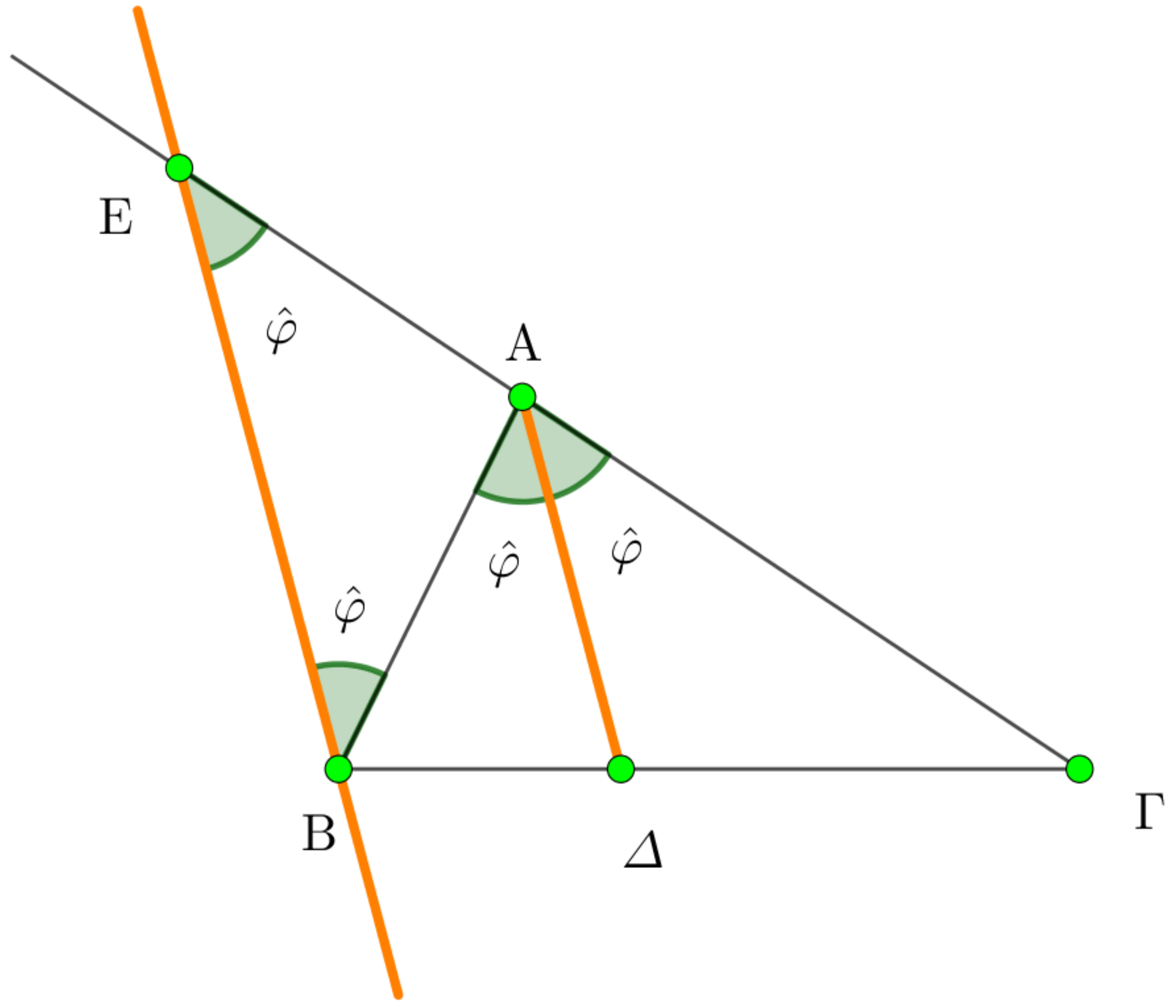
$B\hat{A}\Delta = \Delta\hat{A}\Gamma = \hat{\varphi}\,(1)$

Οι παράλληλες $BE//A\Delta$ τέμνουν την AB. Οπότε θα έχω:

$E\hat{B}A = B\hat{A}\Delta = \hat{\varphi}\,(2)$ (Ως εντός εναλλάξ)

Οι παράλληλες $BE//A\Delta$ τέμνουν την AE. Οπότε θα έχω:

$B\hat{E}A = \Delta\hat{A}\Gamma = \hat{\varphi}\,(3)$ (Ως εντός εκτός και επι τα αυτά μέρη)



Απο τις σχέσεις $(2),(3)$ *θα έχω:*

$$\left.\begin{cases} \mathrm{E}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{A} = \hat{\varphi} \\ \mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{A} = \hat{\varphi} \end{cases}\right\} \Rightarrow \mathrm{E}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{A} = \mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{A}$$

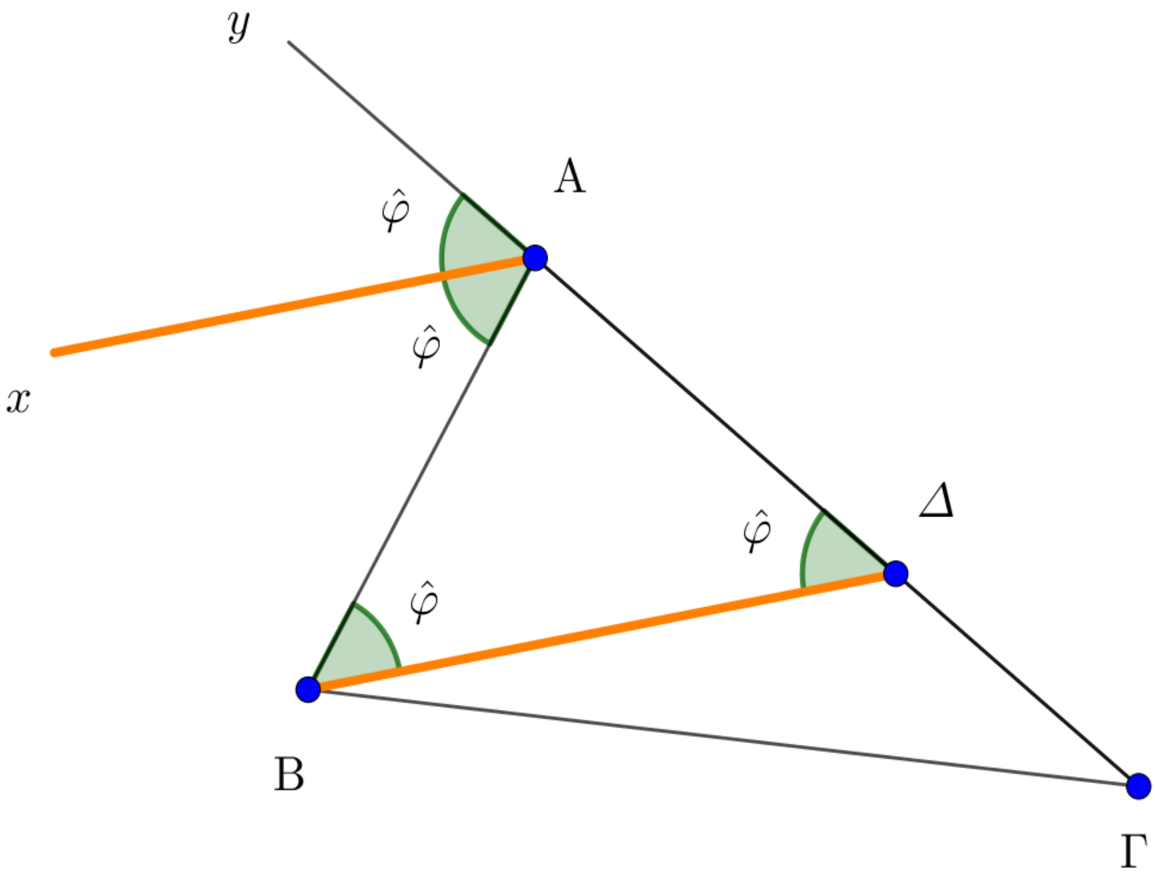
Στο τρίγωνο EAB *έχω* $\mathrm{E}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{A} = \mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{A}$. *Οπότε θα ισχύει* $\mathrm{AB} = \mathrm{AE}\,(4)$

(*Γιατί στο ίδιο τρίγωνο απέναντι απο ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές*)

Έχω: $\mathrm{E\Gamma} = \mathrm{EA} + \mathrm{A\Gamma} \overset{\mathrm{EA=AB}}{=} \mathrm{AB} + \mathrm{A\Gamma}$

9.

Δίνεται τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ *με* $\mathrm{AB} < \mathrm{A\Gamma}$ *και η εξωτερική διχοτόμος του* $\mathrm{A}x$. *Απο την κορυφή* B *φέρουμε* $\mathrm{B\Delta}\,//\,\mathrm{A}x$ *που τέμνει την* $\mathrm{A\Gamma}$ *στο* Δ. *Να αποδείξετε ότι* $\Delta\Gamma = \mathrm{A\Gamma} - \mathrm{AB}$.



ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$Ax : \Delta\iota\chi o\tau \acute{o}\mu o\varsigma\ \tau\eta\varsigma\ y\hat{A}B$ $B\Delta // Ax$	$\Delta\Gamma = A\Gamma - AB$

Επειδή Ax διχοτόμος της $y\hat{A}B$ θα έχω:

$y\hat{A}x = x\hat{A}B = \hat{\varphi}(1)$

Οι παράλληλες $B\Delta // Ax$ τέμνουν την AB. Οπότε θα έχω:

$A\hat{B}\Delta = x\hat{A}B = \hat{\varphi}(2)$(Ως εντός εναλλάξ)

Οι παράλληλες $B\Delta // Ax$ τέμνουν την $A\Delta$. Οπότε θα έχω:

$A\hat{\Delta}B = y\hat{A}x = \hat{\varphi}(3)$(Ως εντός εκτός και επι τα αυτά μέρη)

$A\pi o\ \tau\iota\varsigma\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\varepsilon\iota\varsigma\ (2),(3)\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\left.\begin{Bmatrix} \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Delta = \hat{\varphi} \\ \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B} = \hat{\varphi} \end{Bmatrix}\right\} \Rightarrow \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Delta = \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B}$$

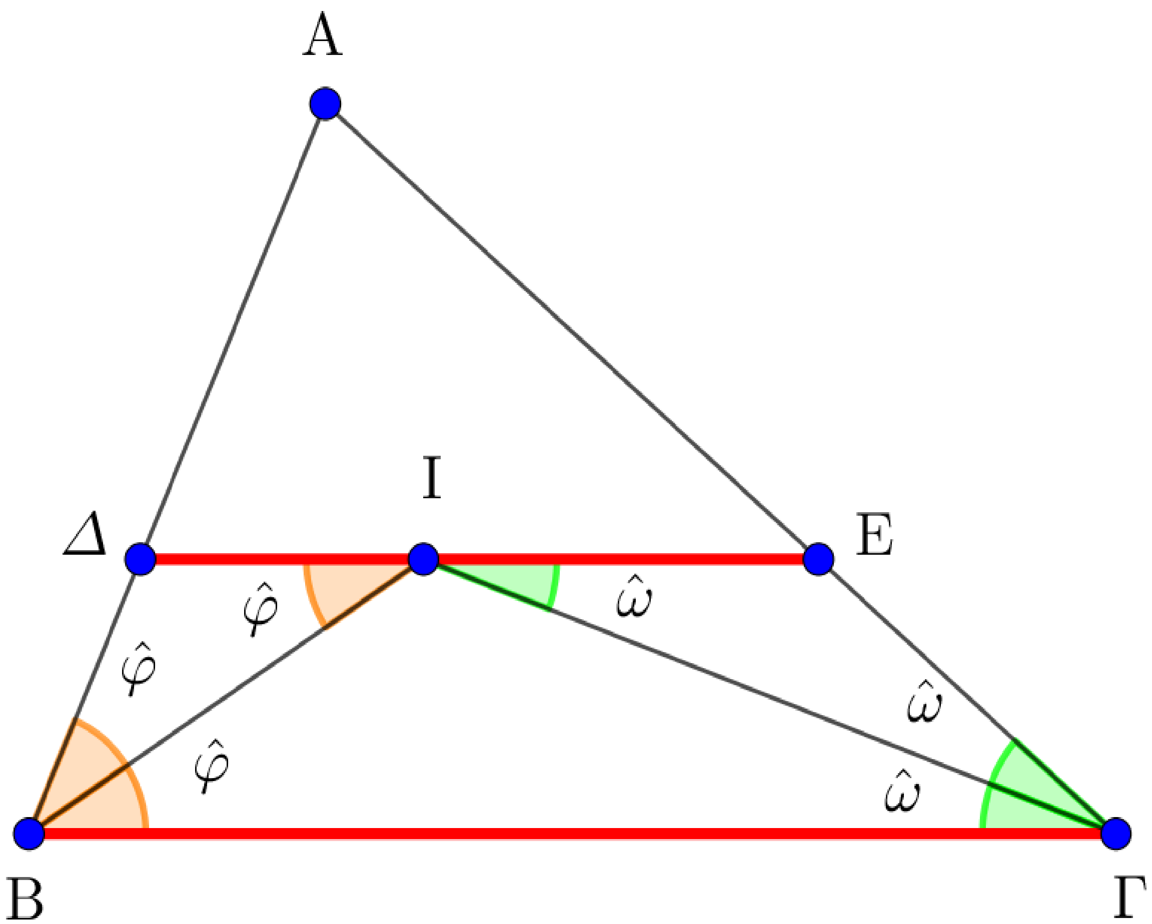
$\Sigma\tau o\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu o\ \mathrm{A\Delta B}\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Delta = \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B}.\ \mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \theta\alpha\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\ \mathrm{AB} = \mathrm{A\Delta}\,(4)$

$\left(\begin{array}{l}\Gamma\iota\alpha\tau\acute{\iota}\ \sigma\tau o\ \acute{\iota}\delta\iota o\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu o\ \alpha\pi\acute{\varepsilon}\nu\alpha\nu\tau\iota\ \alpha\pi o\ \acute{\iota}\sigma\varepsilon\varsigma\ \gamma\omega\nu\acute{\iota}\varepsilon\varsigma\ \beta\rho\acute{\iota}\sigma\kappa o\nu\tau\alpha\iota \\ \acute{\iota}\sigma\varepsilon\varsigma\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\varepsilon}\varsigma\end{array}\right)$

$\acute{E}\chi\omega: \mathrm{\Delta\Gamma} = \mathrm{A\Gamma} - \mathrm{A\Delta} \overset{\mathrm{A\Delta=AB}}{=} \mathrm{A\Gamma} - \mathrm{AB}$

10.

$A\pi o\ \tau o\ \acute{\varepsilon}\gamma\kappa\varepsilon\nu\tau\rho o\ \mathrm{I},\ \tau\rho\iota\gamma\acute{\omega}\nu o\upsilon\ \mathrm{AB\Gamma}\ \varphi\acute{\varepsilon}\rho o\upsilon\mu\varepsilon\ \varepsilon\upsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\alpha\ \pi\alpha\rho\acute{\alpha}\lambda\lambda\eta\lambda\eta$ $\tau\eta\varsigma\ \mathrm{B\Gamma}\ \pi o\upsilon\ \tau\acute{\varepsilon}\mu\nu\varepsilon\iota\ \tau\iota\varsigma\ \mathrm{AB}\ \kappa\alpha\iota\ \mathrm{A\Gamma}\ \alpha\nu\tau\acute{\iota}\sigma\tau o\iota\chi\alpha\ \sigma\tau\alpha\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}\alpha\ \Delta\ \kappa\alpha\iota\ \mathrm{E}$ $\alpha\nu\tau\acute{\iota}\sigma\tau o\iota\chi\alpha.\ \mathrm{N}\alpha\ \alpha\pi o\delta\varepsilon\acute{\iota}\xi\varepsilon\tau\varepsilon\ \acute{o}\tau\iota\ \mathrm{\Delta E} = \mathrm{B\Delta} + \mathrm{\Gamma E}.$



ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
I : Το *έγκεντρο του τριγώνου* ΑΒΓ $\mathrm{\Delta E}//\mathrm{B\Gamma}$	$\mathrm{\Delta E = B\Delta + \Gamma E}$

<u>Το *έγκεντρο* Ι *του τριγώνου* ΑΒΓ *είναι το σημείο τομής των διχοτόμων του.*</u>

Ε*πειδή* ΒΙ *διχοτόμος της* $\mathrm{A\hat{B}\Gamma}$ *θα έχω*:

$$\mathrm{\Delta\hat{B}I = I\hat{B}\Gamma} = \hat{\varphi}\,(1)$$

Ε*πειδή* ΓΙ *διχοτόμος της* $\mathrm{A\hat{\Gamma}B}$ *θα έχω*:

$$\mathrm{E\hat{\Gamma}I = I\hat{\Gamma}B} = \hat{\omega}\,(2)$$

Ο*ι παράλληλες* $\mathrm{\Delta E}//\mathrm{B\Gamma}$ *τέμνουν την* ΒΙ. Ο*πότε θα έχω*:

$$\mathrm{\Delta\hat{I}B = I\hat{B}\Gamma} = \hat{\varphi}\,(3)\,(\text{Ως εντός εναλλάξ})$$

Α*πο τις σχέσεις* (1),(3) *θα έχω*:

$$\left.\begin{cases}\mathrm{\Delta\hat{B}I} = \hat{\varphi}\\ \mathrm{\Delta\hat{I}B} = \hat{\varphi}\end{cases}\right\} \Rightarrow \mathrm{\Delta\hat{B}I = \Delta\hat{I}B}$$

Σ*το τρίγωνο* ΔΒΙ *έχω* $\mathrm{\Delta\hat{B}I = \Delta\hat{I}B}$. Ο*πότε θα ισχύει* $\mathrm{\Delta I = \Delta B}\,(4)$

(Γ*ιατί στο ίδιο τρίγωνο απέναντι απο ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές*)

Ο*ι παράλληλες* $\mathrm{\Delta E}//\mathrm{B\Gamma}$ *τέμνουν την* ΓΙ. Ο*πότε θα έχω*:

$$\mathrm{E\hat{I}\Gamma = I\hat{\Gamma}B} = \hat{\omega}\,(\text{Ως εντός εναλλάξ})\,(5)$$

Α*πο τις σχέσεις* (2),(5) *θα έχω*:

$$\left.\begin{cases}\mathrm{E\hat{\Gamma}I} = \hat{\omega}\\ \mathrm{E\hat{I}\Gamma} = \hat{\omega}\end{cases}\right\} \Rightarrow \mathrm{E\hat{\Gamma}I = E\hat{I}\Gamma}$$

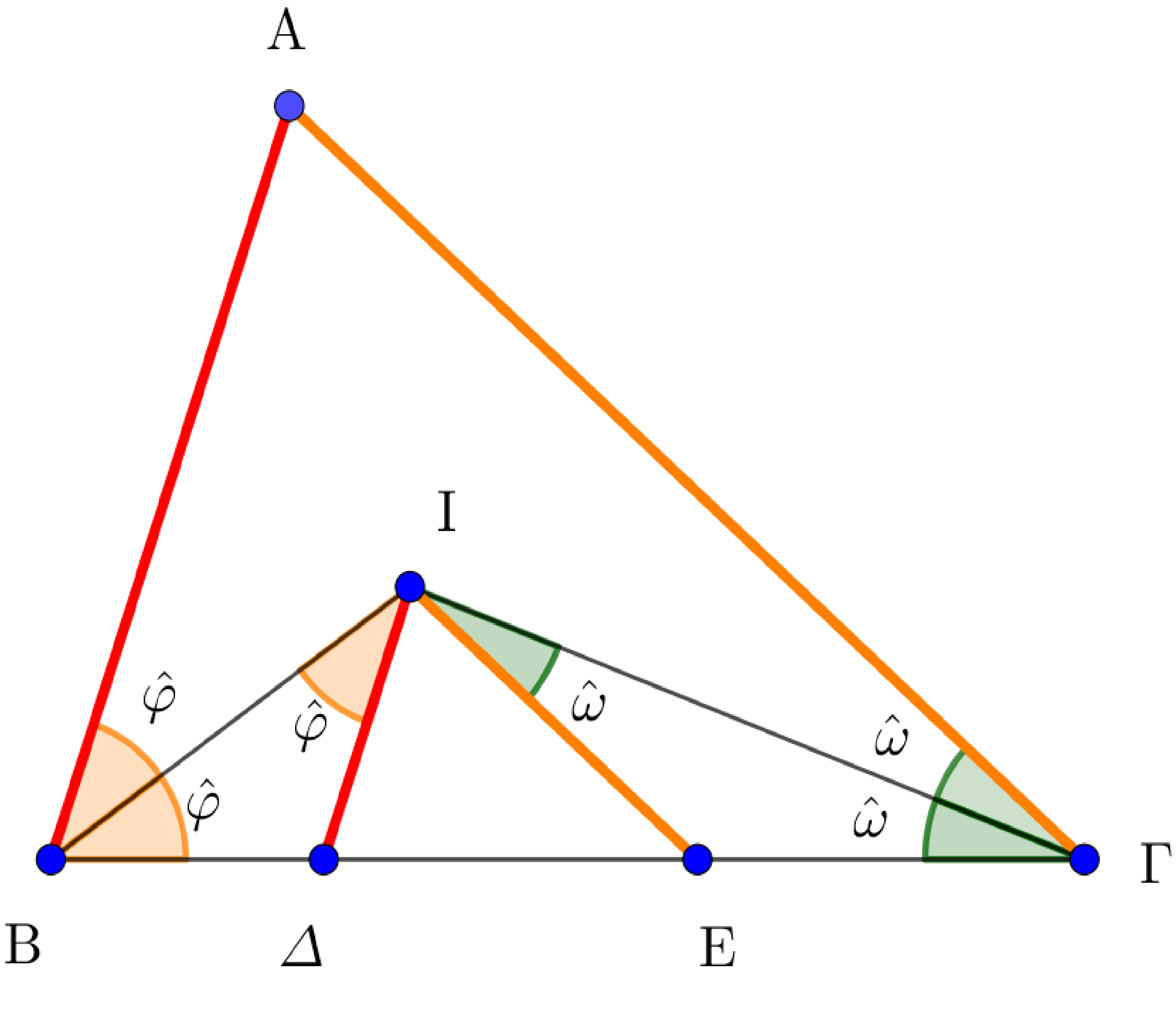
$\Sigma\tau o\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu o\ \mathrm{I E \Gamma}\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ \mathrm{E}\hat{\Gamma}\mathrm{I} = \mathrm{E}\hat{\mathrm{I}}\Gamma$. $O\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \theta\alpha\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\ \mathrm{E\Gamma} = \mathrm{IE}\ (6)$

$\left(\Gamma\iota\alpha\tau\acute{\iota}\ \sigma\tau o\ \acute{\iota}\delta\iota o\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu o\ \alpha\pi\acute{\varepsilon}\nu\alpha\nu\tau\iota\ \alpha\pi o\ \acute{\iota}\sigma\varepsilon\varsigma\ \gamma\omega\nu\acute{\iota}\varepsilon\varsigma\ \beta\rho\acute{\iota}\sigma\kappa o\nu\tau\alpha\iota\ \acute{\iota}\sigma\varepsilon\varsigma\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\varepsilon}\varsigma\right)$

$$\acute{E}\chi\omega : \Delta\mathrm{E} = \Delta\mathrm{I} + \mathrm{IE} \overset{\substack{\Delta\mathrm{I}=\Delta\mathrm{B} \\ \mathrm{IE}=\mathrm{E\Gamma}}}{=} \Delta\mathrm{B} + \mathrm{E\Gamma}$$

11.

$A\pi o\ \tau o\ \acute{\varepsilon}\gamma\kappa\varepsilon\nu\tau\rho o\ \mathrm{I}$, $\tau\rho\iota\gamma\acute{\omega}\nu o\upsilon\ \mathrm{AB\Gamma}\ \varphi\acute{\varepsilon}\rho o\upsilon\mu\varepsilon\ \mathrm{I}\Delta // \mathrm{AB}\ \kappa\alpha\iota\ \mathrm{IE} // \mathrm{A\Gamma}$. $N\alpha\ \alpha\pi o\delta\varepsilon\acute{\iota}\xi\varepsilon\tau\varepsilon\ \acute{o}\tau\iota\ \eta\ \pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\mu\varepsilon\tau\rho o\varsigma\ \tau o\upsilon\ \tau\rho\iota\gamma\acute{\omega}\nu o\upsilon\ \Delta\mathrm{IE}\ \iota\sigma o\acute{\upsilon}\tau\alpha\iota\ \mu\varepsilon\ \mathrm{B\Gamma}$.



ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$\mathrm{I}: T o\ \acute{\varepsilon}\gamma\kappa\varepsilon\nu\tau\rho o\ \tau o\upsilon\ \tau\rho\iota\gamma\acute{\omega}\nu o\upsilon\ \mathrm{AB\Gamma}$ $\mathrm{I}\Delta // \mathrm{AB}, \mathrm{IE} // \mathrm{A\Gamma}$	$\mathrm{I}\Delta + \mathrm{IE} + \Delta\mathrm{E} = \mathrm{B\Gamma}$

Το *έγκεντρο* Ι *του τριγώνου* ΑΒΓ *είναι το σημείο τομής των διχοτόμων του.*

Επειδή ΒΙ διχοτόμος της $\hat{ABΓ}$ θα έχω:

$$A\hat{B}I = I\hat{B}Δ = \hat{φ}(1)$$

Επειδή ΓΙ διχοτόμος της $A\hat{Γ}B$ θα έχω:

$$A\hat{Γ}I = I\hat{Γ}E = \hat{ω}(2)$$

Οι παράλληλες $IΔ//AB$ τέμνουν την ΒΙ. Οπότε θα έχω:

$$B\hat{I}Δ = A\hat{B}I = \hat{φ}(3)\left(Ως\ εντός\ εναλλάξ\right)$$

Απο τις σχέσεις (1),(3) θα έχω:

$$\left.\begin{cases} I\hat{B}Δ = \hat{φ} \\ B\hat{I}Δ = \hat{φ} \end{cases}\right\} \Rightarrow I\hat{B}Δ = B\hat{I}Δ$$

Στο τρίγωνο ΔΒΙ έχω $I\hat{B}Δ = B\hat{I}Δ$. Οπότε θα ισχύει $ΔI = ΔB(4)$

(Γιατί στο ίδιο τρίγωνο απέναντι απο ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές)

Οι παράλληλες $IE//AΓ$ τέμνουν την ΓΙ. Οπότε θα έχω:

$$E\hat{I}Γ = A\hat{Γ}I = \hat{ω}(5)\left(Ως\ εντός\ εναλλάξ\right)$$

Απο τις σχέσεις (2),(5) θα έχω:

$$\left.\begin{cases} I\hat{Γ}E = \hat{ω} \\ E\hat{I}Γ = \hat{ω} \end{cases}\right\} \Rightarrow I\hat{Γ}E = E\hat{I}Γ$$

Στο τρίγωνο ΙΕΓ έχω $I\hat{Γ}E = E\hat{I}Γ$. Οπότε θα ισχύει $IE = EΓ(6)$

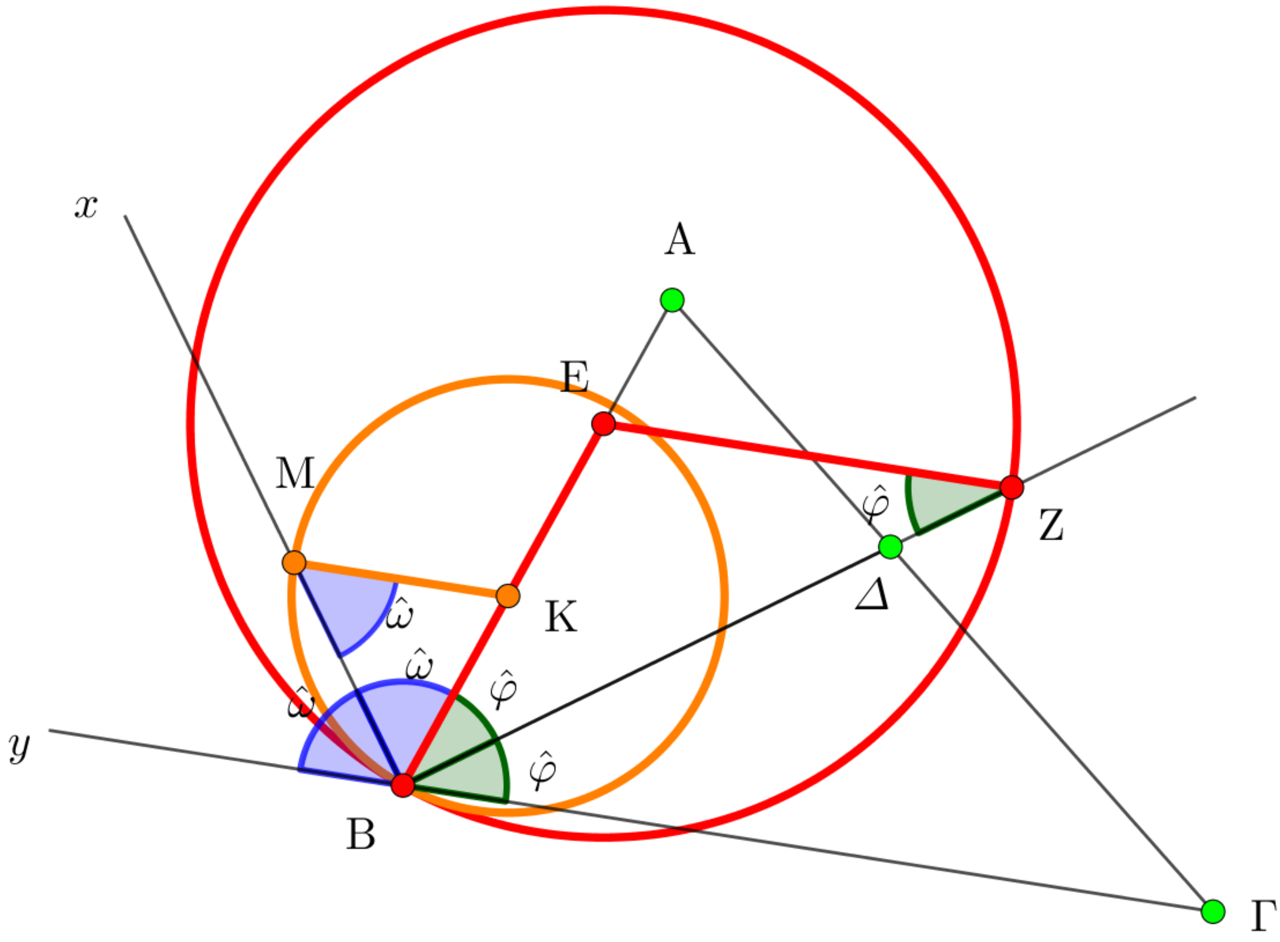
(Γιατί στο ίδιο τρίγωνο απέναντι απο ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές)

Η *περίμετρος του τριγώνου* ΔΙΕ *δένεται απο την σχέση* :

$$\Delta\mathrm{I}+\Delta\mathrm{E}+\mathrm{IE}\overset{\substack{\mathrm{IE}=\mathrm{E}\Gamma\\ \Delta\mathrm{I}=\Delta\mathrm{B}}}{=}\mathrm{B}\Delta+\Delta\mathrm{E}+\mathrm{E}\Gamma=\mathrm{B}\Gamma$$

12.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, *η διχοτόμος* ΒΔ *και η εξωτερική διχοτόμος του* $\mathrm{B}x$. *Θεωρούμε δυο σημεία* Ε *και* Κ *της πλευράς* ΑΒ. *Αν ο κύκλος* (Ε, ΕΒ) *τέμνει τη* ΒΔ *στο* Ζ, *ενώ ο κύκλος* (Κ, ΚΒ) *τέμνει την* $\mathrm{B}x$ *στο* Μ, *να αποδείξετε ότι* ΕΖ / /ΜΚ.



ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$\mathrm{B}x$: *Διχοτόμος της* $\widehat{\mathrm{AB}y}$ ΒΔ : *Διχοτόμος της* $\widehat{\mathrm{AB\Gamma}}$ (Ε, ΕΒ), (Κ, ΚΒ)	ΕΖ / /ΜΚ

Επειδή Bx διχοτόμος της $A\hat{B}y$ θα έχω:

$y\hat{B}M = M\hat{B}K = \hat{\omega}\,(1)$

Έχω $KM = KB$ ως ακτίνες του κύκλου (K, KB). Στο ισοσκελές τρίγωνο $KMB\,(KM = KB)$ θα έχω:

$K\hat{M}B = M\hat{B}K = \hat{\omega}\,(2)$ (Ως γωνίες προσκείμενες στη βάση ισοσκελούς τριγώνου.)

Απο τις σχέσεις $(1),(2)$ θα έχω:

$$\left.\begin{cases} K\hat{M}B = \hat{\omega} \\ y\hat{B}M = \hat{\omega} \end{cases}\right\} \Rightarrow K\hat{M}B = y\hat{B}M$$

Οι ευθείες $MK, B\Gamma$ τέμνουν την BM και έχουν δυο τουλάχιστον <u>εντός εναλλάξ γωνίες ίσες</u> τις $K\hat{M}B$ και $y\hat{B}M$.

Συνεπώς θα έχω $\Delta E // B\Gamma\,(3)$

Επειδή $B\Delta$ διχοτόμος της $A\hat{B}\Gamma$ θα έχω:

$\Delta\hat{B}\Gamma = \Delta\hat{B}E = \hat{\varphi}\,(4)$

Έχω $EZ = EB$ ως ακτίνες του κύκλου (E, EB). Στο ισοσκελές τρίγωνο $EBZ\,(EZ = EB)$ θα έχω:

$E\hat{Z}B = Z\hat{B}E = \hat{\varphi}\,(5)$ (Ως γωνίες προσκείμενες στη βάση ισοσκελούς τριγώνου.)

Απο τις σχέσεις $(4),(5)$ θα έχω:

$$\left.\begin{cases} E\hat{Z}B = \hat{\varphi} \\ Z\hat{B}\Gamma = \hat{\varphi} \end{cases}\right\} \Rightarrow E\hat{Z}B = Z\hat{B}\Gamma$$

$\text{Οι } \textit{ευθείες } \mathrm{EZ},\mathrm{B\Gamma} \textit{ τέμνουν την } \mathrm{BZ} \textit{ και έχουν δυο τουλάχιστον}$

$\underline{\textit{εντός εναλλάξ γωνίες ίσες}} \textit{ τις } \mathrm{E\hat{Z}B} \textit{ και } \mathrm{Z\hat{B}\Gamma}.$

$\Sigma\textit{υνεπώς θα έχω } \mathrm{EZ}//\mathrm{B\Gamma}\,(6)$

$\text{Α}\textit{πο τις σχέσεις } (3),(6) \textit{ θα έχω}:$

$$\left.\begin{cases}\Delta\mathrm{E}//\mathrm{B\Gamma}\\ \mathrm{EZ}//\mathrm{B\Gamma}\end{cases}\right\} \Rightarrow \Delta\mathrm{E}//\mathrm{EZ}$$

13.

$\text{Α}\textit{πο τα άκρα εθυγράμμου τμήματος } \mathrm{AB} \textit{ φέρουμε προς το ίδιο ημιέπιπεδο δυο παράλληλες ευθείες } \mathrm{A}x \textit{ και } \mathrm{B}y.\ \Pi\textit{αίρνουμε } \Gamma \textit{ τυχαίο σημείο του } \mathrm{AB}, \textit{ και στις } \mathrm{A}x,\mathrm{B}y \textit{ τα σημεία } \Delta \textit{ και } \mathrm{E} \textit{ αντίστοιχα ώστε } \mathrm{A}\Delta=\mathrm{A}\Gamma \textit{ και } \mathrm{BE}=\mathrm{B}\Gamma.\ \mathrm{N}\textit{α αποδείξετε ότι η γωνία } \Delta\hat{\Gamma}\mathrm{E} \textit{ είναι ορθή.}$

ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$\mathrm{A}x//\mathrm{B}x//\Gamma z$ $\mathrm{A}\Delta=\mathrm{A}\Gamma,\ \mathrm{BE}=\mathrm{B}\Gamma$	$\Delta\hat{\Gamma}\mathrm{E}=90^0$

$\Phi\textit{έρω } \Gamma z//\mathrm{A}x//\mathrm{B}x.\ \Sigma\textit{το ισοσκελές τρίγωνο } \mathrm{A}\Delta\Gamma\,(\mathrm{A}\Delta=\mathrm{A}\Gamma) \textit{ θα έχω}:$

$$\mathrm{A}\hat{\Gamma}\Delta=\mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma=\hat{\varphi}\,(1)\begin{pmatrix}\Omega\textit{ς γωνίες προσκείμενες στην βάση}\\ \textit{ισοσκελούς τριγώνου}\end{pmatrix}$$

$\text{Οι } \textit{παράλληλες } \mathrm{A}x//\Gamma z \textit{ τέμνουν την } \Gamma\Delta.\ \text{Ο}\textit{πότε θα έχω}:$

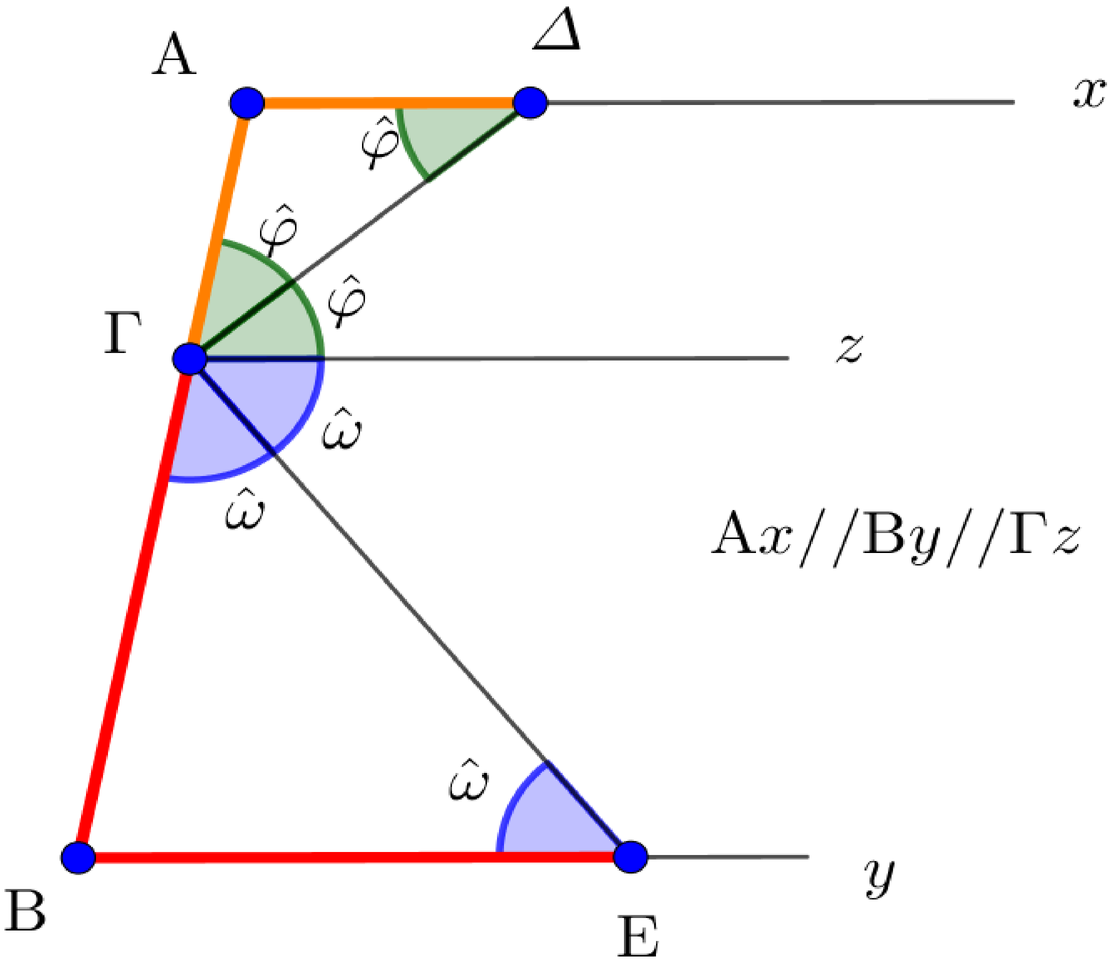
$$\Delta\hat{\Gamma}z=\mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma=\hat{\varphi}\,(2)$$

$\Sigma\textit{το ισοσκελές τρίγωνο } \mathrm{B\Gamma E}\,(\mathrm{BE}=\mathrm{B}\Gamma) \textit{ θα έχω}:$

$$\mathrm{B}\hat{\Gamma}\mathrm{E}=\mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\Gamma=\hat{\omega}\,(3)\begin{pmatrix}\Omega\textit{ς γωνίες προσκείμενες στην βάση}\\ \textit{ισοσκελούς τριγώνου}\end{pmatrix}$$

$\text{Οι } \textit{παράλληλες } \mathrm{B}y//\Gamma z \textit{ τέμνουν την } \Gamma\mathrm{E}.\ \text{Ο}\textit{πότε θα έχω}:$

$$z\hat{\Gamma}\mathrm{E}=\mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\Gamma=\hat{\omega}\,(4)$$



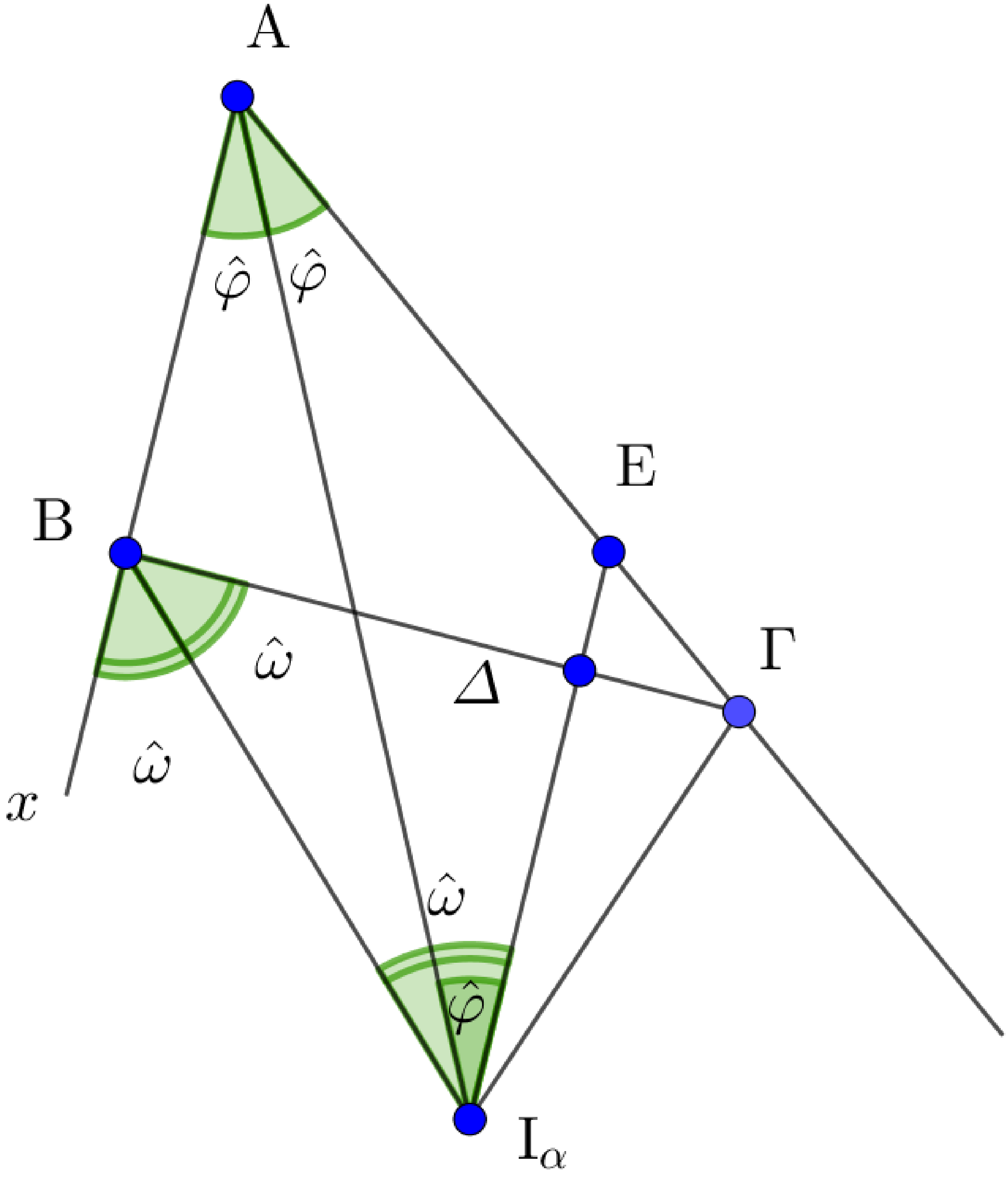
$$Έχω: \mathrm{A}\hat{\Gamma}\Delta + \Delta\hat{\Gamma}z + z\hat{\Gamma}\mathrm{E} + \mathrm{B}\hat{\Gamma}\mathrm{E} = 180^0 \overset{\substack{\mathrm{A}\hat{\Gamma}\Delta=\Delta\hat{\Gamma}z=\hat{\varphi} \\ z\hat{\Gamma}\mathrm{E}=\mathrm{B}\hat{\Gamma}\mathrm{E}=\hat{\omega}}}{\Longleftrightarrow} \hat{\varphi}+\hat{\varphi}+\hat{\omega}+\hat{\omega}=180^0 \Leftrightarrow$$

$$2\left(\hat{\varphi}+\hat{\omega}\right)=180^0 \Leftrightarrow \cancel{2}\left(\hat{\varphi}+\hat{\omega}\right)=\cancel{2}\cdot 90^0 \overset{\substack{\text{Αν } \alpha\neq 0 \text{ τότε ισχύει η} \\ \text{ισοδυναμία:} \\ \alpha x=\alpha y\Leftrightarrow x=y}}{\Longleftrightarrow} \hat{\varphi}+\hat{\omega}=90^0$$

$$Έχω: \Delta\hat{\Gamma}\mathrm{E} = \Delta\hat{\Gamma}z + z\hat{\Gamma}\mathrm{E} \overset{\substack{\Delta\hat{\Gamma}z=\hat{\varphi} \\ z\hat{\Gamma}\mathrm{E}=\hat{\omega}}}{=} \hat{\varphi}+\hat{\omega}=90^0$$

14.

Απο το παράκεντρο I_α *τριγώνου* ΑΒΓ *με* ΑΒ < ΑΓ *φέρουμε παράλληλη στην* ΑΒ, *που τέμνει τις πλευρές* ΒΓ *και* ΑΓ *στα σημεία* Δ *και* Ε *αντίστοιχα.* Ν*α αποδείξετε ότι* ΔΕ = ΑΕ − ΒΔ



ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
I_α : Το *παράκεντρο του τριγώνου* ΑΒΓ $I_\alpha E // AB$	ΔΕ = ΑΕ − ΒΔ

<u>Το *παράκεντρο* I_{α} *του τριγώνου* ΑΒΓ *είναι το σημείο τομής των*</u>

<u>*διχοτόμων των γωνιών* $\hat{\mathrm{B}}_{\varepsilon\xi}, \hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}, \hat{\mathrm{A}}$</u>

Ε*πειδή* AI_{α} *διχοτόμος* $\mathrm{B\hat{A}\Gamma}$ *θα έχω*:

$\mathrm{B\hat{A}I}_{\alpha} = \mathrm{I}_{\alpha}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E} = \hat{\varphi}(1)$

Ο*ι παράλληλες* $\mathrm{I}_{\alpha}\mathrm{E}//\mathrm{AB}$ *τέμνουν την* $\mathrm{I}_{\alpha}\mathrm{A}$. Ο*πότε θα έχω*:

$\mathrm{A}\hat{\mathrm{I}}_{\alpha}\mathrm{E} = \mathrm{B\hat{A}I}_{\alpha} = \hat{\varphi}(2)$(Ω*ς εντός εναλλάξ*)

Α*πο τις σχέσεις* (1),(2) *θα έχω*:

$$\left\{\begin{matrix} \mathrm{I}_{\alpha}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E} = \hat{\varphi} \\ \mathrm{A}\hat{\mathrm{I}}_{\alpha}\mathrm{E} = \hat{\varphi} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \mathrm{I}_{\alpha}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E} = \mathrm{A}\hat{\mathrm{I}}_{\alpha}\mathrm{E}$$

Σ*το τρίγωνο* $\mathrm{I}_{\alpha}\mathrm{AE}$ *έχω* $\mathrm{I}_{\alpha}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E} = \mathrm{A}\hat{\mathrm{I}}_{\alpha}\mathrm{E}$. Ο*πότε θα ισχύει* $\mathrm{I}_{\alpha}\mathrm{E} = \mathrm{AE}(3)$

(Γ*ιατί στο ίδιο τρίγωνο απέναντι απο ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές*)

Ε*πειδή* BI_{α} *διχοτόμος* $x\hat{\mathrm{B}}\Gamma$ *θα έχω*:

$x\hat{\mathrm{B}}\mathrm{I}_{\alpha} = \mathrm{I}_{\alpha}\hat{\mathrm{B}}\Delta = \hat{\omega}(4)$

Ο*ι παράλληλες* $\mathrm{I}_{\alpha}\Delta//\mathrm{A}x$ *τέμνουν την* $\mathrm{I}_{\alpha}\mathrm{B}$. Ο*πότε θα έχω*:

$\mathrm{B}\hat{\mathrm{I}}_{\alpha}\Delta = x\hat{\mathrm{B}}\mathrm{I}_{\alpha} = \hat{\omega}(5)$(Ω*ς εντός εναλλάξ*)

Α*πο τις σχέσεις* (4),(5) *θα έχω*:

$$\left\{\begin{matrix} \mathrm{B}\hat{\mathrm{I}}_{\alpha}\Delta = \hat{\omega} \\ \mathrm{I}_{\alpha}\hat{\mathrm{B}}\Delta = \hat{\omega} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \mathrm{B}\hat{\mathrm{I}}_{\alpha}\Delta = \mathrm{I}_{\alpha}\hat{\mathrm{B}}\Delta$$

$\Sigma\tau o\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu o\ \mathrm{I}_{\alpha}\mathrm{B}\Delta\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ \mathrm{B}\hat{\mathrm{I}}_{\alpha}\Delta = \mathrm{I}_{\alpha}\hat{\mathrm{B}}\Delta.$ $\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \theta\alpha\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\ \mathrm{I}_{\alpha}\Delta = \mathrm{B}\Delta\ (6)$

$\left(\begin{array}{l}\Gamma\iota\alpha\tau\acute{\iota}\ \sigma\tau o\ \acute{\iota}\delta\iota o\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu o\ \alpha\pi\acute{\varepsilon}\nu\alpha\nu\tau\iota\ \alpha\pi o\ \acute{\iota}\sigma\varepsilon\varsigma\ \gamma\omega\nu\acute{\iota}\varepsilon\varsigma\ \beta\rho\acute{\iota}\sigma\kappa o\nu\tau\alpha\iota \\ \acute{\iota}\sigma\varepsilon\varsigma\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\varepsilon}\varsigma\end{array}\right)$

$$\acute{\mathrm{E}}\chi\omega : \Delta\mathrm{E} = \mathrm{I}_{\alpha}\mathrm{E} - \mathrm{I}_{\alpha}\Delta \overset{\substack{\mathrm{I}_{\alpha}\mathrm{E}=\mathrm{AE} \\ \mathrm{I}_{\alpha}\Delta=\mathrm{B}\Delta}}{=} \mathrm{AE} - \mathrm{B}\Delta$$

15.

$\Delta\acute{\iota}\nu\varepsilon\tau\alpha\iota\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu o\ \mathrm{AB\Gamma}\ \mu\varepsilon\ \mathrm{AB} < \mathrm{A\Gamma}\ \kappa\alpha\iota\ \mathrm{M}\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\ \tau\eta\varsigma\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\alpha}\varsigma\ \mathrm{B\Gamma}.$ $\mathrm{A}\pi o\ \tau o\ \mathrm{M}\ \varphi\acute{\varepsilon}\rho o\upsilon\mu\varepsilon\ \pi\alpha\rho\acute{\alpha}\lambda\lambda\eta\lambda\eta\ \pi\rho o\varsigma\ \tau\eta\nu\ \delta\iota\chi o\tau\acute{o}\mu o\ \tau\eta\varsigma\ \gamma\omega\nu\acute{\iota}\alpha\varsigma\ \hat{\mathrm{A}},$ $\pi o\upsilon\ \tau\acute{\varepsilon}\mu\nu\varepsilon\iota\ \tau\iota\varsigma\ \mathrm{AB}\ \kappa\alpha\iota\ \mathrm{A\Gamma}\ \sigma\tau\alpha\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}\alpha\ \mathrm{E}\ \kappa\alpha\iota\ \mathrm{Z}\ \alpha\nu\tau\acute{\iota}\sigma\tau o\iota\chi\alpha.$ $\mathrm{N}\alpha\ \alpha\pi o\delta\varepsilon\acute{\iota}\xi\varepsilon\tau\varepsilon\ \acute{o}\tau\iota:$ $(\mathrm{I})\ \mathrm{T}o\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu o\ \mathrm{EAZ}\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \iota\sigma o\sigma\kappa\varepsilon\lambda\acute{\varepsilon}\varsigma$ $(\mathrm{II})\ \mathrm{BE} + \mathrm{\Gamma Z} = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}$ $(\mathrm{III})\ \mathrm{A}\nu\ \mathrm{M}\ \mu\acute{\varepsilon}\sigma o\ \tau\eta\varsigma\ \mathrm{B\Gamma}\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon:$ $(\alpha)\ \mathrm{BE} = \mathrm{\Gamma Z} = \dfrac{\mathrm{A\Gamma} + \mathrm{AB}}{2}$ $(\beta)\ \mathrm{AE} = \mathrm{AZ} = \dfrac{\mathrm{A\Gamma} - \mathrm{AB}}{2}$

ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$\mathrm{A}\Delta : \Delta\iota\chi o\tau\acute{o}\mu o\varsigma\ \tau\eta\varsigma\ \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$ $\mathrm{ZM} // \mathrm{A}\Delta$	$(\mathrm{I})\ \mathrm{AE} = \mathrm{AZ}$ $(\mathrm{II})\ \mathrm{BE} + \mathrm{\Gamma Z} = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}$

$(\mathrm{I})\ \mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \mathrm{A}\Delta\ \delta\iota\chi o\tau\acute{o}\mu o\varsigma\ \tau\eta\varsigma\ \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

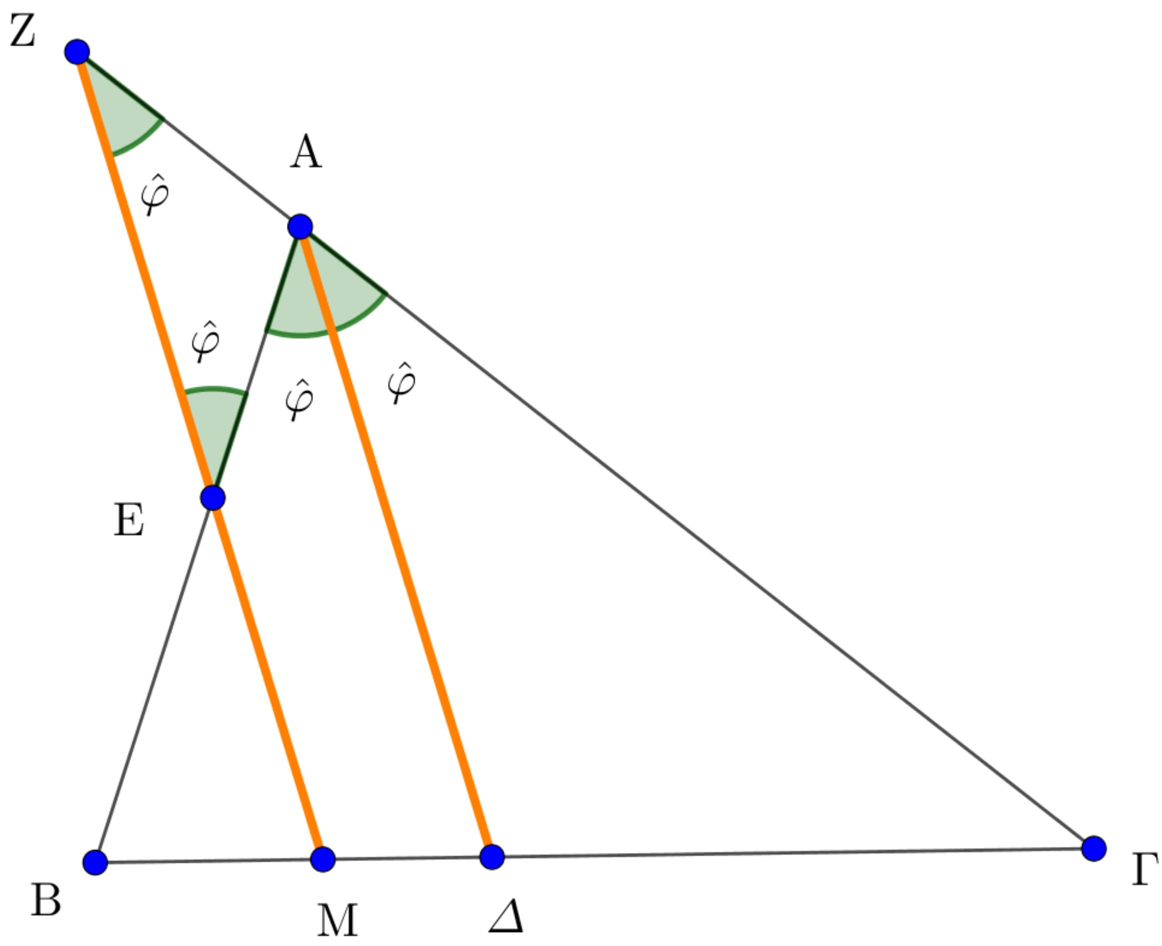
$$\mathrm{E}\hat{\mathrm{A}}\Delta = \Delta\hat{\mathrm{A}}\Gamma = \hat{\varphi}\ (1)$$

$\mathrm{O}\iota\ \pi\alpha\rho\acute{\alpha}\lambda\lambda\eta\lambda\varepsilon\varsigma\ \mathrm{ZE} // \mathrm{A}\Delta\ \tau\acute{\varepsilon}\mu\nu o\upsilon\nu\ \tau\eta\nu\ \mathrm{AE}.$ $\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\mathrm{Z}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{A} = \mathrm{E}\hat{\mathrm{A}}\Delta = \hat{\varphi}\ (2)\ (\Omega\varsigma\ \varepsilon\nu\tau\acute{o}\varsigma\ \varepsilon\nu\alpha\lambda\lambda\acute{\alpha}\xi)$$

$\mathrm{O}\iota\ \pi\alpha\rho\acute{\alpha}\lambda\lambda\eta\lambda\varepsilon\varsigma\ \mathrm{ZE} // \mathrm{A}\Delta\ \tau\acute{\varepsilon}\mu\nu o\upsilon\nu\ \tau\eta\nu\ \mathrm{Z\Gamma}.$ $\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\mathrm{E}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{A} = \Delta\hat{\mathrm{A}}\Gamma = \hat{\varphi}\ (3)\ (\Omega\varsigma\ \varepsilon\nu\tau\acute{o}\varsigma\ \varepsilon\kappa\tau\acute{o}\varsigma\ \kappa\alpha\iota\ \varepsilon\pi\iota\ \tau\alpha\ \alpha\upsilon\tau\acute{\alpha}\ \mu\acute{\varepsilon}\rho\eta)$$



Απο τις σχέσεις $(2),(3)$ *θα έχω*:

$$\left.\begin{cases} Z\hat{E}A = \hat{\varphi} \\ E\hat{Z}A = \hat{\varphi} \end{cases}\right\} \Rightarrow Z\hat{E}A = E\hat{Z}A$$

Στο τρίγωνο ZAE *έχω* $Z\hat{E}A = E\hat{Z}A$. *Οπότε θα ισχύει* $AE = AZ\,(3)$

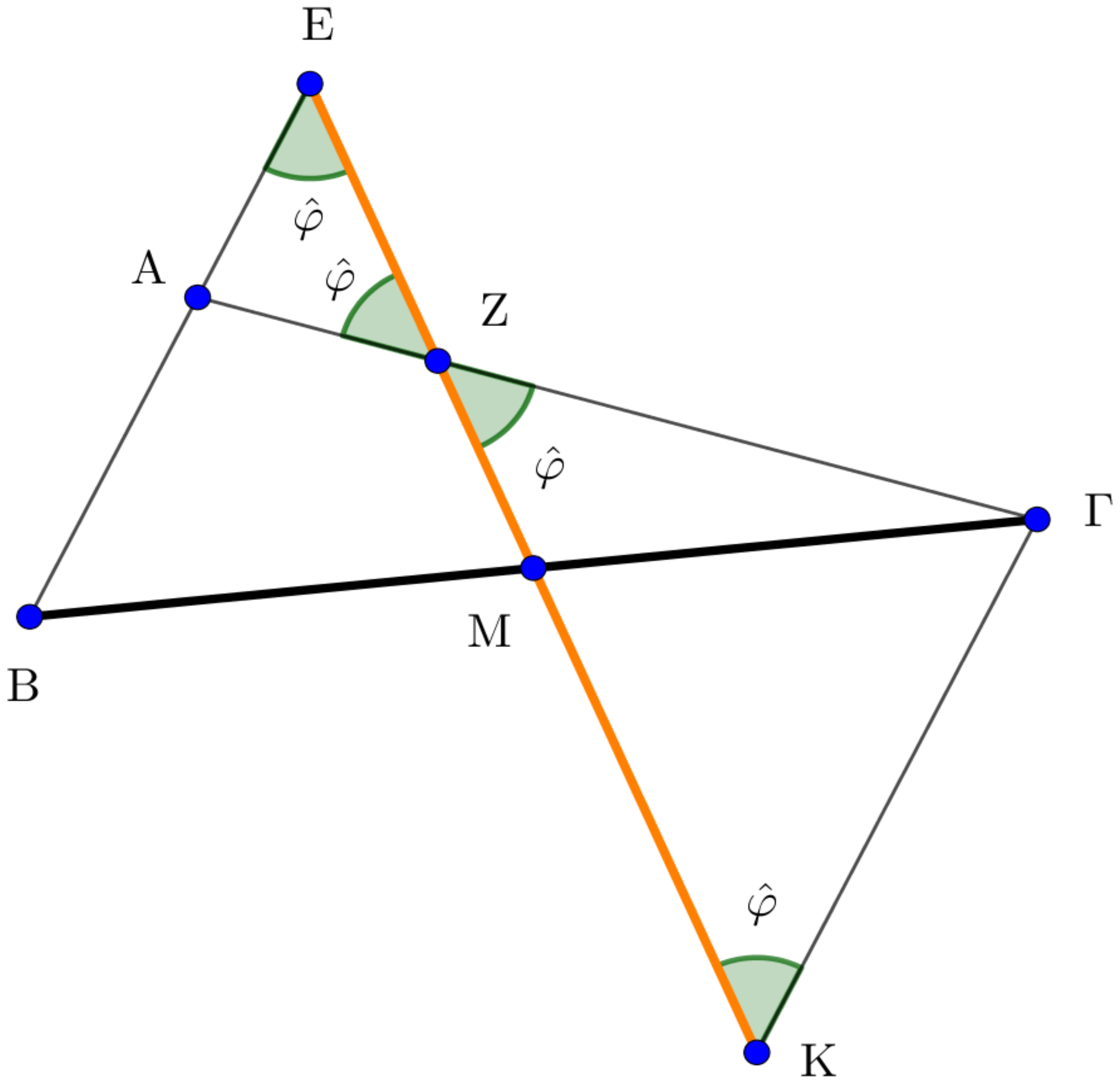
$\left(\text{Γιατί στο ίδιο τρίγωνο απέναντι απο ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές}\right)$

$(\mathrm{II})\,\textit{Έχω}: \boxed{\mathrm{BE}=\mathrm{AB}-\mathrm{AE}\,,\,\Gamma\mathrm{Z}=\mathrm{A}\Gamma+\mathrm{AZ}}$

$$\mathrm{BE}+\Gamma\mathrm{Z} \overset{\substack{\mathrm{BE}=\mathrm{AB}-\mathrm{AE}\\ \Gamma\mathrm{Z}=\mathrm{A}\Gamma+\mathrm{AZ}}}{=} \mathrm{AB}-\mathrm{AE}+\mathrm{A}\Gamma+\mathrm{AZ} \overset{\mathrm{AE}=\mathrm{AZ}}{=} \mathrm{AB}-\cancel{\mathrm{AZ}}+\mathrm{A}\Gamma+\cancel{\mathrm{AZ}}=$$

$$=\mathrm{AB}+\mathrm{A}\Gamma=\Sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}$$

(III)



ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$\mathrm{M}: \mathrm{M}\acute{\varepsilon}\sigma o\ \tau\eta\varsigma\ \mathrm{B}\Gamma$ $\mathrm{ME}=\mathrm{MK}$	$(\alpha)\ \mathrm{BE}=\Gamma\mathrm{Z}=\dfrac{\mathrm{A}\Gamma+\mathrm{AB}}{2}$ $(\beta)\ \mathrm{AE}=\mathrm{AZ}=\dfrac{\mathrm{A}\Gamma-\mathrm{AB}}{2}$

$\Sigma\tau\eta\nu\ \pi\rho o\acute{\epsilon}\kappa\tau\alpha\sigma\eta\ \tau o\upsilon$ AM $\pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu\omega\ \sigma\eta\mu\epsilon\acute{\iota}o\ \tau\acute{\epsilon}\tau o\iota o\ \acute{\omega}\sigma\tau\epsilon$ $\mathrm{EM}=\mathrm{MK}$

$\Sigma\upsilon\gamma\kappa\rho\acute{\iota}\nu\omega\ \tau\alpha\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu\alpha$ $\mathrm{E}\overset{\triangle}{\mathrm{M}}\mathrm{B}$ $\kappa\alpha\iota$ $\mathrm{K}\overset{\triangle}{\mathrm{M}}\Gamma$. $\mathrm{A}\upsilon\tau\acute{\alpha}\ \acute{\epsilon}\chi o\upsilon\nu$:

$$\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\mathrm{E}\hat{\mathrm{M}}\mathrm{B}=\Gamma\hat{\mathrm{M}}\mathrm{K}\left(\Omega\varsigma\ \kappa\alpha\tau\alpha\kappa o\rho\upsilon\varphi\acute{\eta}\nu\right)\\(\mathrm{II})\mathrm{BM}=\mathrm{M}\Gamma\left(\Gamma\iota\alpha\tau\iota\ \mathrm{M}\ \mu\acute{\epsilon}\sigma o\ \tau\eta\varsigma\ \mathrm{B}\Gamma\right)\\(\mathrm{III})\mathrm{EM}=\mathrm{MK}\left(\mathrm{E}\xi\ \kappa\alpha\tau\alpha\sigma\kappa\epsilon\upsilon\acute{\eta}\varsigma\right)\end{array}\right\}$$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\epsilon$ $\mathrm{E}\overset{\triangle}{\mathrm{M}}\mathrm{B}=\mathrm{K}\overset{\triangle}{\mathrm{M}}\Gamma\left(\Pi\Gamma\Pi\right)$.$\Sigma\upsilon\nu\epsilon\pi\acute{\omega}\varsigma\ \theta\alpha\ \acute{\epsilon}\chi\omega$:

$\mathrm{BE}=\Gamma\mathrm{K}\left(4\right)\ \kappa\alpha\iota\ \mathrm{M}\hat{\mathrm{K}}\Gamma=\mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{M}=\hat{\varphi}\left(5\right)$

$\acute{E}\chi\omega:\mathrm{K}\hat{\mathrm{Z}}\Gamma=\mathrm{E}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{A}=\hat{\varphi}\left(6\right)\left(\Omega\varsigma\ \kappa\alpha\tau\alpha\kappa o\rho\upsilon\varphi\acute{\eta}\nu\right)$

$\mathrm{A}\pi o\ \tau\iota\varsigma\ \sigma\chi\acute{\epsilon}\sigma\epsilon\iota\varsigma\ \left(5\right),\left(6\right)\ \theta\alpha\ \acute{\epsilon}\chi\omega$:

$$\left\{\begin{array}{l}\mathrm{Z}\hat{\mathrm{K}}\Gamma=\hat{\varphi}\\\mathrm{K}\hat{\mathrm{Z}}\Gamma=\hat{\varphi}\end{array}\right\}\Rightarrow\mathrm{Z}\hat{\mathrm{K}}\Gamma=\mathrm{K}\hat{\mathrm{Z}}\Gamma$$

$\Sigma\tau o\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu o$ $\mathrm{ZK}\Gamma$ $\acute{\epsilon}\chi\omega$ $\mathrm{Z}\hat{\mathrm{K}}\Gamma=\mathrm{K}\hat{\mathrm{Z}}\Gamma$. $\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\epsilon\ \theta\alpha\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\epsilon\iota$ $\mathrm{Z}\Gamma=\mathrm{K}\Gamma\left(7\right)$

$$\left(\begin{array}{l}\Gamma\iota\alpha\tau\acute{\iota}\ \sigma\tau o\ \acute{\iota}\delta\iota o\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu o\ \alpha\pi\acute{\epsilon}\nu\alpha\nu\tau\iota\ \alpha\pi o\ \acute{\iota}\sigma\epsilon\varsigma\ \gamma\omega\nu\acute{\iota}\epsilon\varsigma\ \beta\rho\acute{\iota}\sigma\kappa o\nu\tau\alpha\iota\\\acute{\iota}\sigma\epsilon\varsigma\ \pi\lambda\epsilon\upsilon\rho\acute{\epsilon}\varsigma\end{array}\right)$$

$\mathrm{A}\pi o\ \tau\iota\varsigma\ \sigma\chi\acute{\epsilon}\sigma\epsilon\iota\varsigma\ \left(4\right),\left(7\right)\ \theta\alpha\ \acute{\epsilon}\chi\omega$:

$$\left\{\begin{array}{l}\mathrm{BE}=\Gamma\mathrm{K}\\\mathrm{Z}\Gamma=\Gamma\mathrm{K}\end{array}\right\}\Rightarrow\mathrm{Z}\Gamma=\mathrm{BE}$$

$\acute{E}\chi\omega:\mathrm{BE}+\Gamma\mathrm{Z}=\mathrm{A}\Gamma+\mathrm{AB}\overset{\mathrm{BE}=\Gamma\mathrm{Z}}{\Longleftrightarrow}\mathrm{BE}+\mathrm{BE}=\mathrm{A}\Gamma+\mathrm{AB}\Leftrightarrow$

$2\mathrm{BE}=\mathrm{A}\Gamma+\mathrm{AB}\Leftrightarrow\mathrm{BE}=\dfrac{\mathrm{A}\Gamma+\mathrm{AB}}{2}$

$\acute{E}\chi\omega:\Gamma\mathrm{Z}=\mathrm{BE}=\dfrac{\mathrm{A}\Gamma+\mathrm{AB}}{2}$

$\acute{E}\chi\omega:\mathrm{AE}=\mathrm{BE}-\mathrm{AB}\overset{\mathrm{BE}=\frac{\mathrm{A}\Gamma+\mathrm{AB}}{2}}{=}\dfrac{\mathrm{A}\Gamma+\mathrm{AB}}{2}-\dfrac{2\mathrm{AB}}{2}=\dfrac{\mathrm{A}\Gamma-\mathrm{AB}}{2}$

$\acute{E}\chi\omega:\mathrm{AZ}=\mathrm{A}\Gamma-\Gamma\mathrm{Z}\overset{\Gamma\mathrm{Z}=\frac{\mathrm{A}\Gamma+\mathrm{AB}}{2}}{=}\dfrac{2\mathrm{A}\Gamma}{2}-\dfrac{\mathrm{A}\Gamma+\mathrm{AB}}{2}=\dfrac{2\mathrm{A}\Gamma-\mathrm{A}\Gamma-\mathrm{AB}}{2}=\dfrac{\mathrm{A}\Gamma-\mathrm{AB}}{2}$