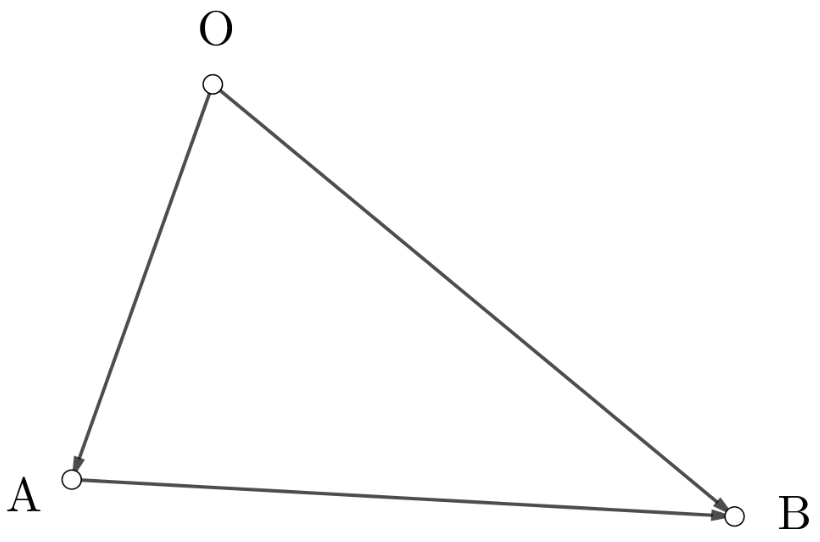
ΠΩΣ ΑΠΟΔΕΙΚΝΥΩ ΜΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ

Επιλέγω ένα σημείο Ο. Θα εκφράσω όλα τα διανύσματα συναρτήσει διανυσμάτων θέσης με αρχή το Ο.

↓

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \left(\textit{Διάνυσμα θέσης πέρατος}\right) - \left(\textit{Διάνυσμα θέσης αρχής}\right)$

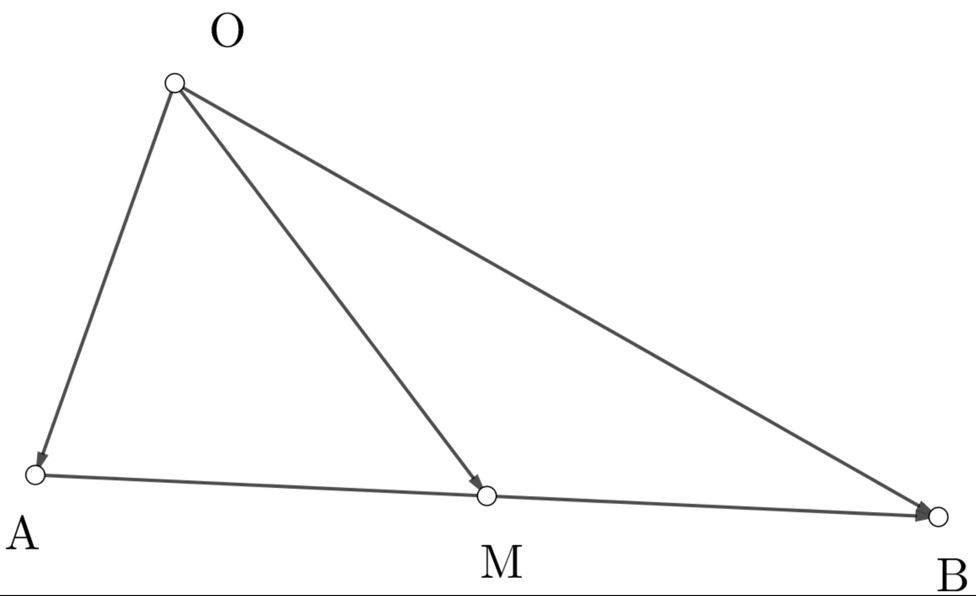


↓

Αν Μ το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ θα έχω:

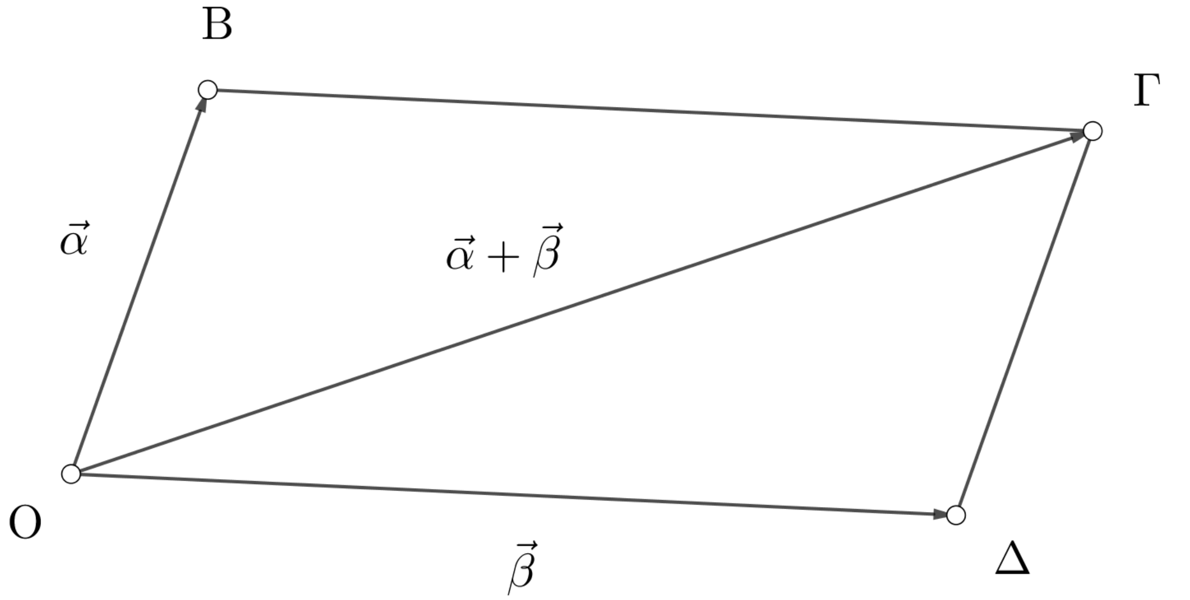
$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$$

Μ : Το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ



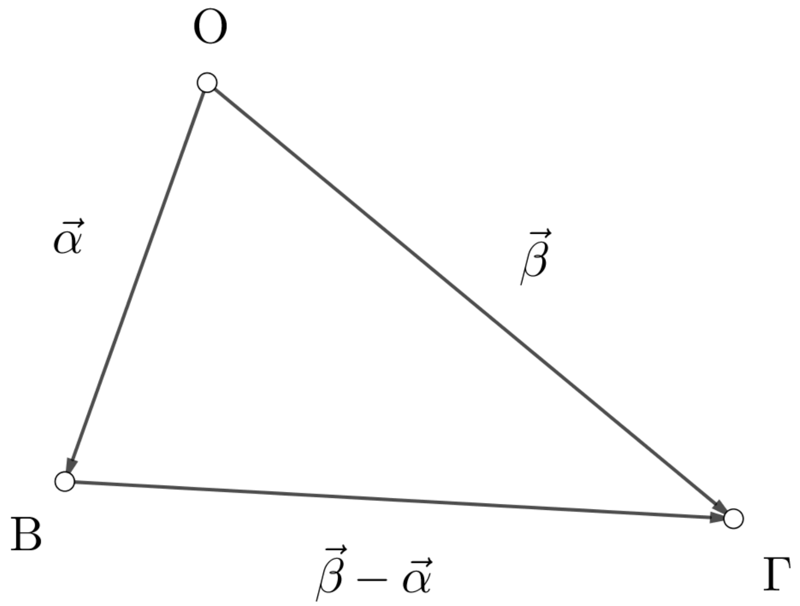
↓

Αν *υπάρχει παραλληλόγραμμο* ΑΒΓΔ *τότε μπορώ να πάρω σαν* Ο *το* Α *και θέτω* $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{\alpha}, \overrightarrow{\mathrm{O\Delta}}=\vec{\beta}$ *και* $\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$. *Στην συνέχεια εκφράζω όλα τα διανύσματα συναρτήσει των* $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$



↓

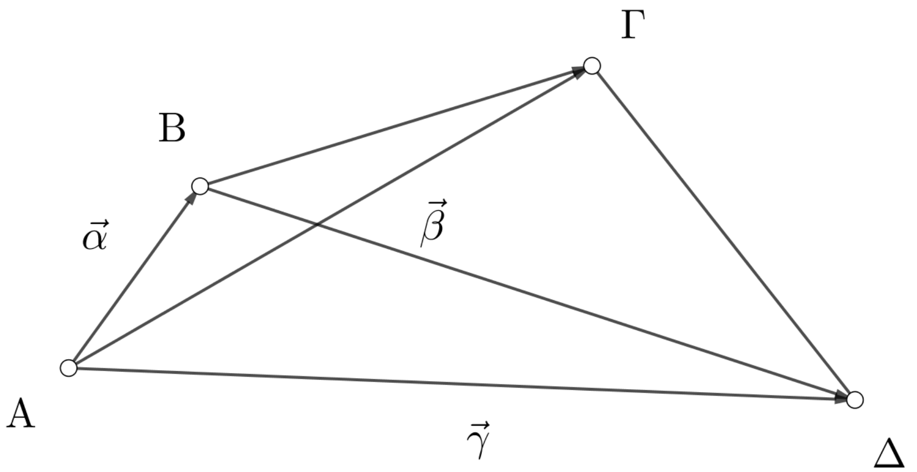
Αν *υπάρχει τρίγωνο* ΑΒΓ *τότε μπορώ να πάρω σαν* Ο *το* Α *και θέτω* $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{\alpha}, \overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}=\vec{\beta}$ *και* $\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}=\vec{\beta}-\vec{\alpha}$. *Στην συνέχεια εκφράζω όλα τα διανύσματα συναρτήσει των* $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1.

$\text{Για τυχαία σημεία } \mathrm{A},\mathrm{B},\Gamma,\Delta \text{ να αποδείξετε ότι}:$ $\overrightarrow{\mathrm{A}\Delta}+\overrightarrow{\mathrm{B}\Gamma}=\overrightarrow{\mathrm{A}\Gamma}+\overrightarrow{\mathrm{B}\Delta}$



$\text{Θα εκφράσω όλα τα διανύσματα συναρτήσει διανυσμάτων θέσης με}$

$\text{αρχή } \mathrm{A}. \text{ Θέτω}: \overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{\alpha}, \overrightarrow{\mathrm{A}\Gamma}=\vec{\beta}, \overrightarrow{\mathrm{A}\Delta}=\vec{\gamma}$

$\overrightarrow{\mathrm{B}\Gamma}=\overrightarrow{\mathrm{A}\Gamma}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{\beta}-\vec{\alpha}$

$\overrightarrow{\mathrm{B}\Delta}=\overrightarrow{\mathrm{A}\Delta}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{\gamma}-\vec{\alpha}$

$\overrightarrow{\mathrm{A}\Delta}+\overrightarrow{\mathrm{B}\Gamma}=\vec{\gamma}+\vec{\beta}-\vec{\alpha}$

$\text{Οπότε}: \boxed{\overrightarrow{\mathrm{A}\Delta}+\overrightarrow{\mathrm{B}\Gamma}=\vec{\gamma}+\vec{\beta}-\vec{\alpha}}\,(1)$

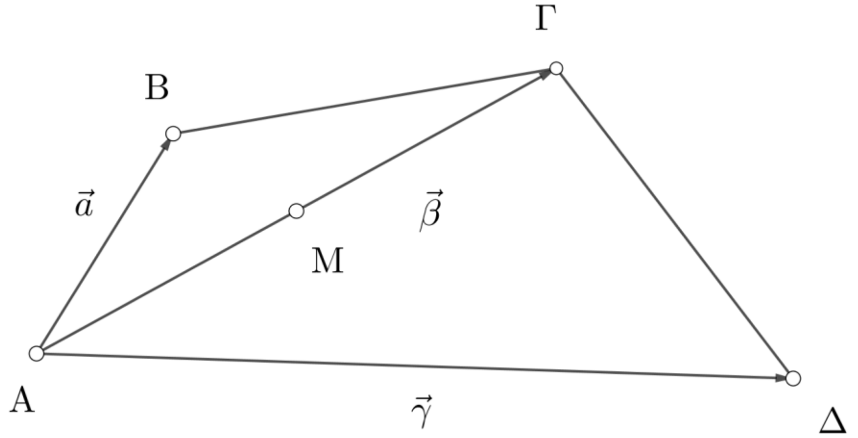
$\overrightarrow{\mathrm{A}\Gamma}+\overrightarrow{\mathrm{B}\Delta}=\vec{\beta}+\vec{\gamma}-\vec{\alpha}$

$\text{Οπότε}: \boxed{\overrightarrow{\mathrm{A}\Gamma}+\overrightarrow{\mathrm{B}\Delta}=\vec{\beta}+\vec{\gamma}-\vec{\alpha}}\,(2)$

$\text{Απο τις σχέσεις } (1),(2) \text{ θα έχω}: \overrightarrow{\mathrm{A}\Delta}+\overrightarrow{\mathrm{B}\Gamma}=\overrightarrow{\mathrm{A}\Gamma}+\overrightarrow{\mathrm{B}\Delta}$

2.

$\text{Αν } \mathrm{M} \text{ το μέσο της διαγωνίου } \mathrm{A}\Gamma \text{ τετραπλεύρου } \mathrm{AB}\Gamma\Delta \text{ να αποδείξετε ότι}:$ $\overrightarrow{\mathrm{MB}}+\overrightarrow{\mathrm{M}\Delta}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\Delta\Gamma}$



Θα εκφράσω όλα τα διανύσματα συναρτήσει διανυσμάτων θέσης με αρχή Α. *Θέτω* : $\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}, \overrightarrow{A\Gamma}=\vec{\beta}, \overrightarrow{A\Delta}=\vec{\gamma}$

Ε*πειδή* Μ *μέσο της διαγωνίου* ΑΓ *θα έχω* :

$$\overrightarrow{AM}=\frac{\overrightarrow{A\Gamma}}{2}=\frac{\vec{\beta}}{2}$$

$$\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AM}=\vec{\alpha}-\frac{\vec{\beta}}{2}$$

$$\overrightarrow{M\Delta}=\overrightarrow{A\Delta}-\overrightarrow{AM}=\vec{\gamma}-\frac{\vec{\beta}}{2}$$

$$\overrightarrow{\Delta\Gamma}=\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{A\Delta}=\vec{\beta}-\vec{\gamma}$$

$$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{M\Delta}=\vec{\alpha}-\frac{\vec{\beta}}{2}+\vec{\gamma}-\frac{\vec{\beta}}{2}=\vec{\alpha}+\vec{\gamma}-\vec{\beta}$$

Ο*πότε* : $\boxed{\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{M\Delta}=\vec{\alpha}+\vec{\gamma}-\vec{\beta}}\ (1)$

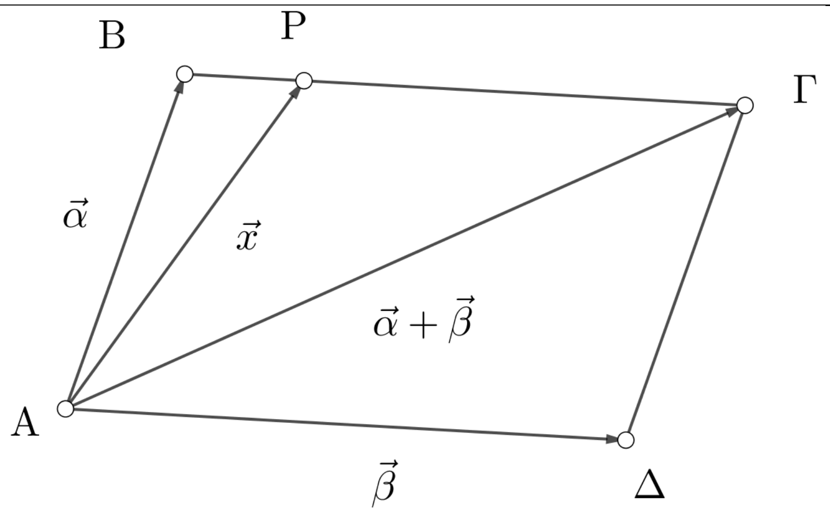
$$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{\Delta\Gamma}=\vec{\alpha}-\left(\vec{\beta}-\vec{\gamma}\right)=\vec{\alpha}-\vec{\beta}+\vec{\gamma}$$

Ο*πότε* : $\boxed{\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{\Delta\Gamma}=\vec{\alpha}+\vec{\gamma}-\vec{\beta}}\ (2)$

Α*πο τις σχέσεις* $(1),(2)$ *θα έχω* : $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{M\Delta}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{\Delta\Gamma}$

3.

Θεωρούμε παραλληλόραμμο ΑΒΓΔ *και το σημείο* Ρ *τέτοιο ώστε* $\overrightarrow{P\Gamma}+2\overrightarrow{PB}=\vec{0}$. Ν*α αποδείξετε οτι* $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{P\Delta}=\overrightarrow{BA}$



Θα εκφράσω όλα τα διανύσματα συναρτήσει διανυσμάτων θέσης με αρχή Α. *Θέτω* : $\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}, \overrightarrow{A\Delta}=\vec{\beta}, \overrightarrow{AP}=\vec{x}$

Ε*πειδή* ΑΒΓΔ *παραλληλόγραμμο θα έχω* :

$$\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Delta}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$$

$\overrightarrow{\mathrm{P\Gamma}} = \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} - \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} - \vec{x}$

$\overrightarrow{\mathrm{PB}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \vec{\alpha} - \vec{x}$

$\overrightarrow{\mathrm{P\Gamma}} + 2\overrightarrow{\mathrm{PB}} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\alpha} + \vec{\beta} - \vec{x} + 2\left(\vec{\alpha} - \vec{x}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\alpha} + \vec{\beta} - \vec{x} + 2\vec{\alpha} - 2\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow$

$3\vec{x} = 3\vec{\alpha} + \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{x} = \dfrac{3\vec{\alpha} + \vec{\beta}}{3}$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon : \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \dfrac{3\vec{\alpha} + \vec{\beta}}{3}$

$\overrightarrow{\mathrm{PA}} = -\overrightarrow{\mathrm{AP}} = -\dfrac{3\vec{\alpha} + \vec{\beta}}{3}$

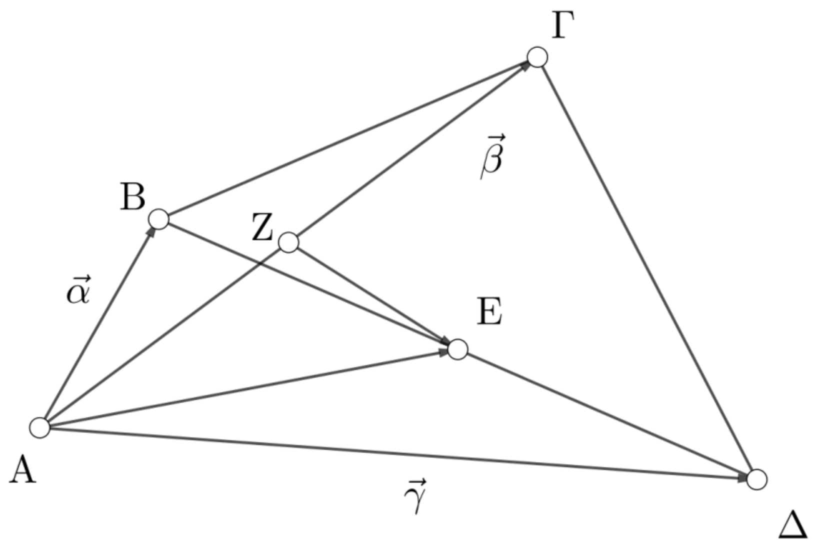
$\overrightarrow{\mathrm{PB}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \vec{\alpha} - \dfrac{3\vec{\alpha} + \vec{\beta}}{3} = \dfrac{3\vec{\alpha}}{3} - \dfrac{3\vec{\alpha} + \vec{\beta}}{3} = \dfrac{3\vec{\alpha} - 3\vec{\alpha} - \vec{\beta}}{3} = -\dfrac{\vec{\beta}}{3}$

$\overrightarrow{\mathrm{P\Gamma}} = \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} - \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} - \dfrac{3\vec{\alpha} + \vec{\beta}}{3} = \dfrac{3\vec{\alpha}}{3} + \dfrac{3\vec{\beta}}{3} - \dfrac{3\vec{\alpha} + \vec{\beta}}{3} = \dfrac{3\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} - 3\vec{\alpha} - \vec{\beta}}{3} = \dfrac{2\vec{\beta}}{3}$

$\overrightarrow{\mathrm{PA}} + \overrightarrow{\mathrm{PB}} + \overrightarrow{\mathrm{P\Gamma}} = -\dfrac{3\vec{\alpha} + \vec{\beta}}{3} - \dfrac{\vec{\beta}}{3} + \dfrac{2\vec{\beta}}{3} = \dfrac{-3\vec{\alpha} - \vec{\beta} - \vec{\beta} + 2\vec{\beta}}{3} = -\vec{\alpha} = -\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{BA}}$

4.

Έστω τετράπλευρο $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ *και τα* E, Z *μέσα των διαγωνιών* $\mathrm{A\Gamma}, \mathrm{B\Delta}$.
N*α αποδείξετε ότι*: $\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}} + \overrightarrow{\mathrm{\Gamma\Delta}} - \overrightarrow{\mathrm{\Delta A}} = 4\overrightarrow{\mathrm{ZE}}$



Θα εκφράσω όλα τα διανύσματα συναρτήσει διανυσμάτων θέσης με αρχή A. *Θέτω*: $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{\alpha}, \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} = \vec{\beta}, \overrightarrow{\mathrm{A\Delta}} = \vec{\gamma}$

$\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}} = \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{\beta} - \vec{\alpha}$

$\overrightarrow{\mathrm{\Gamma\Delta}} = \overrightarrow{\mathrm{A\Delta}} - \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} = \vec{\gamma} - \vec{\beta}$

$\overrightarrow{\mathrm{\Delta A}} = -\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}} = -\vec{\gamma}$

$\text{Επειδή Ζ μέσο του ΑΓ θα έχω}:$

$\overrightarrow{\mathrm{AZ}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}}{2} = \dfrac{\vec{\beta}}{2}$

$\text{Στο τρίγωνο ΑΒΔ η ΑΕ είναι διάμεσος. Οπότε θα ισχύει}:$

$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}}{2} = \dfrac{\vec{\alpha} + \vec{\gamma}}{2}$

$\overrightarrow{\mathrm{ZE}} = \overrightarrow{\mathrm{AE}} - \overrightarrow{\mathrm{AZ}} = \dfrac{\vec{\alpha} + \vec{\gamma}}{2} - \dfrac{\vec{\beta}}{2} = \dfrac{\vec{\alpha} + \vec{\gamma} - \vec{\beta}}{2}$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}} + \overrightarrow{\mathrm{\Gamma\Delta}} - \overrightarrow{\mathrm{\Delta A}} = \vec{\alpha} - \left(\vec{\beta} - \vec{\alpha}\right) + \vec{\gamma} - \vec{\beta} - \left(-\vec{\gamma}\right) = \vec{\alpha} - \vec{\beta} + \vec{\alpha} + \vec{\gamma} - \vec{\beta} + \vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} - 2\vec{\beta} + 2\vec{\gamma}$

$\text{Οπότε}: \boxed{\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}} + \overrightarrow{\mathrm{\Gamma\Delta}} - \overrightarrow{\mathrm{\Delta A}} = 2\vec{\alpha} - 2\vec{\beta} + 2\vec{\gamma}}\,(1)$

$4\overrightarrow{\mathrm{ZE}} = 4\dfrac{\vec{\alpha} + \vec{\gamma} - \vec{\beta}}{2} = 2\left(\vec{\alpha} + \vec{\gamma} - \vec{\beta}\right) = 2\vec{\alpha} + 2\vec{\gamma} - 2\vec{\beta}$

$\text{Οπότε}: \boxed{4\overrightarrow{\mathrm{ZE}} = 2\vec{\alpha} + 2\vec{\gamma} - 2\vec{\beta}}\,(2)$

$\text{Απο τις σχέσεις } (1),(2) \text{ θα έχω}: \overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}} + \overrightarrow{\mathrm{\Gamma\Delta}} - \overrightarrow{\mathrm{\Delta A}} = 4\overrightarrow{\mathrm{ZE}}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Θεωρούμε τα τυχαία σημεία $\mathrm{A,B,\Gamma,\Delta}$ και τα μέσα $\mathrm{M,N}$ των $\mathrm{A\Delta, B\Gamma}$.
Να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{\Delta\Gamma}} = 2\overrightarrow{\mathrm{MN}}$

2.

Δίνεται παραλληλόγραμμο $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ και $\mathrm{E,Z}$ τα μέσα των πλευρών $\mathrm{B\Gamma}$ και $\mathrm{\Gamma\Delta}$ αντιστοίχως. Να αποδείξετε ότι:

$\overrightarrow{\mathrm{AE}} + \overrightarrow{\mathrm{AZ}} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$

Υπόδειξη: $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{\alpha}, \overrightarrow{\mathrm{A\Delta}} = \vec{\beta}, \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}, \overrightarrow{\mathrm{AE}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}}{2}, \overrightarrow{\mathrm{AZ}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} + \overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}}{2}$

3.

Αν M το μέσο της πλευράς $\mathrm{B\Gamma}$ τριγώνμου $\mathrm{AB\Gamma}$ να δειχτεί ότι:

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} = 2\overrightarrow{\mathrm{MB}}$

Υπόδειξη: $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{\alpha}, \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} = \vec{\beta}, \overrightarrow{\mathrm{AM}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}}{2}, \overrightarrow{\mathrm{MB}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{AM}}$

4.

Θεωρούμε τα τμήματα $\mathrm{A\Delta, BE, \Gamma Z}$ που έχουν κοινό μέσο O. Δείξτε ότι:

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} + \overrightarrow{\mathrm{AE}} + \overrightarrow{\mathrm{AZ}} = 2\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}$

Υπόδειξη: $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{\alpha}, \overrightarrow{\mathrm{O\Delta}} = -\vec{\alpha}, \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{\beta}, \overrightarrow{\mathrm{OE}} = -\vec{\beta}, \overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}} = \vec{\gamma}, \overrightarrow{\mathrm{OZ}} = -\vec{\gamma}$