$\Pi\omega\varsigma$ *αποδεικνύω οτι τα σημεία* $\mathrm{A,B,\Gamma}$ *είναι συνευθειακά*

Κ*ατασκευάζω τα διανύσματα* $\vec{\alpha}$ *και* $\vec{\beta}$ *τέτοια ώστε :*

$\boxed{\text{Να έχουν άκρα μόνο τα σημεία } \mathrm{A,B,\Gamma}}$

$\downarrow$

Α*ποδεικνύω οτι* $\vec{\alpha}\,//\,\vec{\beta}$

$\downarrow$

Ε*πειδή τα διανύσματα* $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ *έχουν κοινό άκρο και είναι παράλληλα ή συγραμμικά προκύπτει οτι τα σημεία* $\mathrm{A,B,\Gamma}$ *είναι συνευθειακά*

Π*ως αποδεικνύω οτι τα σημεία* $\mathrm{A,B,\Gamma}$ *είναι συνευθειακά όταν* $\kappa_1\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\kappa_2\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\kappa_3\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}=\vec{0}$, $\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3=0$ *όπου* $\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3$ *όχι όλα μηδέν*

$\downarrow$

Έστω $\kappa_1\neq 0$ *λύνω την σχέση* $\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3=0$ *ή ως προς* κ_2 *ή ως προς* κ_3
Έστω έχω λύσει την σχέση $\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3=0$ *ως προς* κ_3.Τ*ότε θα έχω :*
$\kappa_3=-\kappa_1-\kappa_2\,(2)$

$\downarrow$

$$\text{Έχω} : \kappa_3\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}\overset{\kappa_3=-\kappa_1-\kappa_2}{=}(-\kappa_1-\kappa_2)\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}=-\kappa_1\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}-\kappa_2\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}$$

$$\kappa_1\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\kappa_2\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\kappa_3\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}=\vec{0}\overset{\kappa_3\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}=-\kappa_1\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}-\kappa_2\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}}{\Leftrightarrow}\kappa_1\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\kappa_2\overrightarrow{\mathrm{OB}}+-\kappa_1\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}-\kappa_2\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}=\vec{0}$$

Κ*ρατάω όλα τα* κ_1 *στο πρώτο μέλος και μεταφέρω όλα τα* κ_2 *στο δεύτερο μέλος*

$$\Leftrightarrow\quad \kappa_1\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\kappa_1\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}=\kappa_2\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}-\kappa_2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\Leftrightarrow$$

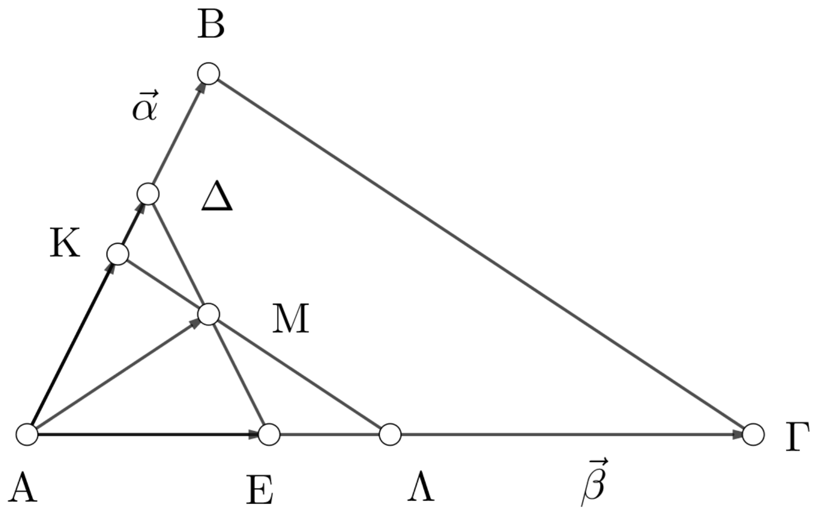
$$\kappa_1\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}\right)=\kappa_2\left(\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\overset{\substack{\overrightarrow{\mathrm{\Gamma A}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}\\ \overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}=\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}}}{\Leftrightarrow}\kappa_1\overrightarrow{\mathrm{\Gamma A}}=\kappa_2\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}\Leftrightarrow\overrightarrow{\mathrm{\Gamma A}}=\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}\,(\kappa_1\neq 0)$$

$\Rightarrow\overrightarrow{\mathrm{\Gamma A}}\,//\,\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}\Leftrightarrow$ Τ*α σημεία* $\mathrm{A,B,\Gamma}$ *είναι συνευθειακά*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1.

Δ*ίνεται τρίγωνο* $\mathrm{AB\Gamma}$ *και τα σημεία* Δ,E *των* $\mathrm{AB,A\Gamma}$ *αντίστοιχα ώστε :*
$\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}=\lambda\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ *και* $\overrightarrow{\mathrm{AE}}=(1-\lambda)\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}},\lambda\neq 0$
Ν*α αποδειχθεί οτι τα μέσα των* $\mathrm{AB,A\Gamma,\Delta E}$ *είναι συνευθεικά*



$\Theta\acute{\varepsilon}\tau\omega: \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{\alpha}, \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} = \vec{\beta}$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \lambda\vec{\alpha}\ , \overrightarrow{\mathrm{AE}} = (1-\lambda)\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} = (1-\lambda)\vec{\beta}$

Έστω Κ, Λ, Μ *μέσα των* ΑΒ, ΑΓ, ΔΕ

Ε*πειδή* Κ *μέσο του* ΑΒ *θα έχω*:

$$\overrightarrow{\mathrm{AK}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{2} = \frac{\vec{\alpha}}{2}$$

Ε*πειδή* Λ *μέσο του* ΑΓ *θα έχω*:

$$\overrightarrow{\mathrm{A\Lambda}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}}{2} = \frac{\vec{\beta}}{2}$$

Δίνεται τρίγωνο ΑΔΕ *η* ΑΜ *είναι διάμεσος*. Ο*πότε θα έχω*:

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}} + \overrightarrow{\mathrm{AE}}}{2} = \frac{\lambda\vec{\alpha} + (1-\lambda)\vec{\beta}}{2}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{K\Lambda}} = \overrightarrow{\mathrm{A\Lambda}} - \overrightarrow{\mathrm{AK}} = \frac{\vec{\beta}}{2} - \frac{\vec{\alpha}}{2} = \frac{\vec{\beta} - \vec{\alpha}}{2}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{KM}} = \overrightarrow{\mathrm{AM}} - \overrightarrow{\mathrm{AK}} = \frac{\lambda\vec{\alpha} + (1-\lambda)\vec{\beta}}{2} - \frac{\vec{\alpha}}{2} = \frac{(\lambda-1)\vec{\alpha} + (1-\lambda)\vec{\beta}}{2} \overset{\lambda-1=-(1-\lambda)}{=}$$

$$\frac{-(1-\lambda)\vec{\alpha} + (1-\lambda)\vec{\beta}}{2} = (1-\lambda)\frac{\vec{\beta} - \vec{\alpha}}{2} \overset{\overrightarrow{\mathrm{K\Lambda}} = \frac{\vec{\beta}-\vec{\alpha}}{2}}{=} (1-\lambda)\overrightarrow{\mathrm{K\Lambda}}$$

Ε*πειδή* $\overrightarrow{\mathrm{KM}} = (1-\lambda)\overrightarrow{\mathrm{K\Lambda}}$ *θα έχω* $\overrightarrow{\mathrm{KM}} // \overrightarrow{\mathrm{K\Lambda}}$. Σ*υνεπώς τα* Κ, Λ, Μ *συνευθειακά*

2.

$\text{Α}\nu\ \gamma\iota\alpha\ \tau\alpha\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}\alpha\ \text{Ο},\text{Α},\text{Β},\Gamma\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\ 2\overrightarrow{\text{ΟΑ}}-5\overrightarrow{\text{ΟΒ}}+3\overrightarrow{\text{ΟΓ}}=\vec{0}\ \nu\alpha\ \alpha\pi o\delta\varepsilon\acute{\iota}\xi\varepsilon\tau\varepsilon$
$o\tau\iota\ \tau\alpha\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}\alpha\ \text{Α},\text{Β},\Gamma\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\upsilon\theta\varepsilon\iota\alpha\kappa\acute{\alpha}$

$\acute{E}\chi\omega: -5\overrightarrow{\text{ΟΒ}}=-2\overrightarrow{\text{ΟΒ}}-3\overrightarrow{\text{ΟΒ}}$

$$2\overrightarrow{\text{ΟΑ}}-5\overrightarrow{\text{ΟΒ}}+3\overrightarrow{\text{ΟΓ}}=\vec{0}\overset{-5\overrightarrow{\text{ΟΒ}}=-2\overrightarrow{\text{ΟΒ}}-3\overrightarrow{\text{ΟΒ}}}{\Longleftrightarrow}2\overrightarrow{\text{ΟΑ}}-2\overrightarrow{\text{ΟΒ}}-3\overrightarrow{\text{ΟΒ}}+3\overrightarrow{\text{ΟΓ}}=\vec{0}\Leftrightarrow$$

$$2\overrightarrow{\text{ΟΑ}}-2\overrightarrow{\text{ΟΒ}}=3\overrightarrow{\text{ΟΒ}}-3\overrightarrow{\text{ΟΓ}}\Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{\text{ΟΑ}}-\overrightarrow{\text{ΟΒ}}\right)=3\left(\overrightarrow{\text{ΟΒ}}-\overrightarrow{\text{ΟΓ}}\right)\overset{\substack{\overrightarrow{\text{ΒΑ}}=\overrightarrow{\text{ΟΑ}}-\overrightarrow{\text{ΟΒ}}\\ \overrightarrow{\Gamma\text{Β}}=\overrightarrow{\text{ΟΒ}}-\overrightarrow{\text{ΟΓ}}}}{\Longleftrightarrow}$$

$$2\overrightarrow{\text{ΒΑ}}=3\overrightarrow{\Gamma\text{Β}}\Leftrightarrow\overrightarrow{\text{ΒΑ}}=\frac{3}{2}\overrightarrow{\Gamma\text{Β}}\Rightarrow\overrightarrow{\text{ΒΑ}}//\overrightarrow{\Gamma\text{Β}}\Leftrightarrow$$

$\text{Τ}\alpha\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}\alpha\ \text{Α},\text{Β},\Gamma\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\upsilon\theta\varepsilon\iota\alpha\kappa\acute{\alpha}$

3.

$\text{Α}\nu\ \gamma\iota\alpha\ \tau\alpha\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}\alpha\ \text{Ο},\text{Α},\text{Β},\Gamma\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\ \overrightarrow{\text{ΟΑ}}-3\overrightarrow{\text{ΒΓ}}+9\overrightarrow{\text{ΟΒ}}+11\overrightarrow{\text{ΟΓ}}=\vec{0}\ \nu\alpha$
$\alpha\pi o\delta\varepsilon\acute{\iota}\xi\varepsilon\tau\varepsilon\ o\tau\iota\ \tau\alpha\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}\alpha\ \text{Α},\text{Β},\Gamma\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\upsilon\theta\varepsilon\iota\alpha\kappa\acute{\alpha}$

$$\overrightarrow{\text{ΟΑ}}-3\overrightarrow{\text{ΒΓ}}-9\overrightarrow{\text{ΟΒ}}+8\overrightarrow{\text{ΟΓ}}=\vec{0}\overset{\overrightarrow{\text{ΒΓ}}=\overrightarrow{\text{ΟΓ}}-\overrightarrow{\text{ΟΒ}}}{\Longleftrightarrow}\overrightarrow{\text{ΟΑ}}-3\left(\overrightarrow{\text{ΟΓ}}-\overrightarrow{\text{ΟΒ}}\right)-9\overrightarrow{\text{ΟΒ}}+8\overrightarrow{\text{ΟΓ}}=\vec{0}\Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{\text{ΟΑ}}-3\overrightarrow{\text{ΟΓ}}+3\overrightarrow{\text{ΟΒ}}-9\overrightarrow{\text{ΟΒ}}+8\overrightarrow{\text{ΟΓ}}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{\text{ΟΑ}}-6\overrightarrow{\text{ΟΒ}}+5\overrightarrow{\text{ΟΓ}}=\vec{0}\overset{-6\overrightarrow{\text{ΟΒ}}=-\overrightarrow{\text{ΟΒ}}-5\overrightarrow{\text{ΟΒ}}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\overrightarrow{\text{ΟΑ}}-\overrightarrow{\text{ΟΒ}}-5\overrightarrow{\text{ΟΒ}}+5\overrightarrow{\text{ΟΓ}}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{\text{ΟΑ}}-\overrightarrow{\text{ΟΒ}}=5\overrightarrow{\text{ΟΒ}}-5\overrightarrow{\text{ΟΓ}}\Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{\text{ΟΑ}}-\overrightarrow{\text{ΟΒ}}=5\left(\overrightarrow{\text{ΟΒ}}-\overrightarrow{\text{ΟΓ}}\right)\overset{\substack{\overrightarrow{\text{ΒΑ}}=\overrightarrow{\text{ΟΑ}}-\overrightarrow{\text{ΟΒ}}\\ \overrightarrow{\Gamma\text{Β}}=\overrightarrow{\text{ΟΒ}}-\overrightarrow{\text{ΟΓ}}}}{\Longleftrightarrow}\overrightarrow{\text{ΒΑ}}=5\overrightarrow{\Gamma\text{Β}}\Rightarrow\overrightarrow{\text{ΒΑ}}//\overrightarrow{\Gamma\text{Β}}\Leftrightarrow$$

$\text{Τ}\alpha\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}\alpha\ \text{Α},\text{Β},\Gamma\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\upsilon\theta\varepsilon\iota\alpha\kappa\acute{\alpha}$

4.

$\text{Α}\nu\ \gamma\iota\alpha\ \tau\alpha\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}\alpha\ \text{Α},\text{Β},\Gamma\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\ \overrightarrow{\text{ΑΒ}}+3\overrightarrow{\text{ΒΓ}}+4\overrightarrow{\Gamma\text{Α}}=\vec{0}\ \nu\alpha\ \alpha\pi o\delta\varepsilon\acute{\iota}\xi\varepsilon\tau\varepsilon\ o\tau\iota$
$\tau\alpha\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}\alpha\ \text{Α},\text{Β},\Gamma\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\upsilon\theta\varepsilon\iota\alpha\kappa\acute{\alpha}$

<u>$1^{o\varsigma}\ \tau\rho\acute{o}\pi o\varsigma:$</u>

$$\overrightarrow{\text{ΑΒ}}+3\overrightarrow{\text{ΒΓ}}+4\overrightarrow{\Gamma\text{Α}}=\vec{0}\overset{\substack{\overrightarrow{\Gamma\text{Α}}=-\overrightarrow{\text{ΑΓ}}\\ \overrightarrow{\text{ΒΓ}}=\overrightarrow{\text{ΑΓ}}-\overrightarrow{\text{ΑΒ}}}}{\Longleftrightarrow}\overrightarrow{\text{ΑΒ}}+3\left(\overrightarrow{\text{ΑΓ}}-\overrightarrow{\text{ΑΒ}}\right)-4\overrightarrow{\text{ΑΓ}}=\vec{0}\Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{\text{ΑΒ}}+3\overrightarrow{\text{ΑΓ}}-3\overrightarrow{\text{ΑΒ}}-4\overrightarrow{\text{ΑΓ}}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{\text{ΑΓ}}=-2\overrightarrow{\text{ΑΒ}}\Rightarrow\overrightarrow{\text{ΑΓ}}//\overrightarrow{\text{ΑΒ}}\Leftrightarrow$$

$\text{Τ}\alpha\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}\alpha\ \text{Α},\text{Β},\Gamma\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\upsilon\theta\varepsilon\iota\alpha\kappa\acute{\alpha}$

$2^{ος}$ *τρόπος* :

Επιλίγω ένα τυχαίο σημείο Ο. Τότε θα έχω :

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{O\Gamma}-\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{\Gamma A}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{O\Gamma}$

$$\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{B\Gamma}+4\overrightarrow{\Gamma A}=\vec{0} \overset{\substack{\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\\ \overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{O\Gamma}-\overrightarrow{OB}\\ \overrightarrow{\Gamma A}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{O\Gamma}}}{\Longleftrightarrow} \overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}+3\left(\overrightarrow{O\Gamma}-\overrightarrow{OB}\right)-4\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{O\Gamma}\right)=\vec{0} \Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{O\Gamma}-3\overrightarrow{OB}-4\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{O\Gamma}=\vec{0} \Leftrightarrow -5\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}+7\overrightarrow{O\Gamma}=\vec{0}$$

$$\overset{7\overrightarrow{O\Gamma}=5\overrightarrow{O\Gamma}+2\overrightarrow{O\Gamma}}{\Longleftrightarrow} -5\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}+5\overrightarrow{O\Gamma}+2\overrightarrow{O\Gamma}=\vec{0} \Leftrightarrow -5\overrightarrow{OA}+5\overrightarrow{O\Gamma}=2\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{O\Gamma} \Leftrightarrow$$

$$5\left(\overrightarrow{O\Gamma}-\overrightarrow{OA}\right)=2\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{O\Gamma}\right) \Leftrightarrow 5\overrightarrow{A\Gamma}=2\overrightarrow{\Gamma B} \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Gamma}=\frac{2}{5}\overrightarrow{\Gamma B} \Rightarrow \overrightarrow{A\Gamma}//\overrightarrow{\Gamma B}$$

$\Leftrightarrow$ Τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Δίνονται τα διανύσματα :

$\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}, \overrightarrow{OB}=5\vec{\alpha}+3\vec{\beta}+4\vec{\gamma}$ και $\overrightarrow{O\Gamma}=13\vec{\alpha}+7\vec{\beta}+10\vec{\gamma}$

Να δείξετε οτι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά

2.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα ώστε :

$\overrightarrow{A\Delta}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{A\Gamma}$

Να αποδειχθεί οτι τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ, ΔΕ είναι συνευθεικά

3.

Έστω Ο τυχαίο σημείο του χώρου. Να αποδείξετε οτι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθεικά αν και μόνο αν υπάρχει πραγματικός αριθμός λ τέτοιος ώστε να ισχύει :

$\overrightarrow{OB}=\lambda\overrightarrow{OA}+(1-\lambda)\overrightarrow{O\Gamma}$

4.

Αν για τα σημεία Ο, Α, Β, Γ ισχύει $\overrightarrow{OA}-3\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{O\Gamma}=\vec{0}$ να αποδείξετε οτι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά

5.

Αν για τα σημεία Ο, Α, Β, Γ ισχύει $5\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{A\Gamma}+6\overrightarrow{OB}-11\overrightarrow{O\Gamma}=\vec{0}$ να αποδείξετε οτι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά