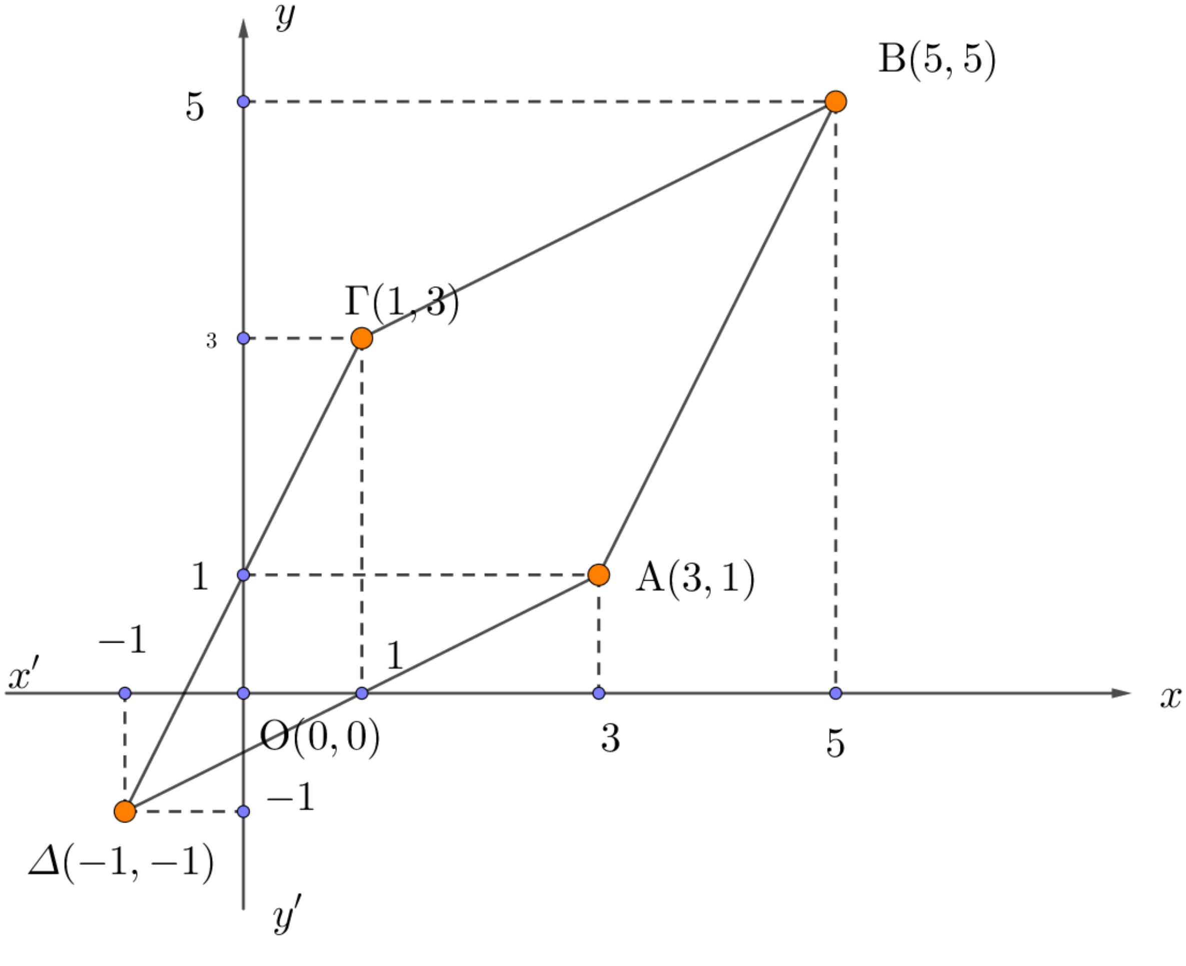
ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ

1.

Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ με κορυφές $\mathrm{A}(3,1)$, $\mathrm{B}(5,5)$, $\Gamma(1,3)$ και $\Delta(-1,-1)$ είναι ρόμβος. Ποιές είναι οι εξισώσεις των διαγωνίων του;



Θα αποδείξω ότι οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ διχοτομούνται δηλαδή οτι <u>οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ έχουν το ίδιο μέσο!!!</u>

Αν $\mathrm{M}(x_{\mathrm{M}}, y_{\mathrm{M}})$ το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ με $\mathrm{A}(x_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{A}})$, $\mathrm{B}(x_{\mathrm{B}}, y_{\mathrm{B}})$ τότε θα έχω:

$$x_{\mathrm{M}} = \frac{x_{\mathrm{A}} + x_{\mathrm{B}}}{2}, \quad y_{\mathrm{M}} = \frac{y_{\mathrm{A}} + y_{\mathrm{B}}}{2}$$

$\mathrm{A}\nu\ \mathrm{K}\left(x_{\mathrm{K}}, y_{\mathrm{K}}\right)$ *το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος* ΑΓ *θα έχω*:

$$x_{\mathrm{K}} = \frac{x_{\mathrm{A}} + x_{\Gamma}}{2} \overset{\substack{x_{\mathrm{A}}=3 \\ x_{\Gamma}=1}}{=} \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$y_{\mathrm{K}} = \frac{y_{\mathrm{A}} + y_{\Gamma}}{2} \overset{\substack{y_{\mathrm{A}}=1 \\ y_{\Gamma}=3}}{=} \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Ο*πότε* $\mathrm{K}\left(2,2\right)$

$\mathrm{A}\nu\ \Lambda\left(x_{\Lambda}, y_{\Lambda}\right)$ *το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος* ΒΔ *θα έχω*:

$$x_{\Lambda} = \frac{x_{\mathrm{B}} + x_{\Delta}}{2} \overset{\substack{x_{\mathrm{B}}=5 \\ x_{\Delta}=-1}}{=} \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$y_{\Lambda} = \frac{y_{\mathrm{B}} + y_{\Delta}}{2} \overset{\substack{y_{\mathrm{B}}=5 \\ y_{\Delta}=-1}}{=} \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Ο*πότε* $\Lambda\left(2,2\right)$

Σ*υνεπώς τα ευθύγραμμα τμήματα* ΑΓ, ΒΔ *διχοτομούνται γιατί έχουν το ίδιο μέσο.* Γ*νωρίζω οτι ένα τετράπλευρο* <u>*είναι παραλληλόγραμμο αν και μόνο αν οι διαγώνιες του διχοτομούνται.*</u> Ε*πειδή οι διαγώνιες του τετραπλεύρου* ΑΒΓΔ *διχοτομούνται προκύπτει ότι το τετράπλευρο* ΑΒΓΔ *είναι παραλληλόγραμμο.*

> Α*ν* $\mathrm{AB} \not\parallel y'y$, $\mathrm{A}\left(x_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{A}}\right), \mathrm{B}\left(x_{\mathrm{B}}, y_{\mathrm{B}}\right)$, *τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας* ΑΒ *δίνεται απο την σχέση*:
>
> $$\lambda_{\mathrm{AB}} = \frac{y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}}}{x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}}, x_{\mathrm{A}} \neq x_{\mathrm{B}}$$

Έ*χω*: $\lambda_{\mathrm{A}\Gamma} \overset{\Gamma(1,3)}{\underset{\mathrm{A}(3,1)}{=}} \frac{3-1}{1-3} = \frac{2}{-2} = -1$

$$\acute{E}\chi\omega : \lambda_{\mathrm{B\Delta}} \underset{\mathrm{B}(5,5)}{\overset{\Delta(-1,-1)}{=}} \frac{-1-5}{-1-5} = \frac{-6}{-6} = 1$$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon : \lambda_{\mathrm{A\Gamma}}\lambda_{\mathrm{B\Delta}} = -1 \bullet 1 = -1$

$\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \lambda_{\mathrm{A\Gamma}}\lambda_{\mathrm{B\Delta}} = -1\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ \mathrm{A\Gamma} \perp \mathrm{B\Delta}.$

$\mathrm{A}\nu\ (\varepsilon_1),(\varepsilon_2) \not\parallel y'y\ \mu\varepsilon$
λ_{ε_1} : Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ε_1)
λ_{ε_2} : Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ε_2)
Τότε ισχύει η ισοδυναμία :
$\lambda_{\varepsilon_1}\lambda_{\varepsilon_2} = -1 \Leftrightarrow (\varepsilon_1) \perp (\varepsilon_2)$

Γνωρίζω ότι αν <u>ένα παραλληλόγραμμο έχει κάθετες διαγωνίους τότε είναι ρόμβος</u>. Επειδή ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο με $\mathrm{A\Gamma} \perp \mathrm{B\Delta}$ προκύπτει οτι το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.

$(\varepsilon) \not\parallel y'y$
λ : Ο συντελεστής διευθύνσης της ευθείας
$\mathrm{A}(x_0, y_0) \in (\varepsilon)$
Τότε η ευθεία (ε) θα έχει εξίσωση :
$y - y_0 = \lambda(x - x_0)$

Η ευθεία ΒΔ θα έχει εξίσωση :

$$y - y_{\Delta} = \lambda_{\mathrm{B\Delta}}(x - x_{\Delta}) \overset{\substack{\lambda_{\mathrm{B\Delta}}=1 \\ \Delta(-1,-1)}}{\Longleftrightarrow} y + 1 = 1(x+1) \Leftrightarrow y + \cancel{1} = x + \cancel{1} \Leftrightarrow$$

$y = x$

$\mathrm{B\Delta} : y = x$

$\mathrm{H}\ \textit{ευθεία}\ \mathrm{A\Gamma}\ \textit{θα έχει εξίσωση}:$

$$y-y_{\mathrm{A}}=\lambda_{\mathrm{A\Gamma}}\left(x-x_{\mathrm{A}}\right)\overset{\substack{\lambda_{\mathrm{A\Gamma}}=-1\\ \mathrm{A}(3,1)}}{\Longleftrightarrow} y-1=-1(x-3)\Leftrightarrow y-1=-x+3\Leftrightarrow$$

$y=-x+4$

$\mathrm{A\Gamma}: y=-x+4$

2.

$\mathrm{N}\alpha$ *βρείτε την εξίσωση της ευθείας* ε *που διέρχεται απο τα σημεία* $\mathrm{A}(\sigma\upsilon\nu\theta,\eta\mu\theta)$ *και* $\mathrm{B}(\eta\mu\theta,\sigma\upsilon\nu\theta)$, *αν* $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ *και* $\theta\neq\dfrac{\pi}{4}$. *Για ποιά τιμή του* θ *η ευθεία διέρχεται απο την αρχή των αξόνων;*

$\mathrm{A}\nu$ $\mathrm{AB}\nparallel y'y$, $\mathrm{A}\left(x_{\mathrm{A}},y_{\mathrm{A}}\right)$, $\mathrm{B}\left(x_{\mathrm{B}},y_{\mathrm{B}}\right)$, *τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας* AB *δίνεται απο την σχέση*:

$$\lambda_{\mathrm{AB}}=\frac{y_{\mathrm{B}}-y_{\mathrm{A}}}{x_{\mathrm{B}}-x_{\mathrm{A}}},\ x_{\mathrm{A}}\neq x_{\mathrm{B}}$$

O *συντελεστής διεύθυνσης* λ *της ευθείας* AB *δίνεται απο την σχέση*:

$$\lambda\ \underset{\mathrm{B}(\eta\mu\theta,\sigma\upsilon\nu\theta)}{\overset{\mathrm{A}(\sigma\upsilon\nu\theta,\eta\mu\theta)}{=}}\ \frac{\eta\mu\theta-\sigma\upsilon\nu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta-\eta\mu\theta}=\frac{\eta\mu\theta-\sigma\upsilon\nu\theta}{-\left(\eta\mu\theta-\sigma\upsilon\nu\theta\right)}=-1$$

$(\varepsilon)\nparallel y'y$

λ: O *συντελεστής διευθύνσης της ευθείας*

$\mathrm{A}\left(x_0,y_0\right)\in(\varepsilon)$

Τ*ότε η ευθεία* (ε) *θα έχει εξίσωση*:

$$y-y_0=\lambda\left(x-x_0\right)$$

$\text{Η } \textit{ευθεία } \text{ΑΒ } \textit{θα έχει εξίσωση}:$

$$y-y_{\mathrm{A}}=\lambda\left(x-x_{\mathrm{A}}\right)\overset{\substack{\lambda=-1\\ \mathrm{A}(\sigma\upsilon\nu\theta,\eta\mu\theta)}}{\Longleftrightarrow} y-\eta\mu\theta=-1\left(x-\sigma\upsilon\nu\theta\right)\Leftrightarrow$$

$$y-\eta\mu\theta=-x+\sigma\upsilon\nu\theta\Leftrightarrow x+y-\eta\mu\theta-\sigma\upsilon\nu\theta=0$$

$$\mathrm{AB}: x+y-\eta\mu\theta-\sigma\upsilon\nu\theta=0$$

Επειδή $\mathrm{O}(0,0)\in \mathrm{AB}$ *οι συντεταγμένες ικανοποιούν την εξίσωση της ευθείας*. Οπότε *θα έχω*:

$$x_{\mathrm{O}}+y_{\mathrm{O}}-\eta\mu\theta-\sigma\upsilon\nu\theta=0\overset{x_{\mathrm{O}}=y_{\mathrm{O}}=0}{\Longleftrightarrow}0+0-\left(\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta\right)=0\Leftrightarrow$$

$$-\left(\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta\right)=0\Leftrightarrow\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta=0\Leftrightarrow\eta\mu\theta=-\sigma\upsilon\nu\theta\,(1)$$

Έστω $\sigma\upsilon\nu\theta=0$. Τότε *απο την σχέση* (1) *θα έχω*:

$$\eta\mu\theta=-\sigma\upsilon\nu\theta\overset{\sigma\upsilon\nu\theta=0}{=}0$$

Οπότε: $\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta=0^2+0^2=0$

Άτοπο γιατί για κάθε $\theta\in\mathbb{R}$ *ισχύει* $\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta=1$. Συνεπώς $\sigma\upsilon\nu\theta\neq 0$. Τότε *απο την σχέση* (1) *θα έχω*:

$$\left\{\begin{array}{l}\eta\mu\theta=-\sigma\upsilon\nu\theta\\ \sigma\upsilon\nu\theta\neq 0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}=-\dfrac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}\\ \theta\neq\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2},\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ \kappa\in\mathbb{Z}\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\boxed{\sigma\upsilon\nu x=0\Leftrightarrow x=\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\kappa\in\mathbb{Z}}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\varepsilon\varphi\theta=-1\\ \theta\neq\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2},\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ \kappa\in\mathbb{Z}\end{array}\right\}\overset{\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}=1}{\Longleftrightarrow}\left\{\begin{array}{l}\varepsilon\varphi\theta=-\varepsilon\varphi\dfrac{\pi}{4}\\ \theta\neq\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2},\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ \kappa\in\mathbb{Z}\end{array}\right\}$$

$$\boxed{\varepsilon\varphi(-x)=-\varepsilon\varphi x, x\neq\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\kappa\in\mathbb{Z}}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \varepsilon\varphi\theta = \varepsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ \theta \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2},\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ \kappa \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \theta = \lambda\pi - \frac{\pi}{4}, \lambda \in \mathbb{Z} \\ \theta \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2},\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ \kappa \in \mathbb{Z} \end{array}\right\}$$

Έστω υπάρχουν $\kappa, \lambda \in \mathbb{Z}$ *τέτοια ώστε*:

$$\lambda\pi - \frac{\pi}{4} = \kappa\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \cancel{\pi}\left(\lambda - \frac{1}{4}\right) = \cancel{\pi}\left(\kappa + \frac{1}{2}\right) \overset{\substack{\text{Αν } \alpha\neq 0 \text{ ισχύει η ισοδυναμία:} \\ \alpha x = \alpha y \Leftrightarrow x = y}}{\Leftrightarrow}$$

$$\lambda - \frac{1}{4} = \kappa + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \lambda - \kappa = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow \lambda - \kappa = \frac{3}{4}$$

Άτοπο γιατί $\lambda, \kappa \in \mathbb{Z}$ *συνεπώς και* $\lambda - \kappa \in \mathbb{Z}$. *Οπότε θα έχω*:

$$\theta = \lambda\pi - \frac{\pi}{4}, \lambda \in \mathbb{Z}$$

$$\left\{\begin{array}{l} -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \\ \lambda \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -\frac{\pi}{2} < \lambda\pi - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} \\ \lambda \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} \overset{\substack{\text{Αν } \alpha>0 \text{ τότε ισχύει η ισοδυναμία:} \\ \alpha x < \alpha y \Leftrightarrow x < y}}{\Leftrightarrow}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \cancel{\pi}\left(-\frac{1}{2}\right) < \cancel{\pi}\left(\lambda - \frac{1}{4}\right) < \cancel{\pi}\frac{1}{2} \\ \lambda \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -\frac{1}{2} < \lambda - \frac{1}{4} < \frac{1}{2} \\ \lambda \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} < \lambda < \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \\ \lambda \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -\frac{1}{4} < \lambda < \frac{3}{4} \\ \lambda \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \lambda = 0$$

Τότε θα έχω:

$$\theta = \lambda\pi - \frac{\pi}{4} \overset{\lambda=0}{=} 0\pi - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$$

3.

Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται απο το σημείο $\mathrm{A}(-1,2)$ *και σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.*

Έστω (ε) η ζητούμενη ευθεία. Επειδή η ευθεία (ε) τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ δεν είναι παράλληλη με τον άξονα $y'y$ συνεπώς υπάρχει ο συντελεστής διεύθυνσης λ της ευθείας (ε). Έστω $\lambda = 0$ τότε η ευθεία (ε) θα ήταν παράλληλη με τον άξονα $x'x$ πράγμα που είναι άτοπο γιατι η ευθεία (ε) τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Οπότε η ευθεία (ε) θα έχει εξίσωση:

$(\varepsilon) \nparallel y'y$
λ: Ο συντελεστής διευθύνσης της ευθείας
$\mathrm{A}(x_0, y_0) \in (\varepsilon)$
Τότε η ευθεία (ε) θα έχει εξίσωση:
$y - y_0 = \lambda(x - x_0)$

$$y - y_{\mathrm{A}} = \lambda(x - x_{\mathrm{A}}) \overset{\mathrm{A}(-1,2)}{\Longleftrightarrow} y - 2 = \lambda(x+1) \Leftrightarrow y = \lambda x + \lambda + 2$$

$$(\varepsilon): y = \lambda x + \lambda + 2, \lambda \neq 0$$

Έστω $\mathrm{A}(x_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{A}})$ κοινό σημείο της ευθείας (ε) με τον άξονα $x'x$. Τότε θα έχω:

$$\left\{\begin{matrix} \mathrm{A}(x_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{A}}) \in x'x \\ \mathrm{A}(x_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{A}}) \in (\varepsilon) \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} y_{\mathrm{A}} = 0 \\ y_{\mathrm{A}} = \lambda x_{\mathrm{A}} + \lambda + 2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} y_{\mathrm{A}} = 0 \\ \lambda x_{\mathrm{A}} + \lambda + 2 = 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix} y_{\mathrm{A}} = 0 \\ \lambda x_{\mathrm{A}} = -\lambda - 2 \end{matrix}\right\} \overset{\lambda \neq 0}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{matrix} y_{\mathrm{A}} = 0 \\ x_{\mathrm{A}} = -\dfrac{\lambda + 2}{\lambda} \end{matrix}\right\}$$

Οπότε: $\boxed{\mathrm{A}\left(-\dfrac{\lambda+2}{\lambda}, 0\right)}$

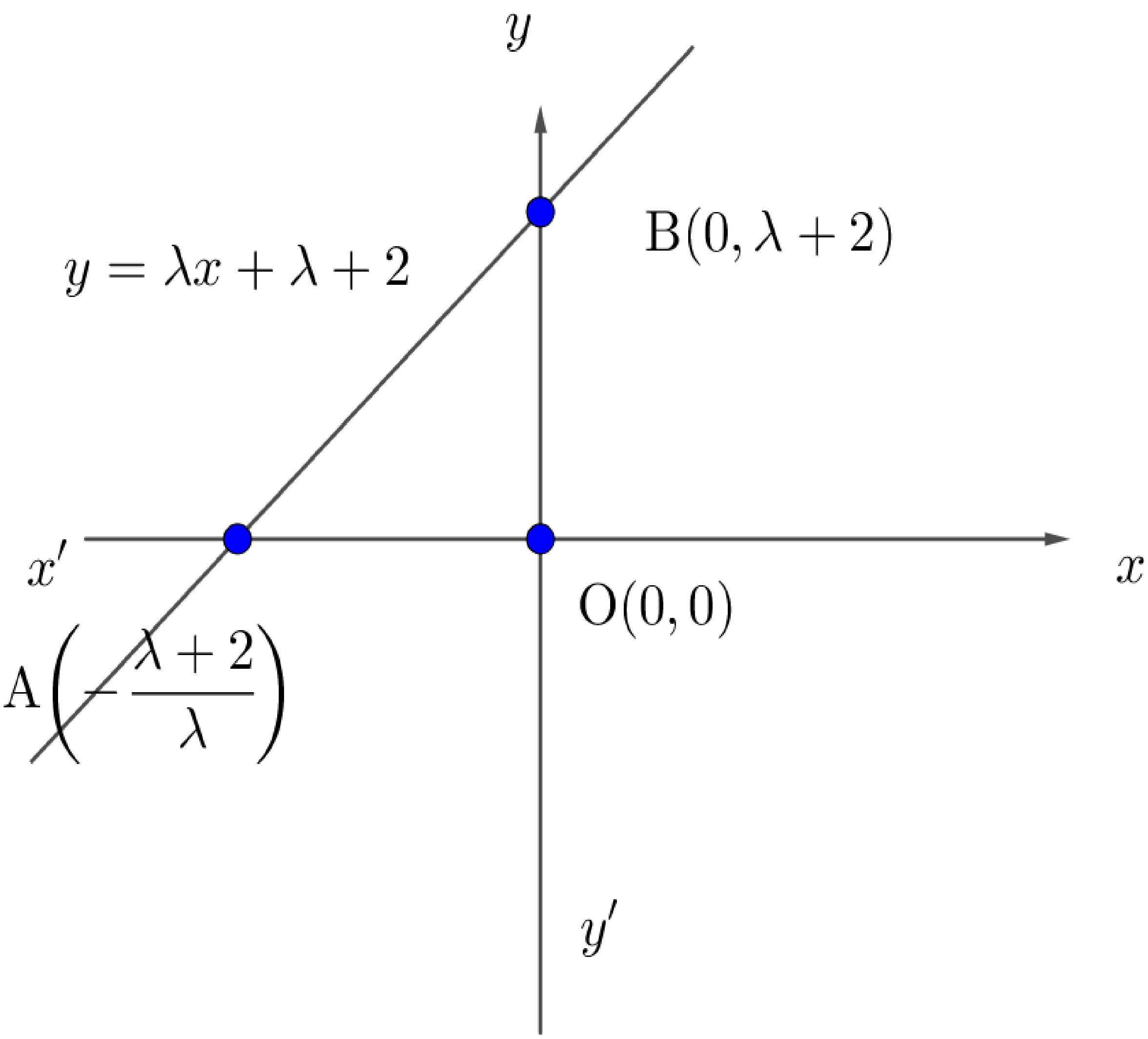
Έστω $\mathrm{A}(x_{\mathrm{B}}, y_{\mathrm{B}})$ κοινό σημείο της ευθείας (ε) με τον άξονα $y'y$. Τότε θα έχω:

Έστω $\text{B}(x_\text{B}, y_\text{B})$ *κοινό σημείο της ευθείας* (ε) *με τον άξονα* $y'y$. *Τότε θα έχω*:

$$\begin{Bmatrix} \text{B}(x_\text{B}, y_\text{B}) \in y'y \\ \text{B}(x_\text{B}, y_\text{B}) \in (\varepsilon) \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x_\text{B} = 0 \\ y_\text{B} = \lambda x_\text{B} + \lambda + 2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x_\text{B} = 0 \\ y_\text{B} = \lambda \cdot 0 + \lambda + 2 \end{Bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x_\text{B} = 0 \\ y_\text{B} = \lambda + 2 \end{Bmatrix}$$

Ο*πότε*: $\boxed{\text{B}(0, \lambda + 2)}$



$\text{Το } \textit{τρίγωνο } \text{OAB} \textit{ για να είναι ισοσκελές ορθογώνιο θα πρέπει να ισχύει}:$

$$\text{OA}=\text{OB}>0 \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \left|-\dfrac{\lambda+2}{\lambda}\right|=|\lambda+2|>0 \\ \lambda\neq 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \dfrac{|\lambda+2|}{|\lambda|}=|\lambda+2| \\ \lambda+2\neq 0,\lambda\neq 0 \end{matrix}\right\}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ!!!
Αν $\lambda+2=0$ *ισχύει* $\text{OA}=\text{OB}$ *αλλά τα σημεία* Α,Β *ταυτίζονται. Συνεπώς δεν υπάρχει τρίγωνο* ΟΑΒ!!!

$$\left\{\begin{matrix} |\lambda+2|=|\lambda||\lambda+2| \\ \lambda\neq -2,\lambda\neq 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} |\lambda||\lambda+2|-|\lambda+2|=0 \\ \lambda\neq -2,\lambda\neq 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix} |\lambda+2|\left(|\lambda|-1\right)=0 \\ \lambda\neq -2,\lambda\neq 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{pmatrix} |\lambda+2|=0 \\ \lambda\neq -2,\lambda\neq 0 \end{pmatrix} \acute{\eta} \begin{pmatrix} |\lambda|-1=0 \\ \lambda\neq -2,\lambda\neq 0 \end{pmatrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{pmatrix} \lambda+2=0 \\ \lambda\neq -2,\lambda\neq 0 \end{pmatrix} \acute{\eta} \begin{pmatrix} |\lambda|=1 \\ \lambda\neq -2,\lambda\neq 0 \end{pmatrix}\right\} \overset{|x|=\theta\Leftrightarrow x=\pm\theta,\theta>0}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left\{\begin{pmatrix} \lambda=-2\left(\text{Απορρίπτεται}\right) \\ \lambda\neq -2,\lambda\neq 0 \end{pmatrix} \acute{\eta} \begin{pmatrix} \lambda=\pm 1\left(\text{Δεκτή}\right) \\ \lambda\neq -2,\lambda\neq 0 \end{pmatrix}\right\} \Leftrightarrow \lambda=\pm 1$$

Αν $\lambda=-1$ *θα έχω την ευθεία*:

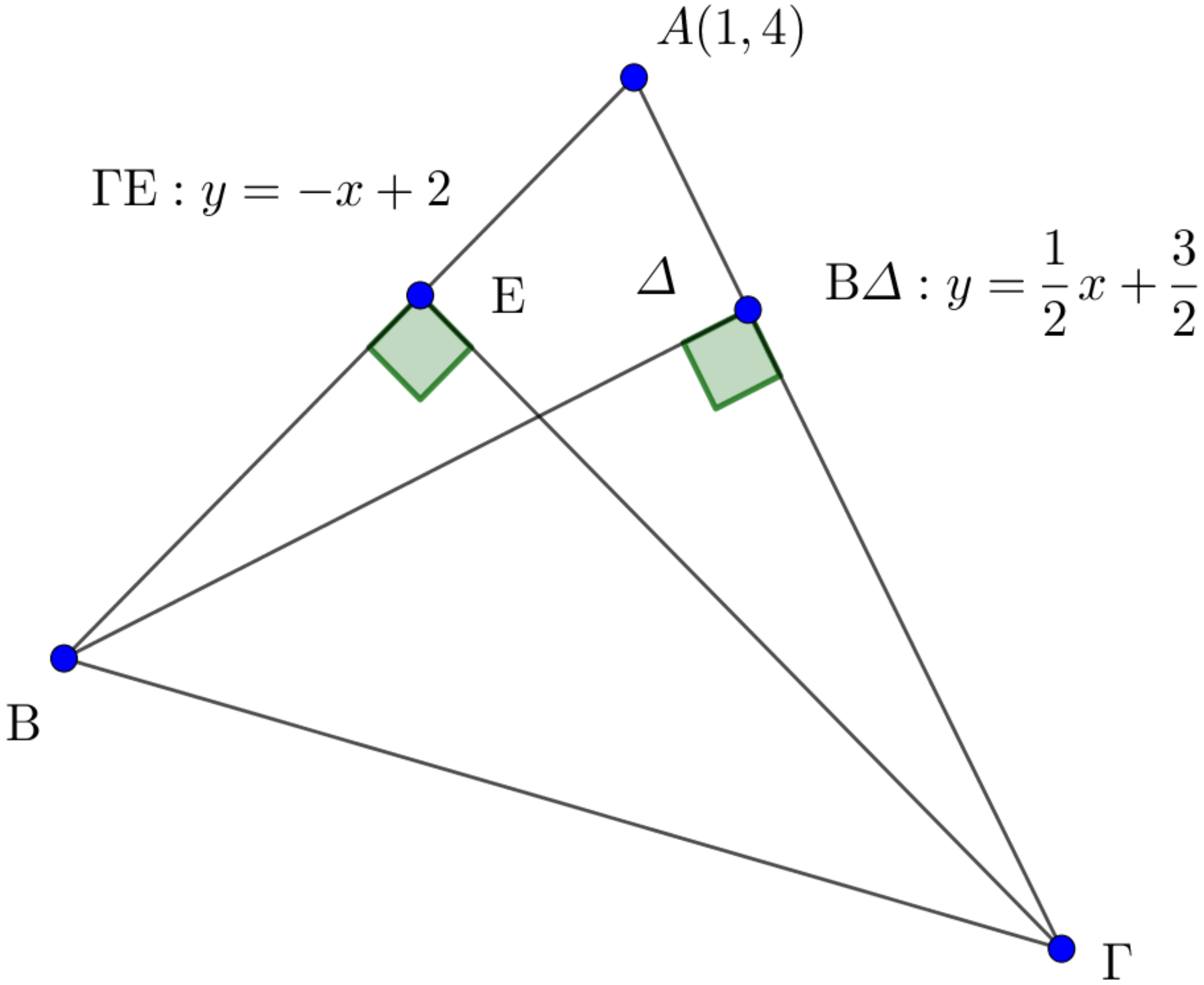
$(\varepsilon_1)\ y=-x+1$

Αν $\lambda=1$ *θα έχω την ευθεία*:

$(\varepsilon_2)\ y=x+3$

4.

Ν*α βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών και τις συντεγμένες των κορυφών* Β *και* Γ *του τριγώνου* ΑΒΓ, *τον οποίου τα δυο ύψη έχουν εξισώσεις* $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$ *και* $y=-x+2$ *αντιστοίχως και η κορυφή* Α *έχει συνεταγμένες* $(1,4)$



$$\mathrm{B\Delta}: y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

$$\mathrm{\Gamma E}: y = -x + 2$$

Η *ευθεία με εξίσωση* $y = \alpha x + \beta$ *έχει συντελεστή διεύθυνσης τον αριθμό* α !!!

Έχω: $\lambda_{\mathrm{B\Delta}} = \dfrac{1}{2}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Αν } (\varepsilon_1),(\varepsilon_2) \not\parallel y'y \text{ με} \\ \lambda_{\varepsilon_1}: \text{Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας } (\varepsilon_1) \\ \lambda_{\varepsilon_2}: \text{Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας } (\varepsilon_2) \\ \text{Τότε ισχύει η ισοδυναμία:} \\ \lambda_{\varepsilon_1}\lambda_{\varepsilon_2} = -1 \Leftrightarrow (\varepsilon_1) \perp (\varepsilon_2) \end{array}}$$

Επειδή $\mathrm{B\Delta} \perp \mathrm{A\Gamma}$ θα έχω:

$$\lambda_{\mathrm{B\Delta}}\lambda_{\mathrm{A\Gamma}} = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\lambda_{\mathrm{A\Gamma}} = -1 \Leftrightarrow \frac{\lambda_{\mathrm{A\Gamma}}}{2} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\mathrm{A\Gamma}} = -2$$

$$\boxed{\begin{array}{l} (\varepsilon) \not\parallel y'y \\ \lambda: \text{Ο συντελεστής διευθύνσης της ευθείας} \\ \mathrm{A}(x_0, y_0) \in (\varepsilon) \\ \text{Τότε η ευθεία } (\varepsilon) \text{ θα έχει εξίσωση:} \\ y - y_0 = \lambda(x - x_0) \end{array}}$$

Η ευθεία ΑΓ θα έχει εξίσωση:

$$y - y_{\mathrm{A}} = \lambda_{\mathrm{A\Gamma}}(x - x_{\mathrm{A}}) \overset{\substack{\lambda_{\mathrm{A\Gamma}}=-2 \\ \mathrm{A}(1,4)}}{\Longleftrightarrow} y - 4 = -2(x-1) \Leftrightarrow y - 4 = -2x + 2$$

$$\Leftrightarrow 2x + y = 4 + 2 \Leftrightarrow 2x + y = 6$$

Το σημείο $\Gamma(x,y)$ θα είναι το σημείο τομής των ευθειών ΑΓ και ΓΕ. Συνεπώς <u>οι συντεταγμένες του $\Gamma(x,y)$ θα είναι η λύση του συστήματος που ορίζεται απο τις εξισώσεις των ευθειών ΑΓ και ΓΕ.</u>

$$\left\{\begin{array}{l} 2x + y = 6 \\ y = -x + 2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x + y = 6 \\ x + y = 2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x + y = 6 \\ \underline{-x - y = -2} \end{array}\right\}(+)$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2x + y - x - y = 6 - 2 \\ x + y = 2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = 4 \\ x + y = 2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 4 \\ 4 + y = 2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 4 \\ y = 2 - 4 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 4 \\ y = -2 \end{array}\right\}$$

Οπότε: $\boxed{\Gamma(4,-2)}$

$\mathrm{\Gamma E}: y = -x + 2$

Η $\textit{ευθεία με εξίσωση } y = \alpha x + \beta \textit{ έχει συντελεστή}$ $\textit{διεύθυνσης τον αριθμό } \alpha$!!!

$\textit{Έχω}: \lambda_{\mathrm{\Gamma E}} = -1$

Ε$\textit{πειδή}$ $\mathrm{\Gamma E} \perp \mathrm{AB}$ $\textit{θα έχω}$:

$\lambda_{\mathrm{\Gamma E}} \lambda_{\mathrm{AB}} = -1 \Leftrightarrow -\lambda_{\mathrm{AB}} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\mathrm{AB}} = 1$

$(\varepsilon) \not\parallel y'y$ λ : Ο $\textit{συντελεστής διευθύνσης της ευθείας}$ $\mathrm{A}(x_0, y_0) \in (\varepsilon)$ Τ$\textit{ότε η ευθεία } (\varepsilon) \textit{ θα έχει εξίσωση}$: $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$

Η $\textit{ευθεία}$ ΑΒ $\textit{θα έχει εξίσωση}$:

$$y - y_{\mathrm{A}} = \lambda_{\mathrm{AB}}(x - x_{\mathrm{A}}) \overset{\substack{\lambda_{\mathrm{AB}}=1 \\ \mathrm{A}(1,4)}}{\Longleftrightarrow} y - 4 = 1(x-1) \Leftrightarrow y - 4 = x - 1 \Leftrightarrow$$

$$-x + y = -1 + 4 \Leftrightarrow -x + y = 3$$

Τ$\textit{ο σημείο}$ $\mathrm{B}(x,y)$ $\textit{θα είναι το σημείο τομής των ευθειών}$ ΑΒ $\textit{και}$ ΒΔ. Σ$\textit{υνεπώς}$ <u>$\textit{οι συντεταγμένες του}$ $\mathrm{B}(x,y)$ $\textit{θα είναι η λύση του συστήματος που ορίζεται απο τις εξισώσεις των ευθειών}$ ΑΒ $\textit{και}$ ΒΔ</u>.

$$\left\{\begin{matrix} y = \dfrac{x+3}{2} \\ -x + y = 3 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} 2y = x + 3 \\ -x + y = 3 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \underline{\left\{\begin{matrix} x - 2y = -3 \\ -x + y = 3 \end{matrix}\right\}}(+)$$

$$\left\{\begin{matrix} x - 2y - x + y = 3 - 3 \\ -x + y = 3 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix} -y = 0 \\ -x + y = 3 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} y = 0 \\ -x + 0 = 3 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} y = 0 \\ -x = 3 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} y = 0 \\ x = -3 \end{matrix}\right\}$$

Ο$\textit{πότε}$: $\boxed{\mathrm{B}(-3,0)}$

Αν $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), x_A \neq x_B$ *τότε υπάρχει ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας* ΑΒ *και δίνεται απο την σχέση*: $\lambda_{AB} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Ο *συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας* ΒΓ *δίνεται απο την σχέση*:

$$\lambda_{B\Gamma} \underset{B(-3,0)}{\overset{\Gamma(4,-2)}{=}} \frac{-2-0}{4+3} = -\frac{2}{7}$$

$(\varepsilon) \not\parallel y'y$ λ: Ο *συντελεστής διευθύνσης της ευθεΒίας* $A(x_0, y_0) \in (\varepsilon)$ Τ*ότε η ευθεία* (ε) *θα έχει εξίσωση*: $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$

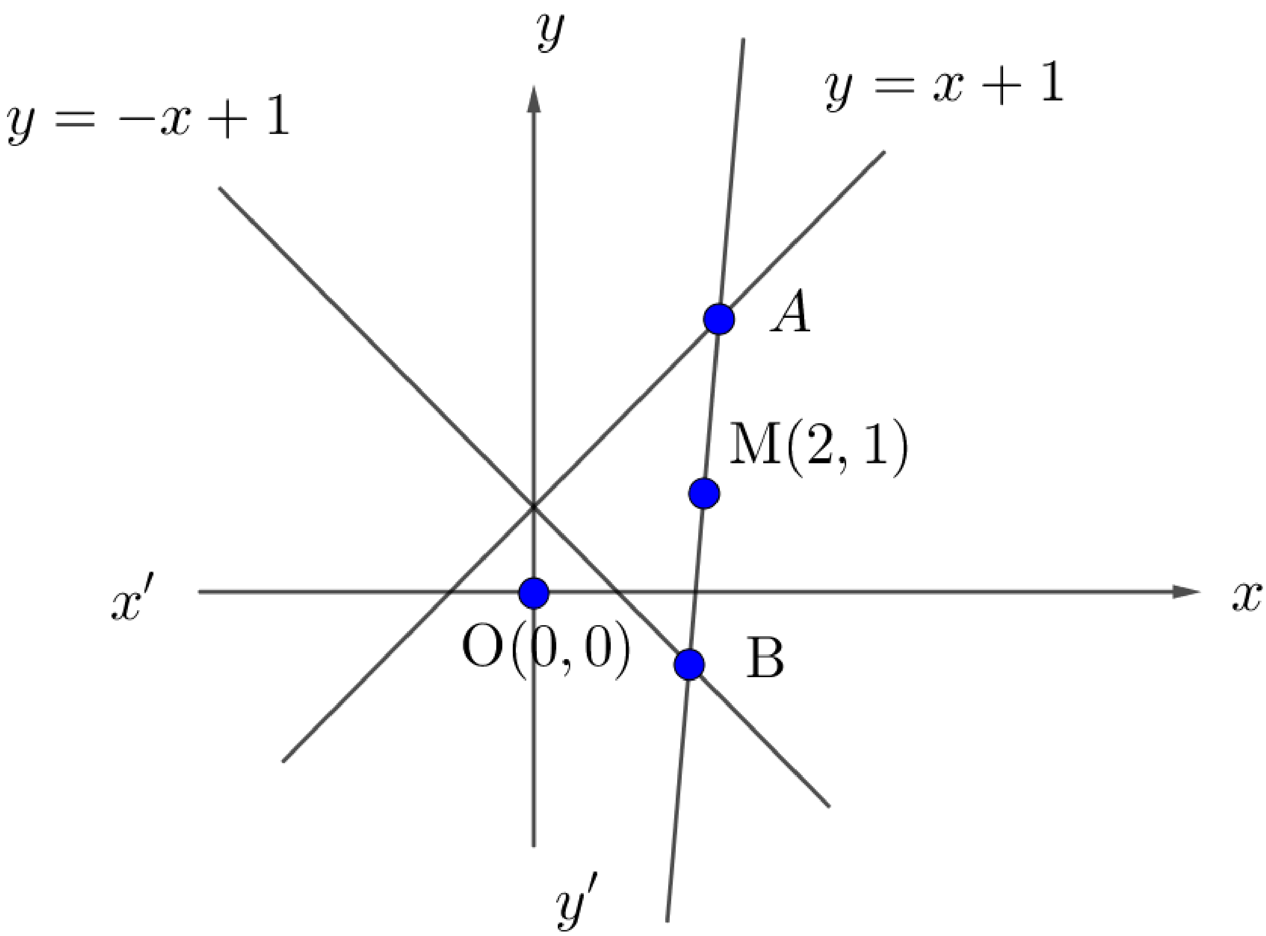
Η *ευθεία* ΒΓ *θα έχει εξίσωση*:

$$y - y_B = \lambda_{B\Gamma}(x - x_B) \underset{}{\overset{\substack{B(-3,0) \\ \lambda_{B\Gamma} = -\frac{2}{7}}}{\Longleftrightarrow}} y = -\frac{2}{7}(x+3) \Leftrightarrow 7y = -2x - 6$$

$$2x + 7y + 6 = 0$$

5.

Ν*α βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται απο το σημείο* $M(2,1)$ *και τέμνει τις ευθείες* $y = x + 1$ *και* $y = -x + 1$ *στα σημεία* Α *και* Β *αντιστοίχως, έτσι ώστε το* Μ *να είναι μέσο του* ΑΒ.



Έστω η ευθεία (ε) διέρχεται απο το σημείο $\mathrm{M}(2,1)$
τέμνει τις ευθείες $y = x + 1$ *και* $y = -x + 1$ *αντίστοιχαστα*
σημεία $\mathrm{A}(x_1, y_1), \mathrm{B}(x_2, y_2)$ *και* $\mathrm{M}(2,1)$ *είναι μέσο του* AB. Τ*ότε*
θα έχω:

$$\left\{\begin{aligned} x_{\mathrm{M}} &= \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y_{\mathrm{M}} &= \frac{y_1 + y_2}{2} \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2x_{\mathrm{M}} \\ y_1 + y_2 &= 2y_{\mathrm{M}} \end{aligned}\right\} \overset{\substack{x_{\mathrm{M}}=2 \\ y_{\mathrm{M}}=1}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \bullet 2 \\ y_1 + y_2 &= 2 \bullet 1 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 + x_2 = 4 \\ y_1 + y_2 = 2 \end{Bmatrix}$$

Διακρίνω τις περιπτώσεις:

$$\begin{Bmatrix} (\mathrm{I})(\varepsilon) // y'y \\ (\mathrm{II})(\varepsilon) \not\parallel y'y \end{Bmatrix}$$

<u>Περίπτωση (I):</u>

Επειδή $(\varepsilon) // y'y$ και διέρχεται απο το σημείο $\mathrm{M}(2,1)$ θα έχει εξίσωση.

$(\varepsilon): x = 2$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Αν } (\varepsilon) // y'y \text{ τότε η ευθεία } (\varepsilon) \text{ θα έχει εξίσωση} \\ x = \boxed{\begin{array}{l}\text{Η τετμημένη του σημείου απο το οποίο διέρχεται} \\ \text{η ευθεία } (\varepsilon)\end{array}} \end{array}}$$

<u>Οι συντεταγμένες του σημείου $\mathrm{A}(x_1, y_1)$ είναι λύση του συστήματος που ορίζεται απο τις εξίσωσεις των ευθειών $x=1$ και $y = x+1$</u>

$$\begin{Bmatrix} y = x+1 \\ x = 2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y = 2+1 \\ x = 2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y = 3 \\ x = 2 \end{Bmatrix}$$

Οπότε: $x_1 = 2, y_1 = 3$

<u>Οι συντεταγμένες του σημείου $\mathrm{B}(x_2, y_2)$ είναι λύση του συστήματος που ορίζεται απο τις εξίσωσεις των ευθειών $x=1$ και $y = -x+1$</u>

$$\begin{Bmatrix} y = -x+1 \\ x = 2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y = -2+1 \\ x = 2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y = -1 \\ x = 2 \end{Bmatrix}$$

Οπότε: $x_2 = 2, y_2 = -1$

Τότε θα έχω:

$x_1 + x_2 = 2 + 2 = 4,\ y_1 + y_2 = 3 - 1 = 2$

$\text{Οπότε η ευθεία } (\varepsilon): x = 2 \text{ είναι λύση του προβλήματος}$

$\underline{\text{Περίπτωση } (\text{II}):}$

$\text{Επειδή } (\varepsilon) \not\parallel y'y \text{ τότε υπάρχει ο συντελεστής διεύθυνσης } \lambda$
$\text{της ευθείας } (\varepsilon) \text{ και η } (\varepsilon) \text{ διέρχεται απο το σημείο } \mathrm{M}(2,1).$

$\text{Οπότε η ευθεία } (\varepsilon) \text{ έχει εξίσωση}:$

$$y - y_{\mathrm{M}} = \lambda(x - x_{\mathrm{M}}) \overset{\mathrm{M}(2,1)}{\Longleftrightarrow} y - 1 = \lambda(x-2) \Leftrightarrow y - 1 = \lambda x - 2\lambda \Leftrightarrow$$
$$-\lambda x + y = 1 - 2\lambda$$
$$(\varepsilon): -\lambda x + y = 1 - 2\lambda$$

$$\boxed{\begin{array}{l} (\varepsilon) \not\parallel y'y \\ \lambda: \text{Ο συντελεστής διευθύνσης της ευθείας} \\ \mathrm{A}(x_0, y_0) \in (\varepsilon) \\ \text{Τότε η ευθεία } (\varepsilon) \text{ θα έχει εξίσωση}: \\ y - y_0 = \lambda(x - x_0) \end{array}}$$

$\underline{\text{Οι συντεταγμένες του σημείου } \mathrm{A}(x_1, y_1) \text{ είναι λύση του}}$
$\underline{\text{συστήματος που ορίζεται απο τις εξίσωσεις των ευθειών}}$
$\underline{-\lambda x + y = 1 - 2\lambda \text{ και } y = x + 1}$

$$\begin{cases} -\lambda x + y = 1 - 2\lambda \\ y = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda x + y = 1 - 2\lambda \\ -x + y = 1 \end{cases} \overset{\substack{\text{Πολλαπλασιάζω την δεύτερη} \\ \text{εξίσωση με το } -1 \text{ για να προκύψουν} \\ \text{αντίθετοι συντελεστές για το } y}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\begin{cases} -\lambda x + y = 1 - 2\lambda \\ -(-x + y) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} -\lambda x + y = 1 - 2\lambda \\ x - y = -1 \end{cases}} (+)$$

$$\begin{cases} -\lambda x + \cancel{y} + x - \cancel{y} = \cancel{1} - 2\lambda - \cancel{1} \\ y = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -(\lambda - 1)x = -2\lambda \\ y = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\lambda - 1)x = 2\lambda \\ y = x + 1 \end{cases}$$

$$\acute{E}\sigma\tau\omega\ \lambda-1=0 \Leftrightarrow \lambda=1$$

$$\Theta\acute{\varepsilon}\tau\omega\ \lambda=1\,\sigma\tau\eta\nu\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta\ (\lambda-1)x=2\lambda:$$

$$(\lambda-1)x=2\lambda \overset{\lambda=1}{\Longleftrightarrow} 0x=2(\text{A}\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau\eta)$$

$$\Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\omega\varsigma\ \lambda-1\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq 1$$

$$\begin{Bmatrix} (\lambda-1)x=2\lambda \\ y=x+1 \\ \lambda\neq 1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x=\dfrac{2\lambda}{\lambda-1} \\ y=x+1 \\ \lambda\neq 1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x=\dfrac{2\lambda}{\lambda-1} \\ y=\dfrac{2\lambda}{\lambda-1}+\dfrac{\lambda-1}{\lambda-1} \\ \lambda\neq 1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} x=\dfrac{2\lambda}{\lambda-1} \\ y=\dfrac{3\lambda}{\lambda-1} \\ \lambda\neq 1 \end{Bmatrix}$$

$$\text{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon: \boxed{x_1=\frac{2\lambda}{\lambda-1}, y_1=\frac{3\lambda}{\lambda-1}, \lambda\neq 1}$$

$\underline{\text{O}\iota\ \sigma\upsilon\nu\tau\varepsilon\tau\alpha\gamma\mu\acute{\varepsilon}\nu\varepsilon\varsigma\ \tau o\upsilon\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\upsilon\ \text{A}(x_2,y_2)\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \lambda\acute{\upsilon}\sigma\eta\ \tau o\upsilon}$

$\underline{\sigma\upsilon\sigma\tau\acute{\eta}\mu\alpha\tau o\varsigma\ \pi o\upsilon\ o\rho\acute{\iota}\zeta\varepsilon\tau\alpha\iota\ \alpha\pi o\ \tau\iota\varsigma\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\varepsilon\iota\varsigma\ \tau\omega\nu\ \varepsilon\upsilon\theta\varepsilon\iota\acute{\omega}\nu}$

$\underline{-\lambda x+y=1-2\lambda\ \kappa\alpha\iota\ y=-x+1}$

$$\begin{Bmatrix} -\lambda x+y=1-2\lambda \\ y=-x+1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -\lambda x+y=1-2\lambda \\ x+y=1 \end{Bmatrix} \xLeftrightarrow{\substack{\Pi o\lambda\lambda\alpha\pi\lambda\alpha\sigma\iota\acute{\alpha}\zeta\omega\ \tau\eta\nu\ \delta\varepsilon\acute{\upsilon}\tau\varepsilon\rho\eta \\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta\ \mu\varepsilon\ \tau o\ -1\ \gamma\iota\alpha\ \nu\alpha\ \pi\rho o\kappa\acute{\upsilon}\psi o\upsilon\nu \\ \alpha\nu\tau\acute{\iota}\theta\varepsilon\tau o\iota\ \sigma\upsilon\nu\tau\varepsilon\lambda\varepsilon\sigma\tau\acute{\varepsilon}\varsigma\ \gamma\iota\alpha\ \tau o\ y}}$$

$$\begin{Bmatrix} -\lambda x+y=1-2\lambda \\ -(x+y)=-1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \underline{\begin{Bmatrix} -\lambda x+y=1-2\lambda \\ -x-y=-1 \end{Bmatrix}}(+)$$

$$\begin{Bmatrix} -\lambda x+\cancel{y}-x-\cancel{y}=\cancel{1}-2\lambda-\cancel{1} \\ y=-x+1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}-(\lambda+1)x=-2\lambda\\ y=-x+1\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}(\lambda+1)x=2\lambda\\ y=-x+1\end{array}\right\}$$

$\acute{E}\sigma\tau\omega\ \lambda+1=0\Leftrightarrow\lambda=-1$

$\Theta\acute{\varepsilon}\tau\omega\ \lambda=-1\ \sigma\tau\eta\nu\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta\ (\lambda+1)x=2\lambda:$

$$(\lambda+1)x=2\lambda\overset{\lambda=-1}{\Longleftrightarrow}0x=-2(\mathrm{A}\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau\eta)$$

$\Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\omega\varsigma\ \lambda+1\neq0\Leftrightarrow\lambda\neq-1$

$$\left\{\begin{array}{l}(\lambda+1)x=2\lambda\\ y=-x+1\\ \lambda\neq-1\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=\dfrac{2\lambda}{\lambda+1}\\ y=-x+1\\ \lambda\neq-1\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=\dfrac{2\lambda}{\lambda+1}\\ y=-\dfrac{2\lambda}{\lambda+1}+\dfrac{\lambda+1}{\lambda+1}\\ \lambda\neq-1\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}x=\dfrac{2\lambda}{\lambda+1}\\ y=\dfrac{1-\lambda}{\lambda+1}\\ \lambda\neq-1\end{array}\right\}$$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon:\boxed{x_2=\dfrac{2\lambda}{\lambda+1},y_2=\dfrac{1-\lambda}{\lambda+1},\lambda\neq-1}$

$$\left\{\begin{array}{l}x_1+x_2=4\\ y_1+y_2=2\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\dfrac{2\lambda}{\lambda-1}+\dfrac{2\lambda}{\lambda+1}=4\\ \dfrac{3\lambda}{\lambda-1}+\dfrac{1-\lambda}{\lambda+1}=2\\ \lambda\neq\pm1\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} (\lambda-1)(\lambda+1)\left(\dfrac{2\lambda}{\lambda-1}+\dfrac{2\lambda}{\lambda+1}\right)=4(\lambda-1)(\lambda+1) \\ (\lambda-1)(\lambda+1)\left(\dfrac{3\lambda}{\lambda-1}+\dfrac{1-\lambda}{\lambda+1}\right)=2(\lambda-1)(\lambda+1) \\ \lambda\neq\pm1 \end{Bmatrix} \overset{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=\alpha^2-\beta^2}{\Leftrightarrow}$$

$$\begin{Bmatrix} \cancel{(\lambda-1)}(\lambda+1)\dfrac{2\lambda}{\cancel{\lambda-1}}+(\lambda-1)\cancel{(\lambda+1)}\dfrac{2\lambda}{\cancel{\lambda+1}}=4(\lambda^2-1) \\ \cancel{(\lambda-1)}(\lambda+1)\dfrac{3\lambda}{\cancel{\lambda-1}}+(\lambda-1)\cancel{(\lambda+1)}\dfrac{1-\lambda}{\cancel{\lambda+1}}=2(\lambda^2-1) \\ \lambda\neq\pm1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} \cancel{2\lambda^2}+2\lambda+\cancel{2\lambda^2}-2\lambda=\cancel{4\lambda^2}-4 \\ 3\lambda^2+3\lambda-(\lambda-1)(\lambda-1)=2\lambda^2-2 \\ \lambda\neq\pm1 \end{Bmatrix} \overset{(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2}{\Leftrightarrow}$$

$$\begin{Bmatrix} 0\lambda=-4(\text{Αδύνατη}) \\ 3\lambda^2+3\lambda-(\lambda-1)^2=2\lambda^2-2 \\ \lambda\neq\pm1 \end{Bmatrix}$$

Θα πρέπει για το ίδιο λ πρέπει να έχουν λύση και οι δυο εξισώσεις!!! *Συνεπώς δεν υπάρχει* $(\varepsilon) \not\parallel y'y$ *που να διέρχεται απο το σημείο* $\mathrm{M}(2,1)$ *και να είναι λύση του προβλήματος.*

6.

Δίνονται τα σημεία $\mathrm{P}\left(\kappa,\dfrac{1}{\kappa}\right)$ *και* $Q\left(\lambda,\dfrac{1}{\lambda}\right)$, $\kappa,\lambda\neq0$ *και* $\kappa\neq\lambda$
(I) *Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας* $\mathrm{P}Q$
(II) *Αν η ευθεία* $\mathrm{P}Q$ *τέμνει τους άξονες* $x'x$ *και* $y'y$ *αντίστοιχα στα σημεία* Α *και* Β *αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι* $\mathrm{AP}=\mathrm{B}Q$

(I)

$\text{Αν AB} \not\parallel y'y\,, \mathrm{A}\left(x_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{A}}\right), \mathrm{B}\left(x_{\mathrm{B}}, y_{\mathrm{B}}\right),$ *τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας* AB *δίνεται απο την σχέση*:

$$\lambda_{\mathrm{AB}}=\frac{y_{\mathrm{B}}-y_{\mathrm{A}}}{x_{\mathrm{B}}-x_{\mathrm{A}}}, x_{\mathrm{A}} \neq x_{\mathrm{B}}$$

$$\lambda_{\mathrm{P}Q}=\frac{y_{\mathrm{P}}-y_{Q}}{x_{\mathrm{P}}-x_{Q}} \underset{Q\left(\lambda, \frac{1}{\lambda}\right)}{\overset{\mathrm{P}\left(\kappa, \frac{1}{\kappa}\right)}{=}} \frac{\frac{1}{\kappa}-\frac{1}{\lambda}}{\kappa-\lambda}=\frac{\frac{\lambda}{\kappa\lambda}-\frac{\kappa}{\kappa\lambda}}{\kappa-\lambda}=\frac{\frac{\lambda-\kappa}{\kappa\lambda}}{\kappa-\lambda}=\frac{\frac{-(\kappa-\lambda)}{\kappa\lambda}}{\kappa-\lambda}=$$

$$=\frac{-\cancel{(\kappa-\lambda)}}{\kappa\lambda\cancel{(\kappa-\lambda)}}=-\frac{1}{\kappa\lambda}$$

$(\varepsilon) \not\parallel y'y$
$\lambda:$ Ο *συντελεστής διευθύνσης της ευθείας*
$\mathrm{A}\left(x_{0}, y_{0}\right) \in(\varepsilon)$
Τ*ότε η ευθεία* (ε) *θα έχει εξίσωση*:
$y-y_{0}=\lambda\left(x-x_{0}\right)$

Η *ευθεία* PQ *θα έχει εξίσωση*:

$$y-y_{\mathrm{P}}=\lambda_{\mathrm{P}Q}\left(x-x_{\mathrm{P}}\right) \underset{\lambda_{\mathrm{P}Q}=-\frac{1}{\kappa\lambda}}{\overset{\mathrm{P}\left(\kappa, \frac{1}{\kappa}\right)}{\Longleftrightarrow}} y-\frac{1}{\kappa}=-\frac{1}{\kappa\lambda}(x-\kappa) \overset{\text{Πολλαολασιάζω και τα δυο μέλη της εξίσωσης με το κλ}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\kappa\lambda\left(y-\frac{1}{\kappa}\right)=\kappa\lambda\left(-\frac{1}{\kappa\lambda}\right)(x-\kappa) \Leftrightarrow \kappa\lambda y-\cancel{\kappa}\lambda\frac{1}{\cancel{\kappa}}=\cancel{\kappa\lambda}\left(-\frac{1}{\cancel{\kappa\lambda}}\right)(x-\kappa)$$

$$\Leftrightarrow \kappa\lambda y-\lambda=-x+\kappa \Leftrightarrow x+\kappa\lambda y=\kappa+\lambda$$

$$\mathrm{P}Q: x+\kappa\lambda y=\kappa+\lambda$$

$$(\mathrm{II})\,\mathrm{A}(x,y)\in \mathrm{P}Q\cap x'x \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}\mathrm{A}(x,y)\in \mathrm{P}Q\\ \mathrm{A}(x,y)\in x'x\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}x+\kappa\lambda y=\kappa+\lambda\\ y=0\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix}x+\kappa\lambda\bullet 0=\kappa+\lambda\\ y=0\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}x=\kappa+\lambda\\ y=0\end{matrix}\right\}$$

$$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon: \boxed{\mathrm{A}(\kappa+\lambda,0)}$$

$$\mathrm{B}(x,y)\in \mathrm{P}Q\cap y'y \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}\mathrm{B}(x,y)\in \mathrm{P}Q\\ \mathrm{B}(x,y)\in y'y\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}x+\kappa\lambda y=\kappa+\lambda\\ x=0\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix}0+\kappa\lambda y=\kappa+\lambda\\ x=0\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}\kappa\lambda y=\kappa+\lambda\\ x=0\end{matrix}\right\} \overset{\kappa,\lambda\neq 0\Rightarrow \kappa\lambda\neq 0}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{matrix}y=\dfrac{\kappa+\lambda}{\kappa\lambda}\\ x=0\end{matrix}\right\}$$

$$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon: \boxed{\mathrm{B}\left(0,\frac{\kappa+\lambda}{\kappa\lambda}\right)}$$

$$\boxed{\mathrm{AB}=\sqrt{\left(x_{\mathrm{B}}-x_{\mathrm{A}}\right)^2+\left(y_{\mathrm{B}}-y_{\mathrm{A}}\right)^2},\ \mathrm{A}\left(x_{\mathrm{A}},y_{\mathrm{A}}\right),\mathrm{B}\left(x_{\mathrm{B}},y_{\mathrm{B}}\right)}$$

$$\mathrm{AP}=\sqrt{\left(x_{\mathrm{P}}-x_{\mathrm{A}}\right)^2+\left(y_{\mathrm{P}}-y_{\mathrm{A}}\right)^2} \underset{\mathrm{A}(\kappa+\lambda,0)}{\overset{\mathrm{P}\left(\kappa,\frac{1}{\kappa}\right)}{=}} \sqrt{\left[\kappa-(\kappa+\lambda)\right]^2+\left(\frac{1}{\kappa}-0\right)^2}=$$

$$=\sqrt{(\kappa-\kappa-\lambda)^2+\frac{1}{\kappa^2}}=\sqrt{(-\lambda)^2+\frac{1}{\kappa^2}}=\sqrt{\lambda^2+\frac{1}{\kappa^2}}$$

$$\mathrm{B}Q=\sqrt{\left(x_Q-x_{\mathrm{B}}\right)^2+\left(y_Q-y_{\mathrm{B}}\right)^2} \underset{\mathrm{B}\left(0,\frac{\kappa+\lambda}{\kappa\lambda}\right)}{\overset{Q\left(\lambda,\frac{1}{\lambda}\right)}{=}} \sqrt{(\lambda-0)^2+\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{\kappa+\lambda}{\kappa\lambda}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\lambda^2+\left(\frac{\kappa}{\kappa\lambda}-\frac{\kappa+\lambda}{\kappa\lambda}\right)^2}=\sqrt{\lambda^2+\frac{1}{\kappa^2}}=\sqrt{\lambda^2+\left[\frac{\kappa-(\kappa+\lambda)}{\kappa\lambda}\right]^2}=$$

$$=\sqrt{\lambda^2+\left(\frac{\kappa-\kappa-\lambda}{\kappa\lambda}\right)^2}=\sqrt{\lambda^2+\left(\frac{-\cancel{\lambda}}{\kappa\cancel{\lambda}}\right)^2}=\sqrt{\lambda^2+\left(-\frac{1}{\kappa}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\lambda^2+\left(\frac{1}{\kappa}\right)^2}=\sqrt{\lambda^2+\frac{1}{\kappa^2}}$$

$\mathrm{O}\pi ó\tau\varepsilon: \mathrm{AP}=\mathrm{B}Q$

7.

$\mathrm{N}\alpha$ *δείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας που τέμνει τους άξονες στα σημεία* $\mathrm{A}(\alpha,0)$ *και* $\mathrm{B}(0,\beta)$, *με* $\alpha,\beta\neq 0$, *είναι η* $\dfrac{x}{\alpha}+\dfrac{y}{\beta}=1$

$\mathrm{A}\nu$ $\mathrm{AB}\nparallel y'y$, $\mathrm{A}(x_{\mathrm{A}},y_{\mathrm{A}}),\mathrm{B}(x_{\mathrm{B}},y_{\mathrm{B}})$, *τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας* AB *δίνεται απο την σχέση*: $\lambda_{\mathrm{AB}}=\dfrac{y_{\mathrm{B}}-y_{\mathrm{A}}}{x_{\mathrm{B}}-x_{\mathrm{A}}}, x_{\mathrm{A}}\neq x_{\mathrm{B}}$

O *συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας* AB *δίνεται απο την σχέση*:

$$\lambda_{\mathrm{AB}}=\frac{y_{\mathrm{B}}-y_{\mathrm{A}}}{x_{\mathrm{B}}-x_{\mathrm{A}}}\underset{\mathrm{A}(\alpha,0)}{\overset{\mathrm{B}(0,\beta)}{=}}\frac{\beta-0}{0-\alpha}=-\frac{\beta}{\alpha}$$

$(\varepsilon)\nparallel y'y$ λ: O *συντελεστής διευθύνσης της ευθείας* $\mathrm{A}(x_0,y_0)\in(\varepsilon)$ Τ*ότε η ευθεία* (ε) *θα έχει εξίσωση*: $y-y_0=\lambda(x-x_0)$

H *ευθεία* AB *θα έχει εξίσωση*:

$$y-y_{\mathrm{A}}=\lambda_{\mathrm{AB}}(x-x_{\mathrm{A}})\overset{\substack{\lambda_{\mathrm{AB}}=-\frac{\beta}{\alpha}\\ x_{\mathrm{A}}=\alpha,y_{\mathrm{A}}=0}}{\Longleftrightarrow} y-0=-\frac{\beta}{\alpha}(x-\alpha)\Leftrightarrow y=-\frac{\beta}{\alpha}(x-\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \alpha y=-\beta(x-\alpha)\Leftrightarrow \alpha y=-\beta x+\alpha\beta\Leftrightarrow \beta x+\alpha y=\alpha\beta$$

$\underline{\Delta\iota\alpha\iota\rho\acute{\omega}\ \kappa\alpha\iota\ \tau\alpha\ \delta\upsilon o\ \mu\acute{\varepsilon}\lambda\eta\ \tau\eta\varsigma\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta\varsigma\ \beta x+\alpha y=\alpha\beta\ \mu\varepsilon\ \tau o\ \alpha\beta}$

$\underline{\acute{\varepsilon}\tau\sigma\iota\ \acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon\ \sigma\tau o\ \delta\varepsilon\acute{\upsilon}\tau\varepsilon\rho o\ \mu\acute{\varepsilon}\lambda o\varsigma\ \nu\alpha\ \varepsilon\mu\varphi\alpha\nu\iota\sigma\tau\varepsilon\acute{\iota}\ \frac{\alpha\beta}{\alpha\beta}=1\ \kappa\alpha\iota\ \sigma\tau o}$

$\underline{\pi\rho\acute{\omega}\tau o\ \nu\alpha\ \varepsilon\mu\varphi\alpha\nu\iota\sigma\tau o\acute{\upsilon}\nu\ \mu\acute{\varepsilon}\lambda o\varsigma\ o\iota\pi\alpha\rho\alpha\sigma\tau\acute{\alpha}\sigma\varepsilon\iota\varsigma\ \frac{\cancel{\beta}x}{\alpha\cancel{\beta}}=\frac{x}{\alpha}}$

$\underline{\kappa\alpha\iota\ \frac{\cancel{\alpha}y}{\cancel{\alpha}\beta}=\frac{y}{\beta}}$

$$\beta x+\alpha y=\alpha\beta \overset{\substack{\alpha,\beta\neq 0\Rightarrow\alpha\beta\neq 0\\ \Delta\iota\alpha\iota\rho\acute{\omega}\ \kappa\alpha\iota\ \tau\alpha\ \delta\upsilon o\\ \mu\acute{\varepsilon}\lambda\eta\ \tau\eta\varsigma\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta\varsigma\ \mu\varepsilon\\ \tau o\ \alpha\beta}}{\Leftrightarrow} \frac{\beta x+\alpha y}{\alpha\beta}=\frac{\alpha\beta}{\alpha\beta}\Leftrightarrow\frac{\beta x}{\alpha\beta}+\frac{\alpha y}{\alpha\beta}=1$$

$$\Leftrightarrow\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1$$

ΠΡΟΣΟΧΗ!!!

Όταν γνωρίζω τα σημεία τομής μιας ευθείας (ε) *με τους άξονες* $x'x$ *και* $y'y$ *τότε η ευθεία* (ε) *θα έχει εξίσωση:*

$$\frac{x}{\boxed{\text{Τετμημένη του σημείου τομής της } (\varepsilon) \text{ με τον άξονα } x'x}}+\frac{y}{\boxed{\text{Τεταγμένη του σημείου τομής της } (\varepsilon) \text{ με τον άξονα } y'y}}=1$$

<u>Η *τετμημένη του σημείου τομής της* (ε) *με τον άξονα* $x'x$ *καλείται τετμημένη επι την αρχή*</u>

<u>Η *τεταγμένη του σημείου τομής της* (ε) *με τον άξονα* $y'y$ *καλείται τεταγμένη επι την αρχή*</u>

8.

$\text{Ν}\alpha$ *βρείτε την εξίσωση της ευθείας που είναι παράλληλη στην ευθεία* $y=-\frac{2}{3}x-\frac{11}{3}$ *και τέμνει τους άξονες* $x'x$ *και* $y'y$ *αντίστοιχα στα σημεία* Α *και* Β *έτσι ώστε το άθροισμα της τετμημένης και του* Α *και της τεταγμένης του* Β *να είναι ίσο με* 15.

$(\varepsilon): y=\lambda x+\mu$

Αν $(\eta)//(\varepsilon)$ *τότε η εξίσωση της ευθείας* (η) *θα έχει την μορφή* $(\eta): y=\lambda x+\kappa$

$(\varepsilon): y=-\frac{2}{3}x-\frac{11}{3}$

Αν $(\eta)//(\varepsilon)$ *τότε η εξίσωση της ευθείας* (η) *θα έχει την*

μορφή $(\eta): y=-\frac{2}{3}x+\kappa$

$$y=-\frac{2}{3}x+\kappa \Leftrightarrow 3y=3\left(-\frac{2}{3}x+\kappa\right) \Leftrightarrow 3y=-\cancel{3}\frac{2}{\cancel{3}}x+3\kappa \Leftrightarrow$$

$$2x+3y=3\kappa$$

Οπότε: $\boxed{(\eta): 2x+3y=3\kappa}$

$$\text{A}(x,y)\in(\eta)\cap x'x \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{A}(x,y)\in(\eta)\\ \text{A}(x,y)\in x'x\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}2x+3y=3\kappa\\ y=0\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$.\left\{\begin{matrix}2x+3\bullet 0=3\kappa\\ y=0\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}2x=3\kappa\\ y=0\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}x=\frac{3\kappa}{2}\\ y=0\end{matrix}\right\}$$

Οπότε: $\boxed{\text{A}\left(\frac{3\kappa}{2},0\right)}$

$$\mathrm{B}(x,y)\in(\eta)\cap y'y \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \mathrm{B}(x,y)\in(\eta) \\ \mathrm{B}(x,y)\in y'y \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 2x+3y=3\kappa \\ x=0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} 2\bullet 0+3y=3\kappa \\ x=0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \cancel{3}y=\cancel{3}\kappa \\ x=0 \end{Bmatrix} \overset{\substack{\text{Αν } \alpha\neq 0 \text{ τότε ισχέι η} \\ \text{ισοδυναμία:} \\ \alpha x=\alpha y\Leftrightarrow x=y}}{\Longleftrightarrow} \begin{Bmatrix} y=\kappa \\ x=0 \end{Bmatrix}$$

$$\text{Οπότε}: \boxed{\mathrm{B}(0,\kappa)}$$

$$\text{Έχω}: x_{\mathrm{A}}+y_{\mathrm{B}}=15 \overset{\substack{x_{\mathrm{A}}=\frac{3\kappa}{2} \\ y_{\mathrm{B}}=\kappa}}{\Longleftrightarrow} \frac{3\kappa}{2}+\kappa=15 \overset{\substack{\text{Πολλαπλασιάζω} \\ \text{και τα δυο μέλη} \\ \text{με το 2}}}{\Longleftrightarrow} 2\left(\frac{3\kappa}{2}+\kappa\right)=2\bullet 15$$

$$\Leftrightarrow \cancel{2}\frac{3\kappa}{\cancel{2}}+2\kappa=30 \Leftrightarrow 5\kappa=30 \overset{30=5\bullet 3}{\Longleftrightarrow} \cancel{5}\kappa=\cancel{5}\bullet 3 \overset{\substack{\text{Αν } \alpha\neq 0 \text{ τότε ισχέι η} \\ \text{ισοδυναμία:} \\ \alpha x=\alpha y\Leftrightarrow x=y}}{\Longleftrightarrow} \kappa=3$$

Οπότε η ευθεία (ε) θα έχει εξίσωση:

$$y=-\frac{2}{3}x+\kappa \overset{\kappa=3}{\Longleftrightarrow} y=-\frac{2}{3}x+3$$

$$(\eta): y=-\frac{2}{3}x+3$$