# ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ

1.

Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματική τιμή του $\mu$ η εξίσωση $(\mu-1)x+\mu y+\mu^2=0$ παριστάνει ευθεία γραμμή. Πότε η ευθεία αυτή είναι παράλληλη με τον άξονα $x'x$, πότε προς τον άξονα $y'y$;

Η εξίσωση $\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0$ εκφράζει ευθεία όταν τα $\mathrm{A},\mathrm{B}$ δεν είναι ταυτόχρονα μηδέν

Έστω η εξίσωση $(\mu-1)x+\mu y+\mu^2=0$ δεν παριστάνει ευθεία τότε οι συντελεστές των $x$ και $y$ θα πρέπει να είναι ταυτόχρονα μηδέν. Άρα θα έχω:

$$\begin{Bmatrix} \mu-1=0 \\ \mu^2=0 \end{Bmatrix}$$

Θα πρέπει το ίδιο $\mu$ να ικανοποιεί τις συνθήκες $\mu-1=\mu^2=0$

$$\begin{Bmatrix} \mu-1=0 \\ \mu^2=0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \mu=1 \\ \mu=0 \end{Bmatrix} (\text{Άτοπο})$$

Συνεπώς η εξίσωση $(\mu-1)x+\mu y+\mu^2=0$ για κάθε τιμή της παραμέτρου $\lambda\in\mathbb{R}$ παριστάνει πάντα ευθεία.

Έστω $(\varepsilon):\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0$ με $|\mathrm{A}|+|\mathrm{B}|\neq 0$

$(\varepsilon)//x'x \Leftrightarrow \mathrm{A}=0,\mathrm{B}\neq 0$

Η εξίσωση $(\mu-1)x+\mu y+\mu^2=0$ παριστάνει ευθεία παράλληλη με τον άξονα $x'x$ όταν ο συντελεστής του $x$ είναι μηδέν και ο συντελεστής $y$ είναι μη μηδενικός αριθμός. Οπότε θα πρέπει να ισχύει:

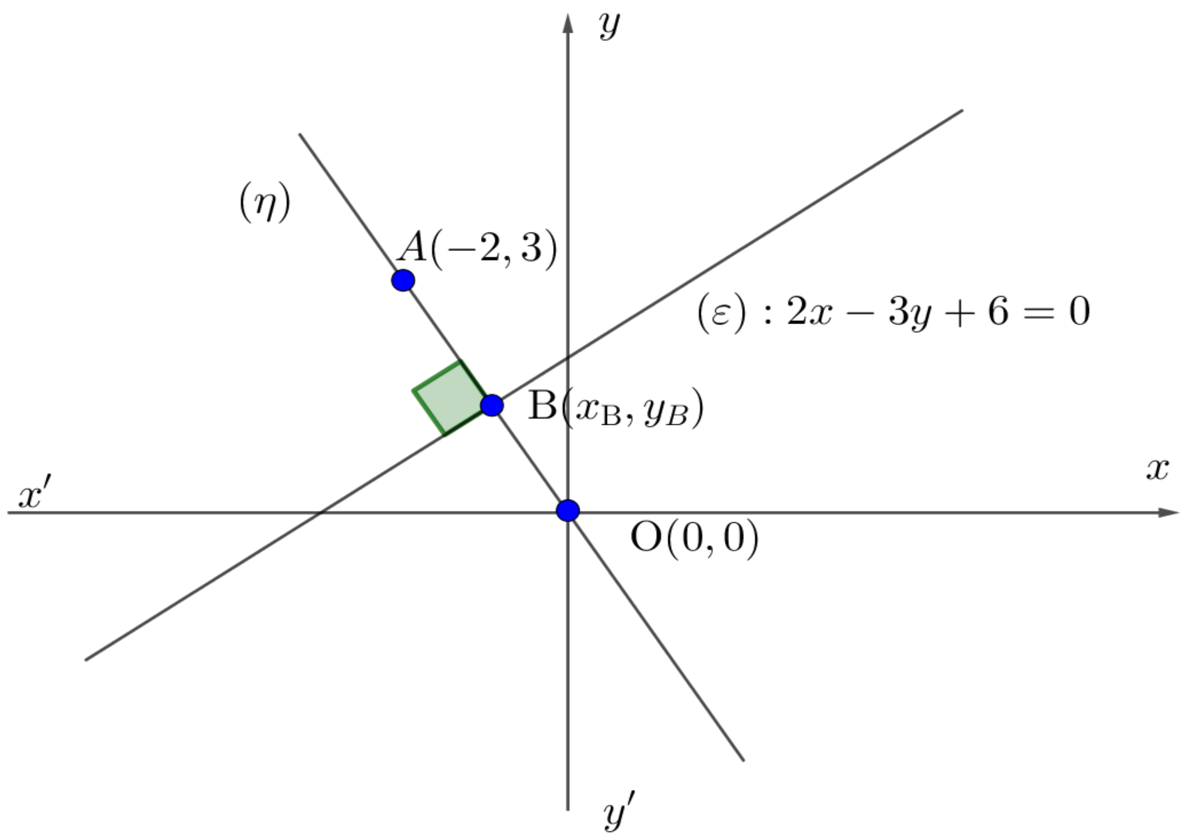
$$\begin{Bmatrix} \mu-1\neq 0 \\ \mu^2=0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \mu\neq 1 \\ \mu=0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \mu=0$$

Η $\textit{εξίσωση}\ (\mu-1)x+\mu y+\mu^2=0$ *παριστάνει ευθεία παράλληλη με τον άξονα* $y'y$ *όταν* <u>*ο συντελεστής του* $y$ *είναι μηδέν και ο συντελεστής* $x$ *είναι μη μηδενικός αριθμός*</u>. Ο*πότε θα πρέπει να ισχύει*:

$$\begin{cases}\mu-1=0\\ \mu^2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\mu=1\\ \mu\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow \mu=1$$

2.

| |
|---|
| Ν*α βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται απο το σημείο* Α$(-2,3)$ *και είναι κάθετη στην ευθεία* $(\varepsilon): 2x-3y+6=0$ |



$\text{Αν } (\varepsilon): \mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0 \text{ με } \mathrm{B}\neq 0 \text{ τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της } (\varepsilon) \text{ δίνεται απο την σχέση } \lambda=-\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$

$$(\varepsilon): 2x-3y+6=0$$

$$\lambda_\varepsilon=-\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=-\frac{2}{-3}=\frac{2}{3}$$

$\text{Αν } (\varepsilon_1),(\varepsilon_2) \not\parallel y'y \text{ με}$

$\lambda_{\varepsilon_1}: \text{Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας } (\varepsilon_1)$

$\lambda_{\varepsilon_2}: \text{Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας } (\varepsilon_2)$

$\text{Τότε ισχύει η ισοδυναμία}:$

$\lambda_{\varepsilon_1}\lambda_{\varepsilon_2}=-1 \Leftrightarrow (\varepsilon_1)\perp(\varepsilon_2)$

$\text{Αν } (\eta) \text{ η ευθεία που διέρχεται απο το σημείο } \mathrm{A}(-2,3) \text{ με } (\eta)\perp(\varepsilon). \text{ Τότε θα έχω}:$

$$\lambda_\varepsilon\lambda_\eta=-1 \overset{\lambda_\varepsilon=\frac{2}{3}}{\Longleftrightarrow} \frac{2}{3}\lambda_\eta=-1 \Leftrightarrow \frac{2\lambda_\eta}{3}=-1 \Leftrightarrow 2\lambda_\eta=-3 \Leftrightarrow \lambda_\eta=-\frac{3}{2}$$

$(\varepsilon) \not\parallel y'y$

$\lambda: \text{Ο συντελεστής διευθύνσης της ευθείας}$

$\mathrm{A}(x_0,y_0)\in(\varepsilon)$

$\text{Τότε η ευθεία } (\varepsilon) \text{ θα έχει εξίσωση}:$

$y-y_0=\lambda(x-x_0)$

$\text{Η ευθεία } (\eta) \text{ θα έχει εξίσωση}:$

$$y-y_\mathrm{A}=\lambda_\eta(x-x_\mathrm{A}) \overset{\substack{\lambda_\eta=-\frac{3}{2} \\ x_\mathrm{A}=-2,\,y_\mathrm{A}=3}}{\Longleftrightarrow} y-3=-\frac{3}{2}\left[x-(-2)\right] \Leftrightarrow$$

$$2(y-3)=-3(x+2) \Leftrightarrow 2y\cancel{-6}=-3x\cancel{-6} \Leftrightarrow 3x+2y=0$$

$$(\eta): 3x+2y=0$$

$$\mathrm{B}(x,y)\in(\varepsilon)\cap(\eta)\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\mathrm{B}(x,y)\in(\varepsilon)\\ \mathrm{B}(x,y)\in(\eta)\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}2x-3y+6=0\\ 3x+2y=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix}2x-3y=-6\\ 3x+2y=0\end{matrix}\right\}$$

<u>Πολλαπλασιάζω την εξίσωση $2x-3y=-6$ με το $2$ και την με το $3$ έτσι ώστε να προκύψουν αντίθετοι συντελεστές για το y</u>

$$\left\{\begin{matrix}2x-3y=-6\\ 3x+2y=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}2(2x-3y)=2(-6)\\ 3(3x+2y)=3\cdot 0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}2\cdot 2x+2(-3y)=-12\\ 3\cdot 3x+3\cdot 2y=0\end{matrix}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}4x-6y=-12\\ 9x+6y=0\end{matrix}\right\}$$

<u>Προσθέτω κατά μέλη τις σχέσεις $4x-6y=-12$ και $9x+6y=0$ τότε τα y θα απλοποιηθούν και θα προκύψει μια εξίσωση με μια μεταβλητή το x!!!. Επειδή όμως έχω ένα σύστημα δυο εξισώσεων με δυο μεταβλητές και θα πρέπει να οδηγηθώ σε ένα ισοδύναμο σύστημα με δυο εξισώσεις και δυο μεταβλητές θα επιλέξω ως δεύτερη εξίσωση μια οποιαδήποτε εξίσωση του συστήματος. Οπότε επιλέγω ως δεύτερη εξίσωση την $3x+2y=0$ γιατί είναι η ποιο απλή εξίσωση του συστήματος</u>

$$\underline{\left\{\begin{matrix}4x-6y=-12\\ 9x+6y=0\end{matrix}\right\}}(+)$$

$$\left\{\begin{matrix}4x-\cancel{6y}+9x+\cancel{6y}=-12+0\\ 3x+2y=0\end{matrix}\right\}\overset{\substack{\text{Απο την πρώτη εξίσωση θα}\\ \text{βρώ την τιμή του x.Λύνω την}\\ \text{δεύτερη εξίσωση ως προς}\\ \text{y για να βρώ ποιο "εύκολα"}\\ \text{την τιμή του y}}}{\Longleftrightarrow}\left\{\begin{matrix}13x=-12\\ 2y=-3x\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=-\dfrac{12}{13} \\ y=-\dfrac{3x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{12}{13} \\ y=-\dfrac{3}{\cancel{2}_{1}}\left(-\dfrac{\cancel{12}^{6}}{13}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{12}{13} \\ y=3\bullet\dfrac{6}{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{12}{13} \\ y=\dfrac{18}{13} \end{cases}$$

$$\text{Οπότε}: \boxed{\mathrm{B}\left(-\dfrac{12}{13},\dfrac{18}{13}\right)}$$

3.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται απο το} \\ \text{σημείο τομής των ευθειών } 2x-5y+3=0 \text{ και } x-3y-7=0 \\ \text{και είναι κάθετη στην ευθεία } 4x+y=1 \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Όλες οι ευθείες } (\varepsilon) \text{ που διέρχονται απο το σημείο τομής} \\ \text{των ευθειών } (\varepsilon_1),(\varepsilon_2) \text{ με εξαίρεση την ευθεία } (\varepsilon_2) \text{ θα} \\ \text{έχουν την μορφή } (\varepsilon)=(\varepsilon_1)+\lambda(\varepsilon_2) \end{array}}$$

$(\varepsilon_1): 2x-5y+3=0$

$(\varepsilon_2): x-3y-7=0$

$(\varepsilon_3): 4x+y-1=0$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Αν } (\varepsilon): \mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0 \text{ με } \mathrm{B}\neq 0 \text{ τότε ο συντελεστής} \\ \text{διεύθυνσης της } (\varepsilon) \text{ δίνεται απο την σχέση } \lambda=-\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} \end{array}}$$

$$\lambda_{\varepsilon_2}=-\frac{\mathrm{A}_2}{\mathrm{B}_2}=-\frac{1}{-3}=\frac{1}{3}$$

$$\lambda_{\varepsilon_3}=-\frac{\mathrm{A}_3}{\mathrm{B}_3}=-\frac{4}{1}=-4$$

$$\text{Έχω}: \lambda_{\varepsilon_2}\lambda_{\varepsilon_3}=\frac{1}{3}(-4)=-\frac{4}{3}\neq -1$$

Οπότε η ευθεία $(\varepsilon_2)$ δεν είναι κάθετη στην $(\varepsilon_3)$. Συνεπώς δεν είναι λύση του προβλήματος. Όλες οι ευθείες $(\varepsilon)$ που διέρχονται απο το σημείο τομής των ευθειών $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ με εξαίρεση την ευθεία $(\varepsilon_2)$ θα έχουν την μορφή

$$(\varepsilon)=(\varepsilon_1)+\lambda(\varepsilon_2)$$

$$2x-5y+3+\lambda(x-3y-7)=0 \Leftrightarrow 2x-5y+3+\lambda x-3\lambda y-7\lambda=0$$

$$\Leftrightarrow (2+\lambda)x-(5+3\lambda)y+3-7\lambda=0$$

Έστω η εξίσωση $(2+\lambda)x-(5+3\lambda)y+3-7\lambda=0$ δεν παριστάνει ευθεία τότε <u>οι συντελεστές των x και y θα πρέπει να είναι ταυτόχρονα μηδέν</u>. Άρα θα έχω:

$$\left.\begin{cases}2+\lambda=0\\-(5+3\lambda)=0\end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases}\lambda+2=0\\3\lambda+5=0\end{cases}\right\}$$

Θα πρέπει το ίδιο $\lambda$ να ικανοποιεί τις συνθήκες $\lambda+2=3\lambda+5=0$

$$\left.\begin{cases}\lambda+2=0\\3\lambda+5=0\end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases}\lambda=-2\\3\lambda=-5\end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases}\lambda=-2\\\lambda=-\dfrac{5}{3}\end{cases}\right\}(\text{Άτοπο})$$

Άρα έχω την ευθεία $(\varepsilon):(2+\lambda)x-(5+3\lambda)y+3-7\lambda=0$

Έστω $-(5+3\lambda)$. Τότε $2+\lambda\neq 0$ γιατί οι παραστάσεις $2+\lambda,-(5+3\lambda)$ δεν είναι ταυτόχρονα μηδέν.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Έστω } (\varepsilon): \mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0 \text{ με } |\mathrm{A}|+|\mathrm{B}|\neq 0\\(\varepsilon)//y'y \Leftrightarrow \mathrm{A}\neq 0, \mathrm{B}=0\end{array}}$$

Η εξίσωση $(2+\lambda)x-(5+3\lambda)y+3-7\lambda=0$ παριστάνει ευθεία παράλληλη με τον άξονα $y'y$ όταν <u>ο συντελεστής του y είναι μηδέν και ο συντελεστής x είναι μη μηδενικός αριθμός</u>.

Οπότε θα έχω $(\varepsilon)//y'y$.

$$\left.\begin{cases}(\varepsilon)//y'y\\(\varepsilon)\perp(\varepsilon_3)\end{cases}\right\}\Rightarrow y'y\perp(\varepsilon_3)(\acute{A}\tau o\pi o)$$

$$\acute{A}\rho\alpha:-(5+3\lambda)\neq 0\Leftrightarrow 5+3\lambda\neq 0\Leftrightarrow 3\lambda\neq -5\Leftrightarrow \lambda\neq -\frac{5}{3}$$

$$(\varepsilon):(2+\lambda)x-(5+3\lambda)y+3-7\lambda=0$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathrm{A}\nu\ (\varepsilon):\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0\ \mu\varepsilon\ \mathrm{B}\neq 0\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ o\ \sigma\upsilon\nu\tau\varepsilon\lambda\varepsilon\sigma\tau\acute{\eta}\varsigma\\ \delta\iota\varepsilon\acute{\upsilon}\theta\upsilon\nu\sigma\eta\varsigma\ \tau\eta\varsigma\ (\varepsilon)\ \delta\acute{\iota}\nu\varepsilon\tau\alpha\iota\ \alpha\pi o\ \tau\eta\nu\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\eta\ \lambda=-\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}\end{array}}$$

$$\lambda_\varepsilon=-\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=-\frac{2+\lambda}{-(5+3\lambda)}=\frac{2+\lambda}{5+3\lambda},\lambda\neq-\frac{5}{3}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathrm{A}\nu\ (\varepsilon_1),(\varepsilon_2)\not\parallel y'y\ \mu\varepsilon\\ \lambda_{\varepsilon_1}:\mathrm{O}\ \sigma\upsilon\nu\tau\varepsilon\lambda\varepsilon\sigma\tau\acute{\eta}\varsigma\ \delta\iota\varepsilon\acute{\upsilon}\theta\upsilon\nu\sigma\eta\varsigma\ \tau\eta\varsigma\ \varepsilon\upsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\alpha\varsigma\ (\varepsilon_1)\\ \lambda_{\varepsilon_2}:\mathrm{O}\ \sigma\upsilon\nu\tau\varepsilon\lambda\varepsilon\sigma\tau\acute{\eta}\varsigma\ \delta\iota\varepsilon\acute{\upsilon}\theta\upsilon\nu\sigma\eta\varsigma\ \tau\eta\varsigma\ \varepsilon\upsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\alpha\varsigma\ (\varepsilon_2)\\ \mathrm{T}\acute{o}\tau\varepsilon\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\ \eta\ \iota\sigma o\delta\upsilon\nu\alpha\mu\acute{\iota}\alpha:\\ \lambda_{\varepsilon_1}\lambda_{\varepsilon_2}=-1\Leftrightarrow(\varepsilon_1)\perp(\varepsilon_2)\end{array}}$$

$$(\varepsilon)\perp(\varepsilon_3)\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}\lambda_\varepsilon\lambda_{\varepsilon_3}=-1\\ \lambda\neq-\dfrac{5}{3}\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}\dfrac{2+\lambda}{5+3\lambda}(-4)=-1\\ \lambda\neq-\dfrac{5}{3}\end{Bmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}-\dfrac{4(2+\lambda)}{5+3\lambda}=-1\\ \lambda\neq-\dfrac{5}{3}\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}\dfrac{8+4\lambda}{5+3\lambda}=1\\ \lambda\neq-\dfrac{5}{3}\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}8+4\lambda=5+3\lambda\\ \lambda\neq-\dfrac{5}{3}\end{Bmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}4\lambda-3\lambda=5-8\\ \lambda\neq-\dfrac{5}{3}\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}\lambda=-3\\ \lambda\neq-\dfrac{5}{3}\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\lambda=-3$$

$Τότε\ η\ ευθεία\ (\varepsilon)\ θα\ έχει\ εξίσωση:$

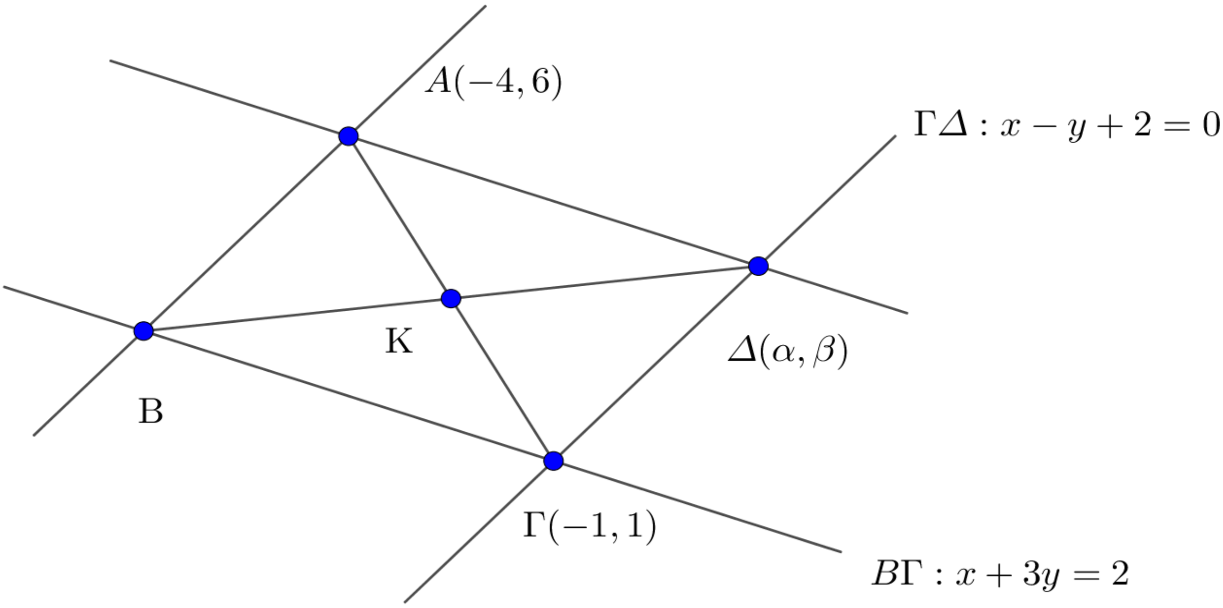
$$(2+\lambda)x-(5+3\lambda)y+3-7\lambda=0 \overset{\lambda=-3}{\Leftrightarrow}$$

$$(2-3)x-\left[5+3(-3)\right]y+3-7(-3)=0 \Leftrightarrow$$

$$-x-(-4)y+3+21=0 \Leftrightarrow -x+4y+24=0$$

4.

| |
|---|
| Τα σημεία $Α(-4,6)$ και $Γ(-1,1)$ είναι οι απέναντι κορυφές παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Οι πλευρές ΒΓ και ΓΔ του παραλληλογράμου ανήκουν στις ευθείες με εξισώσεις $x+3y=2$ και $x-y+2=0$ αντιστοίχως. Να υπολογίσετε: |
| (Ι) Τις συντεταγμένες της κορυφής Δ. |
| (ΙΙ) Το συνημίτονο της οξείας γωνίας των διαγωνίων του παραλληλογράμμου. |




(Ι)

$ΒΓ: x+3y-2=0$

$ΓΔ: x-y+2=0$

Επειδή $Δ(\alpha,\beta)\in ΓΔ$ θα έχω:

$$x_\Delta - y_\Delta + 2 = 0 \overset{\substack{x_\Delta=\alpha \\ y_\Delta=\beta}}{\Longleftrightarrow} \alpha - \beta = -2 \quad (1)$$

$$\boxed{\text{Αν } \mathrm{A}(x_\mathrm{A}, y_\mathrm{A}), \mathrm{B}(x_\mathrm{B}, y_\mathrm{B}) \text{ τότε } \overrightarrow{\mathrm{AB}} = (x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A}, y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A})}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{A}\Delta} \underset{\mathrm{A}(-4,6)}{\overset{\Delta(\alpha,\beta)}{=}} (\alpha - (-4), \beta - 6) = (\alpha + 4, \beta - 6)$$

$\underline{\textit{Έστω } \alpha + 4 = 0.}$ Τότε $\overrightarrow{\mathrm{A}\Delta} // y'y$. Οπότε θα έχω:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{\mathrm{A}\Delta} // y'y \\ \overrightarrow{\mathrm{A}\Delta} // \mathrm{B}\Gamma \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{B}\Gamma // y'y \ (\textit{Άτοπο})$$

Συνεπώς: $\alpha + 4 \neq 0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha \neq -4} \ (2)$

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{\alpha} = (x, y) \text{ με } x \neq 0 \text{ τότε θα έχω } \lambda_{\vec{\alpha}} = \dfrac{y}{x} \\ \lambda_{\vec{\alpha}} : \text{Ο συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος } \vec{\alpha} \end{array}}$$

$$\lambda_{\overrightarrow{\mathrm{A}\Delta}} = \frac{y_{\overrightarrow{\mathrm{A}\Delta}}}{x_{\overrightarrow{\mathrm{A}\Delta}}} \overset{\substack{x_{\overrightarrow{\mathrm{A}\Delta}} = a+4 \\ y_{\overrightarrow{\mathrm{A}\Delta}} = \beta-6}}{=} \frac{\beta - 6}{a + 4}$$

$\mathrm{B}\Gamma : x + 3y - 2 = 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Αν } (\varepsilon): \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma = 0 \text{ με } \mathrm{B} \neq 0 \text{ τότε ο συντελεστής} \\ \text{διεύθυνσης της } (\varepsilon) \text{ δίνεται απο την σχέση } \lambda = -\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} \end{array}}$$

$$\lambda_{\mathrm{B}\Gamma} = -\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = -\frac{1}{3}$$

Επειδή $\overrightarrow{\mathrm{A}\Delta} // \mathrm{B}\Gamma$ θα έχω:

$$\lambda_{\overrightarrow{\mathrm{A}\Delta}} = \lambda_{\mathrm{B}\Gamma} \Leftrightarrow \frac{\beta - 6}{a + 4} = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow 3(\beta - 6) = -(a + 4) \Leftrightarrow$$

$$3\beta - 18 = -a - 4 \Leftrightarrow a + 3\beta = 18 - 4 \Leftrightarrow \boxed{a + 3\beta = 14} \ (3)$$

$\mathrm{A}\pi o\ \tau\iota\varsigma\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\varepsilon\iota\varsigma\ (1),(2),(3)\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ \tau o\ \sigma\acute{\upsilon}\sigma\tau\eta\mu\alpha:$

$$\begin{cases} \alpha-\beta=-2 \\ a+3\beta=14 \\ \alpha\neq-4 \end{cases} \xLeftrightarrow{\substack{\Gamma\iota\alpha\ \nu\alpha\ \delta\eta\mu\iota o\upsilon\rho\gamma\eta\theta o\acute{\upsilon}\nu\ \alpha\nu\tau\acute{\iota}\theta\varepsilon\tau o\iota \\ \sigma\upsilon\nu\tau\varepsilon\lambda\varepsilon\sigma\tau\acute{\varepsilon}\varsigma\ \gamma\iota\alpha\ \tau\eta\nu\ \mu\varepsilon\tau\alpha\beta\lambda\eta\tau\acute{\eta} \\ \alpha\ \pi o\lambda\lambda\alpha\pi\lambda\alpha\sigma\iota\acute{\alpha}\zeta\omega\ \tau\eta\nu\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta \\ \alpha-\beta=-2\ \mu\varepsilon\ \tau o\ -1!!! \\ \Gamma\nu\omega\rho\acute{\iota}\zeta\omega\ \acute{o}\tau\iota\ (-1)\mathrm{A}=-\mathrm{A}}} \begin{cases} -(\alpha-\beta)=-(-2) \\ a+3\beta=14 \\ \alpha\neq-4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -\alpha+\beta=2 \\ a+3\beta=14 \\ \alpha\neq-4 \end{cases}$$

<u>$\Pi\rho o\sigma\theta\acute{\varepsilon}\tau\omega\ \kappa\alpha\tau\acute{\alpha}\ \mu\acute{\varepsilon}\lambda\eta\ \tau\iota\varsigma\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\varepsilon\iota\varsigma\ -\alpha+\beta=2\ \kappa\alpha\iota\ a+3\beta=14$ $\tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \tau o\ \alpha\ \theta\alpha\ \alpha\pi\lambda o\pi o\iota\eta\theta o\acute{\upsilon}\nu\ \kappa\alpha\iota\ \theta\alpha\ \pi\rho o\kappa\acute{\upsilon}\psi\varepsilon\iota\ \mu\iota\alpha\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta\ \mu\varepsilon$ $\mu\iota\alpha\ \mu\varepsilon\tau\alpha\beta\lambda\eta\tau\acute{\eta}\ \tau o\ \beta!!!.\ \mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \acute{o}\mu\omega\varsigma\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ \acute{\varepsilon}\nu\alpha\ \sigma\acute{\upsilon}\sigma\tau\eta\mu\alpha\ \delta\upsilon o$ $\varepsilon\xi\iota\sigma\acute{\omega}\sigma\varepsilon\omega\nu\ \mu\varepsilon\ \delta\upsilon o\ \mu\varepsilon\tau\alpha\beta\lambda\eta\tau\acute{\varepsilon}\varsigma\ \kappa\alpha\iota\ \theta\alpha\ \pi\rho\acute{\varepsilon}\pi\varepsilon\iota\ \nu\alpha\ o\delta\eta\gamma\eta\theta\acute{\omega}$ $\sigma\varepsilon\ \acute{\varepsilon}\nu\alpha\ \iota\sigma o\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\mu o\ \sigma\acute{\upsilon}\sigma\tau\eta\mu\alpha\ \mu\varepsilon\ \delta\upsilon o\ \varepsilon\xi\iota\sigma\acute{\omega}\sigma\varepsilon\iota\varsigma\ \kappa\alpha\iota\ \delta\upsilon o$ $\mu\varepsilon\tau\alpha\beta\lambda\eta\tau\acute{\varepsilon}\varsigma\ \theta\alpha\ \varepsilon\pi\iota\lambda\acute{\varepsilon}\xi\omega\ \omega\varsigma\ \delta\varepsilon\acute{\upsilon}\tau\varepsilon\rho\eta\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta\ \mu\iota\alpha\ o\pi o\iota\alpha\delta\acute{\eta}\pi o\tau\varepsilon$ $\varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta\ \tau o\upsilon\ \sigma\upsilon\sigma\tau\acute{\eta}\mu\alpha\tau o\varsigma.\ \mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \varepsilon\pi\iota\lambda\acute{\varepsilon}\gamma\omega\ \omega\varsigma\ \delta\varepsilon\acute{\upsilon}\tau\varepsilon\rho\eta\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta$ $\tau\eta\nu\ \alpha-\beta=-2\ \gamma\iota\alpha\tau\acute{\iota}\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \eta\ \pi o\iota o\ \alpha\pi\lambda\acute{\eta}\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta\ \tau o\upsilon\ \sigma\upsilon\sigma\tau\acute{\eta}\mu\alpha\tau o\varsigma$ $\Phi\upsilon\sigma\iota\kappa\acute{\alpha}\ \gamma\rho\acute{\alpha}\varphi\omega\ \kappa\alpha\iota\ \tau o\nu\ \pi\varepsilon\rho\iota o\rho\iota\sigma\mu\acute{o}\ \alpha\neq-4$</u>

$$\begin{cases} \alpha\neq-4 \\ -\alpha+\beta=2 \\ a+3\beta=14 \end{cases} \xLeftrightarrow{(+)} \begin{cases} \alpha\neq-4 \\ \cancel{-\alpha}+\beta+\cancel{a}+3\beta=14+2 \\ \alpha-\beta=-2 \end{cases} \xLeftrightarrow{\substack{\mathrm{A}\pi o\ \tau\eta\nu\ \pi\rho\acute{\omega}\tau\eta\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta\ \theta\alpha \\ \beta\rho\acute{\omega}\ \tau\eta\nu\ \tau\iota\mu\acute{\eta}\ \tau o\upsilon\ \beta.\Lambda\acute{\upsilon}\nu\omega\ \tau\eta\nu \\ \delta\varepsilon\acute{\upsilon}\tau\varepsilon\rho\eta\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta\ \omega\varsigma\ \pi\rho o\varsigma \\ \alpha\ \gamma\iota\alpha\ \nu\alpha\ \beta\rho\acute{\omega}\ \pi o\iota o\ "\varepsilon\acute{\upsilon}\kappa o\lambda\alpha" \\ \tau\eta\nu\ \tau\iota\mu\acute{\eta}\ \tau o\upsilon\ \alpha}}$$

$$\begin{cases} \alpha\neq-4 \\ 4\beta=16 \\ \alpha=\beta-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\neq-4 \\ \cancel{4}\beta=\cancel{4}\bullet 4 \\ \alpha=\beta-2 \end{cases} \xLeftrightarrow{\substack{\mathrm{A}\nu\ \alpha\neq0\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota \\ \eta\ \iota\sigma o\delta\upsilon\nu\alpha\mu\acute{\iota}\alpha: \\ \alpha x=\alpha y\Leftrightarrow x=y}} \begin{cases} \alpha\neq-4 \\ \beta=4 \\ \alpha=\beta-2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha \neq -4 \\ \beta = 4 \\ \alpha = 4-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \neq -4 \\ \beta = 4 \\ \alpha = 2 \end{cases} \overset{\substack{\text{Δέχομαι την τιμή } \alpha=2 \\ \text{γιατι ικανοποιεί τον} \\ \text{περιορισμό } \alpha\neq-4}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \beta = 4 \\ \alpha = 2 \end{cases}$$

$\text{Οπότε}: \boxed{\Delta(2,4)}$

$(\text{II})$ Επειδή ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο <u>οι διαγώνιες του διχοτομούνται.</u> Οπότε το $\mathrm{K}(x_{\mathrm{K}}, y_{\mathrm{K}})$ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος του ΑΓ.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Αν } \mathrm{M}(x_{\mathrm{M}}, y_{\mathrm{M}}) \text{ το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος } \mathrm{AB} \\ \text{με } \mathrm{A}(x_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{A}}), \mathrm{B}(x_{\mathrm{B}}, y_{\mathrm{B}}) \text{ τότε θα έχω}: \\ x_{\mathrm{M}} = \dfrac{x_{\mathrm{A}} + x_{\mathrm{B}}}{2},\ y_{\mathrm{M}} = \dfrac{y_{\mathrm{A}} + y_{\mathrm{B}}}{2} \end{array}}$$

$$x_{\mathrm{K}} = \frac{x_{\mathrm{A}} + x_{\Gamma}}{2} \overset{\substack{x_{\mathrm{A}}=-4 \\ x_{\Gamma}=-1}}{=} \frac{-4-1}{2} = -\frac{5}{2}$$

$$y_{\mathrm{K}} = \frac{y_{\mathrm{A}} + y_{\Gamma}}{2} \overset{\substack{y_{\mathrm{A}}=6 \\ y_{\Gamma}=1}}{=} \frac{6+1}{2} = \frac{7}{2}$$

$\text{Οπότε}: \boxed{\mathrm{K}\left(-\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)}$

$$\boxed{\text{Αν } \mathrm{A}(x_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{A}}), \mathrm{B}(x_{\mathrm{B}}, y_{\mathrm{B}}) \text{ τότε } \overrightarrow{\mathrm{AB}} = (x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}})}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{K}\Gamma} \underset{\mathrm{K}\left(-\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right)}{\overset{\Gamma(-1,1)}{=}} \left(-1-\left(-\frac{5}{2}\right), 1-\frac{7}{2}\right) = \left(-\frac{2}{2}+\frac{5}{2}, \frac{2}{2}-\frac{7}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{K}\Delta} \underset{\mathrm{K}\left(-\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right)}{\overset{\Delta(2,4)}{=}} \left(2-\left(-\frac{5}{2}\right), 4-\frac{7}{2}\right) = \left(\frac{2\cdot2}{1\cdot2}+\frac{5}{2}, \frac{4\cdot2}{1\cdot2}-\frac{7}{2}\right) =$$

$$= \left(\frac{4}{2}+\frac{5}{2}, \frac{8}{2}-\frac{7}{2}\right) = \left(\frac{9}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{K\Gamma}}=\left(\frac{3}{2},-\frac{5}{2}\right),\overrightarrow{\mathrm{K\Delta}}=\left(\frac{9}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$\boxed{\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{\vec{\alpha}\vec{\beta}}{\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right|},\vec{\alpha},\vec{\beta}\neq\vec{0}}$$

$$\boxed{\mathrm{A}\nu\ \vec{\alpha}=\left(x_1,y_1\right),\vec{\beta}=\left(x_2,y_2\right)\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:\vec{\alpha}\vec{\beta}=x_1x_2+y_1y_2}$$

$$\boxed{\mathrm{A}\nu\ \vec{\alpha}=\left(x,y\right)\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ \left|\vec{\alpha}\right|=\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{K\Gamma}}\overrightarrow{\mathrm{K\Delta}}\overset{\overrightarrow{\mathrm{K\Gamma}}=\left(\frac{3}{2},-\frac{5}{2}\right)}{\underset{\overrightarrow{\mathrm{K\Delta}}=\left(\frac{9}{2},\frac{1}{2}\right)}{=}}\frac{3}{2}\bullet\frac{9}{2}-\frac{5}{2}\bullet\frac{1}{2}=\frac{27}{4}-\frac{5}{4}=\frac{22:2}{4:2}=\frac{11}{2}$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{K\Gamma}}\right|\overset{\overrightarrow{\mathrm{K\Gamma}}=\left(\frac{3}{2},-\frac{5}{2}\right)}{=}\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{5}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{25}{4}}=\sqrt{\frac{34}{4}}\overset{\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}=\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}},\alpha\geq0,\beta>0}{=}\frac{\sqrt{34}}{\sqrt{4}}=$$

$$=\frac{\sqrt{34}}{2}$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{K\Delta}}\right|\overset{\overrightarrow{\mathrm{K\Delta}}=\left(\frac{9}{2},\frac{1}{2}\right)}{=}\sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{81}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{82}{4}}\overset{\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}=\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}},\alpha\geq0,\beta>0}{=}\frac{\sqrt{82}}{\sqrt{4}}=$$

$$=\frac{\sqrt{82}}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\overrightarrow{\mathrm{K\Gamma}},\overrightarrow{\mathrm{K\Delta}}\right)=\frac{\overrightarrow{\mathrm{K\Gamma}}\overrightarrow{\mathrm{K\Delta}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{K\Gamma}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{K\Delta}}\right|}=\frac{\frac{11}{2}}{\frac{\sqrt{34}}{2}\frac{\sqrt{82}}{2}}\overset{\substack{34=2\bullet17\\82=2\bullet41}}{=}\frac{\frac{11}{2}}{\frac{\sqrt{2\bullet17}}{2}\frac{\sqrt{2\bullet41}}{2}}$$

$$\overset{\sqrt{\alpha\beta}=\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta},\alpha,\beta\geq0}{=}\frac{\frac{11}{2}}{\frac{\sqrt{2}\sqrt{17}\sqrt{2}\sqrt{41}}{4}}=\frac{\frac{11}{2}}{\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2\sqrt{17}\sqrt{41}}{4}}\overset{\left(\sqrt{\alpha}\right)^2=\alpha,\alpha\geq0}{=}$$

$$\frac{\frac{11}{2}}{\frac{\cancel{2}\sqrt{17}\sqrt{41}}{\cancel{4}_{2}}}=\frac{\frac{11}{\cancel{2}}}{\frac{\sqrt{17}\sqrt{41}}{\cancel{2}}}\overset{\sqrt{\alpha\beta}=\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta},\alpha,\beta\geq 0}{=}\frac{11}{\sqrt{17\bullet 41}}\overset{41=40+1}{=}\frac{11}{\sqrt{17\bullet(40+1)}}=$$

$$\frac{11}{\sqrt{17\bullet 40+17}}=\frac{11}{\sqrt{680+17}}=\frac{11}{\sqrt{697}}\overset{\text{Πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρονομαστή με το } \sqrt{697} \text{ για να προκύψει ρητός παρονομαστής}}{=}\frac{11\sqrt{697}}{\sqrt{697}\sqrt{697}}=$$

$$\frac{11\sqrt{697}}{\left(\sqrt{697}\right)^2}\overset{\left(\sqrt{\alpha}\right)^2=\alpha,\alpha\geq 0}{=}\frac{11\sqrt{697}}{697}$$

5.

Να βρείτε την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε οι ευθείες $(\lambda-1)x+\lambda y+8=0$ και $\lambda x+3y+1-2\lambda=0$ να είναι κάθετες.

Η εξίσωση $\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0$ εκφράζει ευθεία όταν τα $\mathrm{A},\mathrm{B}$ δεν είναι ταυτόχρονα μηδέν

Έστω η εξίσωση $(\lambda-1)x+\lambda y+8=0$ δεν παριστάνει ευθεία τότε οι συντελεστές των $x$ και $y$ θα πρέπει να είναι ταυτόχρονα μηδέν. Άρα θα έχω:

$$\begin{Bmatrix}\lambda-1=0\\ \lambda=0\end{Bmatrix}$$

Θα πρέπει το ίδιο $\lambda$ να ικανοποιεί τις συνθήκες $\lambda-1=\lambda=0$

$$\begin{Bmatrix}\lambda-1=0\\ \lambda=0\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}\lambda=1\\ \lambda=0\end{Bmatrix}(\text{Άτοπο})$$

Άρα η εξίσωση $(\lambda-1)x+\lambda y+8=0$ παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$

$(\varepsilon_1):(\lambda-1)x+\lambda y+8=0$

Η *εξίσωση* $\lambda x+3y+1-2\lambda=0$ *παριστάνει ευθεία γιατί ο συντελεστής του y είναι μη μηδενικός αριθμός*!!!

$(\varepsilon_2): \lambda x+3y+1-2\lambda=0$

$\Delta\iota\alpha\kappa\rho\acute{\iota}\nu\omega\ \tau\iota\varsigma\ \pi\varepsilon\rho\iota\pi\tau\acute{\omega}\sigma\varepsilon\iota\varsigma: \left\{\begin{matrix}(\mathrm{I})\ \lambda=0\\(\mathrm{II})\ \lambda\neq 0\end{matrix}\right\}$

<u>Περίπτωση(Ι)</u>: Αν $\lambda=0$ *θα έχω.*

$$(\lambda-1)x+\lambda y+8=0 \overset{\lambda=0}{\Longleftrightarrow} (0-1)x+0y+8=0 \Leftrightarrow x=8$$

$(\varepsilon_1): x=8$

$\boxed{\mathrm{A}\nu\ (\varepsilon): x=\alpha\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ (\varepsilon)//y'y}$

$\Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma\ (\varepsilon_1)//y'y$

$$\lambda x+3y+1-2\lambda=0 \overset{\lambda=0}{\Longleftrightarrow} 0x+3y+1-2\bullet 0=0 \Leftrightarrow y=-\frac{1}{3}$$

$(\varepsilon_2): y=-\frac{1}{3}$

$\boxed{\mathrm{A}\nu\ (\varepsilon): y=\beta\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ (\varepsilon)//x'x}$

$\Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma\ (\varepsilon_2)//x'x$

$$\left\{\begin{matrix}(\varepsilon_1)//y'y\\(\varepsilon_2)//x'x\\y'y\perp x'x\end{matrix}\right\}\Rightarrow(\varepsilon_1)\perp(\varepsilon_2)$$

*Άρα η τιμή* $\lambda=0$ *είναι λύση του προβλήματος*

<u>Περίπτωση(ΙΙ)</u>: Αν $\lambda\neq 0$ *θα έχω.*

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathrm{A}\nu\ (\varepsilon): \mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0\ \mu\varepsilon\ \mathrm{B}\neq 0\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ o\ \sigma\upsilon\nu\tau\varepsilon\lambda\varepsilon\sigma\tau\acute{\eta}\varsigma\\ \delta\iota\varepsilon\acute{\upsilon}\theta\upsilon\nu\sigma\eta\varsigma\ \tau\eta\varsigma\ (\varepsilon)\ \delta\acute{\iota}\nu\varepsilon\tau\alpha\iota\ \alpha\pi o\ \tau\eta\nu\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\eta\ \lambda=-\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}\end{array}}$$

$\left(\varepsilon_1\right):\left(\lambda-1\right)x+\lambda y+8=0$

$\left(\varepsilon_2\right):\lambda x+3y+1-2\lambda=0$

$$\lambda_{\varepsilon_1}=-\frac{\mathrm{A}_1}{\mathrm{B}_1}=-\frac{\lambda-1}{\lambda}$$

$$\lambda_{\varepsilon_2}=-\frac{\mathrm{A}_2}{\mathrm{B}_2}=-\frac{\lambda}{3}$$

| |
|---|
| Αν $\left(\varepsilon_1\right),\left(\varepsilon_2\right)\nparallel y'y$ *με* |
| $\lambda_{\varepsilon_1}$ : Ο *συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας* $\left(\varepsilon_1\right)$ |
| $\lambda_{\varepsilon_2}$ : Ο *συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας* $\left(\varepsilon_2\right)$ |
| Τ*ότε ισχύει η ισοδυναμία* : |
| $\lambda_{\varepsilon_1}\lambda_{\varepsilon_2}=-1\Leftrightarrow\left(\varepsilon_1\right)\perp\left(\varepsilon_2\right)$ |

$$\left(\varepsilon_1\right)\perp\left(\varepsilon_2\right)\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}\lambda_{\varepsilon_1}\lambda_{\varepsilon_2}=-1\\ \lambda\neq 0\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}-\dfrac{\lambda-1}{\cancel{\lambda}}\left(-\dfrac{\cancel{\lambda}}{3}\right)=-1\\ \lambda\neq 0\end{Bmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\dfrac{\lambda-1}{3}=-1\\ \lambda\neq 0\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}\lambda-1=-3\\ \lambda\neq 0\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}\lambda=1-3\\ \lambda\neq 0\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}\lambda=-2\\ \lambda\neq 0\end{Bmatrix}$$

*Δέχομαι την τιμή* $\lambda=-2$
*γιατι ικανοποιεί τον*
*περιορισμό* $\lambda\neq 0$

$$\Leftrightarrow\quad\lambda=-2$$

6.

| |
|---|
| Ν*α βείτε τι παριστάνει η εξισώση* $x^2-y^2+4y-4=0$ |

Θ*έλω την παράσταση* $x^2-y^2+4y-4$ *να την γράψω στην μορφή* $\mathrm{A}^2-\mathrm{B}^2$. Τ*ο* $x^2$ *δεν μπορώ να το "βάλω" μέσα σε μια παράσταση της μορφής* $\left(x+\kappa\right)^2$ *επειδή η παράσταση δεν*

$\pi\varepsilon\rho\iota\acute{\varepsilon}\chi\varepsilon\iota\ \acute{o}\rho o\ \tau\eta\nu\ \mu o\rho\varphi\acute{\eta}\varsigma\ x\mu.$ Αν $\varepsilon\acute{\iota}\chi\alpha\ x\mu = 2x\frac{\mu}{2}$ $\theta\alpha\ \mu\pi o\rho o\acute{\upsilon}\sigma\alpha$ $\nu\alpha\ \pi\rho o\sigma\theta\alpha\varphi\alpha\iota\rho\acute{\varepsilon}\sigma\omega\ \tau o \left(\frac{\mu}{2}\right)^2$ $\kappa\alpha\iota\ \nu\alpha\ \varepsilon\acute{\iota}\chi\alpha\ \tau\eta\nu\ \tau\alpha\upsilon\tau\acute{o}\tau\eta\tau\alpha$

$x^2 + 2x\frac{\mu}{2} + \left(\frac{\mu}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{\mu}{2}\right)^2$. Αυτό όμως δεν μπορεί να συμβεί!!!

Οπότε στην παράσταση $\mathrm{A}^2 - \mathrm{B}^2$ μπορω να έχω ως $\mathrm{A} = x$ και $-\mathrm{B}^2 = -y^2 + 4y - 4$. Συνεπώς είναι λογικό απο την παράσταση $-y^2 + 4y - 4$ να βγάλω κοινό παράγοντα το $(-)$ δηλαδή να έχω $-y^2 + 4y - 4 = -\left(y^2 - 4y + 4\right)$ και μέσα στην παρένθεση που έχει δημιουργηθεί να εμφανίσω παράσταση την μορφής $(x+\lambda)^2$

$$x^2 - y^2 + 4y - 4 = 0 \overset{-y^2+4y-4=-\left(y^2-4y+4\right)}{\Longleftrightarrow} x^2 - \left(y^2 - 4y + 4\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - \left(y^2 - 4y + 2^2\right) = 0$$

Στην παράσταση $y^2 - 4y + 2^2$ για να εμφανιστεί τέλειο τετράγωνο παίρνω τους αριθμούς που είναι "κάτω" απο τα τετράγωνα $\boxed{y}^2$ και $\boxed{2}^2$ δηλαδή τα $y$, 2 και τους πολλαπλασιάζω με το $-2$. Αν μου δώσουν το $-4y$ θα έχω ταυτότητα. Πράγματι $-2 \bullet y \bullet 2 = -4y$. Τότε θα ισχύει:

$$y^2 - 4y + 2^2 \overset{-4y=-2\bullet y\bullet 2}{=} \boxed{y}^2 - 2\bullet y\bullet 2 + \boxed{2}^2 =$$

$$\left(\begin{array}{l}\text{Διαφορα των αριθμών} \\ \text{που ειναι κάτω απο τα} \\ \text{τετράγωνα δηλαδή } y-2\end{array}\right)^2 = (y-2)^2$$

$$x^2-\left(y^2-4y+2^2\right)=0 \overset{-4y=-2\bullet y\bullet 2}{\Longleftrightarrow} x^2-\left(y^2-2\bullet y\bullet 2+2^2\right)=0$$

$$\overset{\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha-\beta)^2}{\Longleftrightarrow} x^2-\left(y-2\right)^2=0 \overset{\alpha^2-\beta^2=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left[x-\left(y-2\right)\right]\left[x+\left(y-2\right)\right]=0 \Leftrightarrow \left(x-y+2\right)\left(x+y-2\right)=0$$

$$\overset{\alpha\beta=0\Leftrightarrow(\alpha=0\ \acute{\eta}\ \beta=0)}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{matrix} x-y+2=0 \\ \acute{\eta} \\ x+y-2=0 \end{matrix}\right\}$$

Οπότε έχω τις ευθείες:

$(\varepsilon_1): x-y+2=0$

$(\varepsilon_2): x+y-2=0$

ΠΡΟΣΟΧΗ!!!

$$\left(\mathrm{A}_1x+\mathrm{B}_1y+\Gamma_1\right)\left(\mathrm{A}_2x+\mathrm{B}_2y+\Gamma_2\right)=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \mathrm{A}_1x+\mathrm{B}_1y+\Gamma_1=0 \\ \acute{\eta} \\ \mathrm{A}_2x+\mathrm{B}_2y+\Gamma_2=0 \end{matrix}\right\}$$

Το *ίδιο δεν ισχύει για συναρτήσεις*!!!. Μ*πορει το γινόμενο δυο συναρτήσεων να είναι η μηδενική συνάρτηση χωρίς καμία απο αυτές να είναι η μηδενική συνάρτηση*

Π*ράγματι*:

$$f(x)=\begin{cases}0, x\le 0\\ 13, x>0\end{cases},\ g(x)=\begin{cases}-3, x\le 0\\ 0, x>0\end{cases}$$

$$(fg)(x)=f(x)g(x)=\begin{cases}f(x)g(x), x\le 0\\ f(x)g(x), x>0\end{cases}=\begin{cases}0(-3), x\le 0\\ 13\bullet 0, x>0\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}0, x\le 0\\ 0, x>0\end{cases}=0$$

Τότε *δεν έπεται ότι η $f$ είναι η μηδενική συνάρτηση ή η $g$ είναι η μηδενική συνάρτηση*!!!

7.

$\boxed{N\alpha\ \beta\rho\varepsilon\acute{\iota}\tau\varepsilon\ \tau\iota\ \pi\alpha\rho\iota\sigma\tau\acute{\alpha}\nu\varepsilon\iota\ \eta\ \varepsilon\xi\iota\sigma\acute{\omega}\sigma\eta\ x^2-y^2-4x+2y+3=0}$

*Θέλω την παράσταση* $x^2-y^2-4x+2y+3$ *να την γράψω στην μορφή* $\mathrm{A}^2-\mathrm{B}^2$. *Το* $x^2-4x$ *βρίσκεται μέσα στο* $\mathrm{A}^2$. *Το* $x^2-4x$ *θέλω να την γράψω στην μορφή* $(x+\kappa)^2+\lambda$

$$x^2-4x=x^2-2\bullet x\bullet 2\ \overset{\substack{\Gamma\iota\alpha\ \nu\alpha\ \varepsilon\mu\varphi\alpha\nu\iota\sigma\tau\varepsilon\acute{\iota}\ \tau\alpha\upsilon\tau\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\\ \pi\rho\sigma\sigma\theta\alpha\varphi\alpha\iota\rho\acute{\omega}\ \tau\sigma\ 2^2}}{=}\ x^2-2\bullet x\bullet 2+2^2-2^2$$

$$\overset{\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha-\beta)^2}{=}\ (x-2)^2-4$$

*Το* $-y^2+2y$ *υπάρχει μέσα στην παράσταση* $-\mathrm{B}^2$. *Οπότε είναι λογικό απο την παράσταση* $-y^2+2y$ *να βγάλω κοινό παράγοντα το* $(-)$. *Άρα θα έχω* $-y^2+2y=-(y^2-2y)$.
*Μέσα στην παρένθεση θέλω να εμφανίσω την μορφή* $(y+\kappa)^2+\lambda$

$$-y^2+2y=-(y^2-2\bullet y\bullet 1)\ \overset{\substack{\text{Μέσα στην παρένθεση}\\ \text{για να εμφανιστεί ταυτότητα}\\ \text{προσθαφαιρώ το } 1^2}}{=}\ -(y^2-2\bullet y\bullet 1+1^2-1^2)$$

$$\overset{\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha-\beta)^2}{=}\ -\left[(y-1)^2-1\right]$$

$$x^2-y^2-4x+2y+3=0\Leftrightarrow(x^2-4x)+(-y^2+2y)+3=0\Leftrightarrow$$

$$x^2-2\bullet x\bullet 2-(y^2-2y)+3=0\ \overset{\substack{\text{Στην παράσταση } x^2-2\bullet x\bullet 2 \text{ για να}\\ \text{εμφανιστεί ταυτότητα προσθαφαιρώ το } 2^2}}{\Leftrightarrow}$$

$$x^2-2\bullet x\bullet 2+2^2-2^2-(y^2-2\bullet y\bullet 1)+3=0\ \overset{\substack{\text{Μέσα στην παρένθεση}\\ \text{για να εμφανιστεί ταυτότητα}\\ \text{προσθαφαιρώ το } 1^2\\ \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha-\beta)^2}}{\Leftrightarrow}$$

$$(x-2)^2-4-\left(y^2-2\bullet y\bullet 1+1^2-1^2\right)+3=0 \overset{\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha-\beta)^2}{\Leftrightarrow}$$

$$(x-2)^2-4-\left[(y-1)^2-1\right]+3=0 \Leftrightarrow (x-2)^2 \cancel{-4}-(y-1)^2 \cancel{+1+3}=0$$

$$(x-2)^2-(y-1)^2=0 \overset{\alpha^2-\beta^2=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}{\Leftrightarrow}$$

$$\left[(x-2)-(y-1)\right]\left[(x-2)+(y-1)\right]=0 \Leftrightarrow$$

$$(x-2-y+1)(x-2+y-1)=0 \Leftrightarrow (x-y-1)(x+y-3)=0$$

$$\overset{\alpha\beta=0\Leftrightarrow(\alpha=0\ ή\ \beta=0)}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{matrix} x-y-1=0 \\ ή \\ x+y-3=0 \end{matrix}\right\}$$

Οπότε έχω τις ευθείες :

$(\varepsilon_1): x-y-1=0$

$(\varepsilon_2): x+y-3=0$

8.

| |
|---|
| Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες της μορφής |
| $\left(2\alpha^2+\alpha+3\right)x+\left(\alpha^2-\alpha+1\right)y+(3a+1)=0$ |
| διέρχονται απο το ίδιο σημείο. |

| |
|---|
| Η εξίσωση $\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0$ εκφράζει ευθεία όταν τα Α,Β δεν είναι ταυτόχρονα μηδέν |

$$Έχω: \alpha^2-\alpha+1=\alpha^2-2\bullet\alpha\bullet\frac{1}{2}+1 \overset{\substack{\text{Προσθαφαιρώ το } \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ \text{για να εμφανιστεί η} \\ \text{ταυτότητα } (\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2}}{=}$$

$$\alpha^2-2\bullet\alpha\bullet\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+1 \overset{(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2\ 2}{=} \left(\alpha-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\frac{4}{4}=$$

$$\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

$$\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)^2\geq 0\Rightarrow\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geq\frac{3}{4}>0\Rightarrow\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0\Rightarrow$$

$$\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\neq 0\Rightarrow\alpha^2-\alpha+1\neq 0$$

Επειδή $\alpha^2-\alpha+1\neq 0$ *για κάθε* $\alpha\in\mathbb{R}$ *η εξίσωση*

$$\left(2\alpha^2+\alpha+3\right)x+\left(\alpha^2-\alpha+1\right)y+\left(3a+1\right)=0$$

*παριστάνει ευθεία για κάθε* $\alpha\in\mathbb{R}$

$$\left(\varepsilon\right):\left(2\alpha^2+\alpha+3\right)x+\left(\alpha^2-\alpha+1\right)y+\left(3a+1\right)=0$$

Θ*α διατάξω την εξίσωση της ευθείας* $\left(\varepsilon\right)$ *ως προς ένα πολυώνυμο με μεταβλητή* $\alpha$!!! Μ*αζεύω όλους τους όρους που περιέχουν* $\alpha^2$, *μαζεύω όλους τους όρους που περιέχουν* $\alpha$ *και όλους τους όρους που περιέχουν μόνο x ή μόνο y ή μόνο αριθμούς*

$$\left(2\alpha^2+\alpha+3\right)x+\left(\alpha^2-\alpha+1\right)y+\left(3a+1\right)=0\Leftrightarrow$$

Μ*αζεύω τα* $\alpha^2$
Μ*αζεύω τα* $\alpha^2$
Μ*αζεύω τους όρους που περιέχουν μόνο x ή μόνο y ή μόνο αριθμούς*

$$2\alpha^2x+\alpha x+3x+\alpha^2y-\alpha y+y+3a+1=0\quad\Leftrightarrow$$

$$2\alpha^2x+\alpha^2y+\alpha x-\alpha y+3\alpha+3x+y+1=0\Leftrightarrow$$

$$\left(2x+y\right)\alpha^2+\left(x-y+3\right)\alpha+3x+y+1=0$$

Θ*εωρώ το πολυώνυμο*:

$$\mathrm{P}\left(\alpha\right)=\left(2x+y\right)\alpha^2+\left(x-y+3\right)\alpha+3x+y+1$$

Ε*πειδή το πολυώνυμο* $\mathrm{P}\left(\alpha\right)$ *μηδενίζεται για κάθε* $\alpha\in\mathbb{R}$ *θα πρέπει όλοι συντελεστές του πολυωνύμου* $\mathrm{P}\left(\alpha\right)$ *να είναι μηδέν*!!! *Άρα θα έχω*:

$$\left.\begin{cases}2x+y=0\\ x-y+3=0\\ 3x+y+1=0\end{cases}\right\}$$

*Θα πρέπει το ίδιο διατεταγμένο ζεύγος* $(x,y)$ *να ικανοποιεί και τις τρείς εξισώσεις. Θεωρώ το σύστημα* $(\Sigma)$ *που ορίζεται απο τις εξισώσεις* $2x+y=0, x-y+3=0$

$$\left.\begin{cases}2x+y=0\\ x-y+3=0\end{cases}\right\}(\Sigma)$$

*Θα πρέπει η λύση του συστήματος* $(\Sigma)$ *να ικανοποιεί την εξίσωση* $3x+y+1=0$

$$\left.\begin{cases}2x+y=0\\ x-y+3=0\end{cases}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{cases}2x+y=0\\ x-y=-3\end{cases}\right\}$$

*Προσθέτω κατα μέλη τις εξισώσεις* $2x+y=0$ *και* $x-y=-3$ *για να προκύψει μια εξίσωση με μια μεταβλητή το* $x$!!! *Επειδή όμως έχω ένα σύστημα δυο εξισώσεων με δυο αγνώστους για να οδηγηθώ σε ένα ισοδύναμο σύστημα θα πρέπει να έχω ένα σύστημα δυο εξισώσεων με δυο αγνώστους. Οπότε ως πρώτη εξίσωση επιλέγω την εξίσωση που θα προκύψει απο το άθροισμα των εξισώσεων* $2x+y=0$ *και* $x-y=-3$ *και ως δεύτερη εξίσωση επιλέγω μια οποιαδήποτε εξίσωση του συστήματος. Συνήθως την ποιο απλή. Οπότε ως δεύτερη εξίσωση επιλέγω την* $2x+y=0$

$$(\Sigma)\Leftrightarrow\left.\begin{cases}2x+y=0\\ x-y=-3\end{cases}\right\}\overset{(+)}{\Longleftrightarrow}\left.\begin{cases}2x+\cancel{y}+x-\cancel{y}=0-3\\ 2x+y=0\end{cases}\right\}$$

Επειδή απο την πρώτη εξίσωση θα έχω βρεί την τιμή του x θα λύσω την δεύτερη εξίσωση ως προς y έτσι ώστε όταν ξέρω το x να βρώ ποιο εύκολα το y

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \cancel{3}x = \cancel{3}(-1) \\ y = -2x \end{Bmatrix}$$

Αν $\alpha \neq 0$ τότε ισχύει η ισοδυναμία: $\alpha x = \alpha y \Leftrightarrow x = y$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = -1 \\ y = -2x \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = -1 \\ y = -2(-1) \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = -1 \\ y = 2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow (x, y) = (-1, 2)$$

Τότε θα έχω:

$$3x + y + 1 \overset{\substack{x=-1 \\ y=2}}{=} 3(-1) + 2 + 1 = -3 + 3 = 0$$

Συνεπώς η λύση του συστήματος $(\Sigma)$ ικανοποιεί την εξίσωση

$3x + y + 1 = 0$

Άρα υπάρχει διατεταγμένο ζεύγος $(x, y) = (-1, 2)$ που ικανοποιεί και τις τρείς εξισώσεις

$$\begin{Bmatrix} 2x + y = 0 \\ x - y + 3 = 0 \\ 3x + y + 1 = 0 \end{Bmatrix}$$

Συνεπώς για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ η ευθεία $(\varepsilon)$ διέρχεται απο το σταθερό σημείο $(-1, 2)$.

9.

Να βρείτε την οξεία γωνία την οποία σχηματίζουν οι ευθείες $y = \mu x$ και $(1+\mu)x = (1-\mu)y$

Η εξίσωση $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma = 0$ εκφράζει ευθεία όταν τα Α,Β δεν είναι ταυτόχρονα μηδέν

$y = \mu x \Leftrightarrow -\mu x + y = 0$

Η εξίσωση $-\mu x + y = 0$ παριστάνει ευθεία γιατί ο συντελεστής του y είναι μη μηδενικός αριθμός

$(\varepsilon_1): -\mu x + y = 0$

$(1+\mu)x=(1-\mu)y \Leftrightarrow (1+\mu)x-(1-\mu)y=0 \Leftrightarrow$

$(1+\mu)x+(\mu-1)y=0$

*Έστω η εξίσωση* $(1+\mu)x+(\mu-1)y=0$ *δεν παριστάνει ευθεία τότε οι συντελεστές των x και y θα πρέπει να είναι ταυτόχρονα μηδέν. Άρα θα έχω:*

$$\begin{Bmatrix} \mu+1=0 \\ \mu-1=0 \end{Bmatrix}$$

Θ*α πρέπει το ίδιο μ να ικανοποιεί τις συνθήκες* $\mu-1=\mu+1=0$

$$\begin{Bmatrix} \mu+1=0 \\ \mu-1=0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \mu=-1 \\ \mu=1 \end{Bmatrix} (\textit{Άτοπο})$$

$(\varepsilon_2):(1+\mu)x+(\mu-1)y=0$

| |
|---|
| *Έστω* $(\varepsilon): \mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0$ *με* $\lvert\mathrm{A}\rvert+\lvert\mathrm{B}\rvert\neq 0$ |
| *και* $\vec{\delta}=(\mathrm{B},-\mathrm{A})$ *τότε* $\vec{\delta}\,//\,(\varepsilon)$ |

$(\varepsilon_1):-\mu x+y=0$

$\vec{\delta_1}=(\mathrm{B}_1,-\mathrm{A}_1)=(1,-(-\mu))=(1,\mu)$

Τ*ότε θα έχω* $\vec{\delta_1}\,//\,(\varepsilon_1)$

$(\varepsilon_2):(1+\mu)x+(\mu-1)y=0$

$\vec{\delta_2}=(\mathrm{B}_2,-\mathrm{A}_2)=(\mu-1,-(1+\mu))$

Τ*ότε θα έχω* $\vec{\delta_2}\,//\,(\varepsilon_2)$

$$\boxed{\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{\vec{\alpha}\vec{\beta}}{\lvert\vec{\alpha}\rvert\lvert\vec{\beta}\rvert},\vec{\alpha},\vec{\beta}\neq\vec{0}}$$

$$\boxed{\mathrm{A}\nu\ \vec{\alpha}=(x_1,y_1),\vec{\beta}=(x_2,y_2)\ \textit{τότε θα έχω}: \vec{\alpha}\vec{\beta}=x_1x_2+y_1y_2}$$

$$\boxed{\mathrm{A}\nu\ \vec{\alpha}=(x,y)\ \textit{τότε θα έχω}\ \lvert\vec{\alpha}\rvert=\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\overrightarrow{\delta_1}\overrightarrow{\delta_2} \underset{\overrightarrow{\delta_2}=(\mu-1,-(1+\mu))}{\overset{\overrightarrow{\delta_1}=(1,\mu)}{=}} 1(\mu-1)-\mu(1+\mu)=\cancel{\mu}-1-\cancel{\mu}-\mu^2=-(\mu^2+1)$$

$$\left|\overrightarrow{\delta_1}\right|=\sqrt{1^2+\mu^2}=\sqrt{\mu^2+1}$$

$$\left|\overrightarrow{\delta_2}\right|=\sqrt{(\mu-1)^2+\left[-(1+\mu)\right]^2}=\sqrt{(\mu-1)^2+(\mu+1)^2} \overset{\substack{(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 \\ (\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2}}{=}$$

$$\sqrt{\mu^2\cancel{-2\mu}+1+\mu^2+\cancel{2\mu}+1}=\sqrt{2\mu^2+2}=\sqrt{2(\mu^2+1)} \overset{\sqrt{\alpha\beta}=\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta},\alpha,\beta\geq 0}{=}$$

$$\sqrt{2}\sqrt{\mu^2+1}$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\overrightarrow{\delta_1},\overrightarrow{\delta_2}\right)=\frac{\overrightarrow{\delta_1}\overrightarrow{\delta_2}}{\left|\overrightarrow{\delta_1}\right|\left|\overrightarrow{\delta_2}\right|}=\frac{-(\mu^2+1)}{\sqrt{\mu^2+1}\sqrt{2}\sqrt{\mu^2+1}}=\frac{-(\mu^2+1)}{\left(\sqrt{\mu^2+1}\right)^2\sqrt{2}}$$

$$\overset{(\sqrt{\alpha})^2=\alpha,\alpha\geq 0}{=} \frac{-\cancel{(\mu^2+1)}}{\cancel{(\mu^2+1)}\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}} \overset{\substack{\text{Πολλαπλασιάζω} \\ \text{αριθμητή και} \\ \text{παρονομαστή με το} \\ \sqrt{2}\ \text{για να προκύψει} \\ \text{ρητός παρονομαστής}}}{=} -\frac{1\bullet\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2}$$

$$\overset{(\sqrt{\alpha})^2=\alpha,\alpha\geq 0}{=} -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Οπότε $0\leq\left(\overrightarrow{\delta_1},\overrightarrow{\delta_2}\right)\leq\pi$ *και* $\sigma\upsilon\nu\left(\overrightarrow{\delta_1},\overrightarrow{\delta_2}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Αν *είχα* $0\leq\left(\overrightarrow{\delta_1},\overrightarrow{\delta_2}\right)\leq\pi$ *και* $\sigma\upsilon\nu\left(\overrightarrow{\delta_1},\overrightarrow{\delta_2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ *τότε* $\left(\overrightarrow{\delta_1},\overrightarrow{\delta_2}\right)=\frac{\pi}{4}$

Επειδή *οι παραπληρωματικές γωνίες έχουν αντίθετα συνημίτονα θα πάρω ως γωνία των διανυσμάτων* $\overrightarrow{\delta_1},\overrightarrow{\delta_2}$ *την παραπληρωματική του* $\frac{\pi}{4}$

$$\left(\overrightarrow{\delta_1},\overrightarrow{\delta_2}\right)=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{4\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$$

Τότε επειδή η $\left(\overrightarrow{\delta_1},\overrightarrow{\delta_2}\right)$ είναι αμβλεία και $\overrightarrow{\delta_1}//(\varepsilon_1),\overrightarrow{\delta_2}//(\varepsilon_2)$

η οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$

και η $\left(\overrightarrow{\delta_1},\overrightarrow{\delta_2}\right)$ θα είναι παραπληρωματικές. Συνεπώς η

οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ θα είναι:

$$\pi-\left(\overrightarrow{\delta_1},\overrightarrow{\delta_2}\right)=\pi-\frac{3\pi}{4}=\frac{4\pi}{4}-\frac{3\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$$

10.

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται απο την αρχή των αξόνων και απο το σημείο τομής των ευθειών $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1$ και $\frac{x}{\beta}+\frac{y}{\alpha}=1$ με $\alpha,\beta\neq 0$ και $\alpha\neq\pm\beta$

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1\Leftrightarrow \alpha\beta\left(\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}\right)=1\bullet\alpha\beta\Leftrightarrow \cancel{\alpha}\beta\frac{x}{\cancel{\alpha}}+\alpha\cancel{\beta}\frac{y}{\cancel{\beta}}=\alpha\beta\Leftrightarrow$$

$$\beta x+\alpha y-\alpha\beta=0$$

$$(\varepsilon_1):\beta x+\alpha y-\alpha\beta=0$$

$$\frac{x}{\beta}+\frac{y}{\alpha}=1\Leftrightarrow \alpha\beta\left(\frac{x}{\beta}+\frac{y}{\alpha}\right)=1\bullet\alpha\beta\Leftrightarrow \alpha\cancel{\beta}\frac{x}{\cancel{\beta}}+\beta\cancel{\alpha}\frac{y}{\cancel{\alpha}}=\alpha\beta\Leftrightarrow$$

$$\alpha x+\beta y-\alpha\beta=0$$

$$(\varepsilon_2):\alpha x+\beta y-\alpha\beta=0$$

Όλες οι ευθείες $(\varepsilon)$ που διέρχονται απο το σημείο τομής των ευθειών $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ με εξαίρεση την ευθεία $(\varepsilon_2)$ θα έχουν την μορφή $(\varepsilon)=(\varepsilon_1)+\lambda(\varepsilon_2)$

<u>Η ευθεία $(\varepsilon):\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0,|\mathrm{A}|+|\mathrm{B}|\neq 0$ διέρχεται απο την αρχή των αξόνων αν και μόνο αν $\Gamma=0$</u>

$\text{Επειδή} -\alpha\beta \neq \eta$ *ευθεία* $(\varepsilon_2): \alpha x+\beta y-\alpha\beta=0$ *δεν διέρχεται απο την αρχή των αξόνων. Οπότε η ευθεία* $(\varepsilon_2)$ *δεν είναι λύση του προβλήματος. Όλες οι ευθείες* $(\varepsilon)$ *που διέρχονται απο το σημείο τομής των ευθειών* $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ *με εξαίρεση την ευθεία* $(\varepsilon_2)$ *θα έχουν την μορφή*

$$(\varepsilon)=(\varepsilon_1)+\lambda(\varepsilon_2)$$

$$\beta x+\alpha y-\alpha\beta+\lambda(\alpha x+\beta y-\alpha\beta)=0 \Leftrightarrow$$

$$\beta x+\alpha y-\alpha\beta+\lambda\alpha x+\lambda\beta y-\lambda\alpha\beta=0 \Leftrightarrow$$

$$(\beta+\lambda\alpha)x+(\alpha+\lambda\beta)y-\alpha\beta-\lambda\alpha\beta=0$$

$$(\varepsilon):(\beta+\lambda\alpha)x+(\alpha+\lambda\beta)y-\alpha\beta-\lambda\alpha\beta=0$$

$$\text{O}(0,0)\in(\varepsilon) \Leftrightarrow (\beta+\lambda\alpha)x_{\text{O}}+(\alpha+\lambda\beta)y_{\text{O}}-\alpha\beta-\lambda\alpha\beta=0$$

$$\overset{x_{\text{O}}=y_{\text{O}}=0}{\Longleftrightarrow} (\beta+\lambda\alpha)0+(\alpha+\lambda\beta)0-\alpha\beta-\lambda\alpha\beta=0 \Leftrightarrow -\alpha\beta(1+\lambda)=0$$

$$\overset{-\alpha\beta\neq 0}{\Longleftrightarrow} 1+\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=-1$$

$\text{Αν } \lambda=-1$ *η εξίσωση της ευθείας* $(\varepsilon)$ *γίνεται:*

$$(\beta+\lambda\alpha)x+(\alpha+\lambda\beta)y-\alpha\beta-\lambda\alpha\beta=0 \overset{\lambda=-1}{\Longleftrightarrow}$$

$$(\beta-\alpha)x+(\alpha-\beta)y-\alpha\beta-(-1)\alpha\beta=0 \overset{\alpha-\beta=-(\beta-\alpha)}{\Longleftrightarrow}$$

$$(\beta-\alpha)x-(\beta-\alpha)y-\alpha\beta+\alpha\beta=0 \Leftrightarrow$$

$$(\beta-\alpha)x-(\beta-\alpha)y=0 \Leftrightarrow (\beta-\alpha)(x-y)=0 \overset{\beta\neq\alpha \Rightarrow \beta-\alpha\neq 0}{\Longleftrightarrow}$$

$$x-y=0 \Leftrightarrow y=x$$