ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

1.

$\Delta \acute{\iota}\nu o\nu\tau\alpha\iota\ o\iota\ \varepsilon\upsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\varepsilon\varsigma\ (\varepsilon_1): 4x-3y-9=0\ \kappa\alpha\iota\ (\varepsilon_2): 4x-3y-24=0$

(I) Να αποδείξετε ότι $(\varepsilon_1)//(\varepsilon_2)$

(II) Να υπολογίσετε την απόσταση των ευθειών $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$

(I)

Αν $(\varepsilon): \mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0$ με $\mathrm{B}\neq 0$ τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της (ε) δίνεται απο την σχέση $\lambda=-\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$

Αν $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2) \nparallel y'y$ με

λ_{ε_1} : Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ε_1)

λ_{ε_2} : Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ε_2)

Τότε ισχύει η ισοδυναμία :

$\lambda_{\varepsilon_1}=\lambda_{\varepsilon_2}=-1 \Leftrightarrow (\varepsilon_1)//(\varepsilon_2)$

$(\varepsilon_1): 4x-3y-9=0$

$(\varepsilon_2): 4x-3y-24=0$

$$\lambda_{\varepsilon_1}=-\frac{\mathrm{A}_1}{\mathrm{B}_1}=-\frac{4}{-3}=\frac{4}{3}$$

$$\lambda_{\varepsilon_2}=-\frac{\mathrm{A}_2}{\mathrm{B}_2}=-\frac{4}{-3}=\frac{4}{3}$$

Επειδή $\lambda_{\varepsilon_1}=\lambda_{\varepsilon_2}$ θα έχω $(\varepsilon_1)//(\varepsilon_2)$

(II) Απόσταση δυο παράλληλων ευθειών είναι το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος που είναι κάθετο στις δυο παράλληλες και περιέχεται μεταξύ των δυο παραλλήλων.

<u>$\text{Οπότε για να βρώ την απόσταση των δυο παραλλήλων}$</u>

<u>$\text{επιλέγω ένα σημείο πάνω σε μια απο τις δυο παράλληλες}$</u>

<u>$\text{και παίρνω τηναπόσταση αυτού του σημείου απο την}$</u>

<u>άλλη παράλληλο</u>

$\text{Έστω } \mathrm{M}(x_0, y_0) \in (\varepsilon_1) \text{ τότε θα έχω}:$

$d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = d(\mathrm{M}, \varepsilon_2)$

$d(\varepsilon_1, \varepsilon_2): \text{Η απόσταση των παραλλήλων ευθειών } (\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$

$d(\mathrm{M}, \varepsilon_2): \text{Η απόσταση του σημείου Μ απο την } (\varepsilon_2)$

$\mathrm{M}(x_0, y_0) \in (\varepsilon_1) \Leftrightarrow 4x_0 - 3y_0 - 9 = 0 \Leftrightarrow \boxed{4x_0 - 3y_0 = 9} (1)$

$\text{Έστω ευθεία } (\varepsilon): \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma = 0 \text{ με } |\mathrm{A}| + |\mathrm{B}| \neq 0 \text{ τότε η}$
$\text{αποσταση του σημείου } \mathrm{M}(x_0, y_0) \text{ απο την ευθεία } (\varepsilon)$
$\text{δίνεται απο την σχέση}:$

$$d(\mathrm{M}, \varepsilon) = \frac{|\mathrm{A}x_0 + \mathrm{B}y_0 + \Gamma|}{\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2}}$$

$d(\mathrm{M}, \varepsilon): \text{Η απόσταση του σημείου Μ απο την ευθεία } (\varepsilon)$

$$d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = d(\mathrm{M}, \varepsilon_2) = \frac{|4x_0 - 3y_0 - 24|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} \overset{\text{Θέτω}: 4x_0 - 3y_0 = 9}{=} \frac{|9 - 24|}{\sqrt{16 + 9}} =$$

$$= \frac{|-15|}{\sqrt{25}} = \frac{15}{5} = 3\mu.\mu$$

$(\mu.\mu: \text{Μονάδες μήκους})$

2.

$\text{Ποιο σημείο της ευθείας } 2x - 3y = 30 \text{ ισαπέχει απο τα σημεία}$
$\mathrm{A}(1,3) \text{ και } \mathrm{B}(7,9);$

$(\varepsilon): 2x - 3y = 30$

$\text{Έστω } \mathrm{M}(\alpha, \beta) \text{ το ζητούμενο σημείο. Επειδή } \mathrm{M}(\alpha, \beta) \in (\varepsilon) \text{ θα}$
$\text{έχω}:$

$\boxed{2\alpha - 3\beta = 30}\ (1)$

$$\boxed{AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2},\ A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)}$$

$AM = BM \Leftrightarrow$

$$\sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = \sqrt{(x_M - x_B)^2 + (y_M - y_B)^2} \overset{\substack{M(\alpha,\beta)\\ A(1,3),B(7,9)}}{\Longleftrightarrow}$$

Αν $\alpha,\beta \geq 0$ τότε ισχύει η ισοδυναμία: $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^2 = \beta^2$

$$\sqrt{(\alpha-1)^2 + (\beta-3)^2} = \sqrt{(\alpha-7)^2 + (\beta-9)^2} \Longleftrightarrow$$

Αν $\alpha \geq 0$ τότε ισχύει: $\left(\sqrt{\alpha}\right)^2 = \alpha$

$$\left[\sqrt{(\alpha-1)^2 + (\beta-3)^2}\right]^2 = \left[\sqrt{(\alpha-7)^2 + (\beta-9)^2}\right]^2 \Longleftrightarrow$$

$\alpha - 1 = (\alpha - 7) + 6$
$\beta - 9 = (\beta - 3) - 6$

$$(\alpha-1)^2 + (\beta-3)^2 = (\alpha-7)^2 + (\beta-9)^2 \Longleftrightarrow$$

$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

$$\left[(\alpha-7)+6\right]^2 + (\beta-3)^2 = (\alpha-7)^2 + \left[(\beta-3)-6\right]^2 \Longleftrightarrow$$

$$\cancel{(\alpha-7)^2} + 2(\alpha-7)6 + \cancel{6^2} + \cancel{(\beta-3)^2} =$$

$$\cancel{(\alpha-7)^2} + \cancel{(\beta-3)^2} - 2(\beta-3)6 + \cancel{6^2} \overset{a+x=a+y \Leftrightarrow x=y}{\Longleftrightarrow}$$

Αν $\alpha \neq 0$ τότε ισχύει η ισοδυναμία: $\alpha x = \alpha y \Leftrightarrow x = y$

$$\cancel{2 \cdot 6}\,(\alpha-7) = \cancel{2 \cdot 6}\left[-(\beta-3)\right] \Longleftrightarrow \quad \alpha - 7 = -(\beta-3) \Leftrightarrow$$

$$\alpha - 7 = -\beta + 3 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 7 + 3 \Leftrightarrow \boxed{\alpha + \beta = 10}\ (2)$$

Απο τις σχέσεις $(1),(2)$ *θα έχω το σύστημα:*

Πολλαπλασιάζω την δεύτερη εξίσωση με το -2 για να προκύψουν αντίθετοι συντελεστές για το α!!!

$$\begin{Bmatrix} 2\alpha - 3\beta = 30 \\ \alpha + \beta = 10 \end{Bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{Bmatrix} 2\alpha - 3\beta = 30 \\ -2(\alpha+\beta) = -2 \cdot 10 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2\alpha - 3\beta = 30 \\ -2\alpha - 2\beta = -20 \end{cases}$$

$\Pi\rho o\sigma\theta\acute{\varepsilon}\tau\omega$ *κατά μέλη τις σχέσεις* $2\alpha - 3\beta = 30$ *και* $-2\alpha - 2\beta = -20$ *τότε τα α θα απλοποιηθούν και θα προκύψει μια εξίσωση με μια μεταβλητή το* β!!!. *Επειδή όμως έχω ένα σύστημα δυο εξισώσεων με δυο μεταβλητές και θα πρέπει να οδηγηθώ σε ένα ισοδύναμο σύστημα με δυο εξισώσεις και δυο μεταβλητές θα επιλέξω ως δεύτερη εξίσωση μια οποιαδήποτε εξίσωση του συστήματος. Οπότε επιλέγω ως δεύτερη εξίσωση την* $\alpha + \beta = 10$ *γιατί είναι η ποιο απλή εξίσωση του συστήματος*

$$\begin{cases} 2\alpha - 3\beta = 30 \\ -2\alpha - 2\beta = -20 \end{cases} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \cancel{2\alpha} - 3\beta - \cancel{2\alpha} - 2\beta = 30 - 20 \\ \alpha + \beta = 10 \end{cases}$$

Απο την πρώτη εξίσωση θα βρώ την τιμή του β. Λύνω την δεύτερη εξίσωση ως προς α για να βρώ ποιο "εύκολα" την τιμή του α

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5\beta = 10 \\ \alpha = 10 - \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{-5}\beta = \cancel{-5}(-2) \\ \alpha = 10 - \beta \end{cases}$$

Αν $\alpha \neq 0$ *τότε ισχύει η ισοδυναμία:* $\alpha x = \alpha y \Leftrightarrow x = y$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -2 \\ \alpha = 10 - \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -2 \\ \alpha = 10 - (-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -2 \\ \alpha = 10 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -2 \\ \alpha = 12 \end{cases}$$

Οπότε: $\boxed{\mathrm{M}(12,-2)}$

3.

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -3$ και απέχει απο την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με 5 μονάδες.

Αν (ε) ευθεία με συντελεστή διεύθυνσης λ θα έχει εξίσωση $y = \lambda x + \mu$

Έστω (ε) ευθεία με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -3$. Τότε θα έχει εξίσωση:

$$y=\lambda x+\mu \overset{\lambda=-3}{\Longleftrightarrow} y=-3x+\mu \Leftrightarrow 3x+y-\mu=0$$

$$(\varepsilon):3x+y-\mu=0$$

$Έστω\ ευθεία\ (\varepsilon):\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0\ με\ \lvert\mathrm{A}\rvert+\lvert\mathrm{B}\rvert\neq 0\ τότε\ η$
$αποσταση\ του\ σημείου\ \mathrm{M}(x_0,y_0)\ απο\ την\ ευθεία\ (\varepsilon)$
$δίνεται\ απο\ την\ σχέση:$
$d(\mathrm{M},\varepsilon)=\dfrac{\lvert \mathrm{A}x_0+\mathrm{B}y_0+\Gamma\rvert}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}}$
$d(\mathrm{M},\varepsilon):\mathrm{H}\ απόσταση\ του\ σημείου\ \mathrm{M}\ απο\ την\ ευθεία\ (\varepsilon)$

$$d(\mathrm{O}(0,0),\varepsilon)=5\Leftrightarrow \frac{\lvert 3x_{\mathrm{O}}+y_{\mathrm{O}}-\mu\rvert}{\sqrt{3^2+1^2}}=5 \overset{x_{\mathrm{O}}=y_{\mathrm{O}}=0}{\Longleftrightarrow} \frac{\lvert 3\bullet 0+0-\mu\rvert}{\sqrt{10}}=5\Leftrightarrow$$

$$\frac{\lvert\mu\rvert}{\sqrt{10}}=5\Leftrightarrow\lvert\mu\rvert=5\sqrt{10} \overset{\lvert x\rvert=\theta\Leftrightarrow x=\pm\theta,\theta\geq 0}{\Longleftrightarrow} \mu=\pm 5\sqrt{10}$$

$\mathrm{A}ν\ \mu=5\sqrt{10}\ θα\ έχω\ την\ ευθεία:$

$$3x+y-\mu=0 \overset{\mu=5\sqrt{10}}{\Longleftrightarrow} 3x+y-5\sqrt{10}=0$$

$$(\varepsilon_1):3x+y-5\sqrt{10}=0$$

$\mathrm{A}ν\ \mu=-5\sqrt{10}\ θα\ έχω\ την\ ευθεία:$

$$3x+y-\mu=0 \overset{\mu=-5\sqrt{10}}{\Longleftrightarrow} 3x+y-\left(-5\sqrt{10}\right)=0\Leftrightarrow 3x+y+5\sqrt{10}=0$$

$$(\varepsilon_2):3x+y+5\sqrt{10}=0$$

4.

$\mathrm{H}\ ευθεία\ (\varepsilon):3x-2y+1=0\ είναι\ μεσοπαράλληλη\ δυο$
$παραλλήλων\ ευθειών\ (\varepsilon_1)\ και\ (\varepsilon_2)\ που\ απεχουν\ 8\ μονάδες.$
$\mathrm{N}α\ βρείτε\ τις\ εξισώσεις\ των\ ευθειών\ αυτών.$

$\mathrm{A}ν\ (\varepsilon):\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0\ με\ \lvert\mathrm{A}\rvert+\lvert\mathrm{B}\rvert\neq 0\ και\ (\eta)//(\varepsilon)\ τότε$
$(\eta):\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mu=0$

$\acute{E}\sigma\tau\omega\ \eta\ \varepsilon\upsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\alpha\ (\varepsilon): 3x-2y+1=0$ *είναι μεσοπαράλληλη δυο παραλλήλων ευθειών* (ε_1) *και* (ε_2) *με* $d(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=8$. Τ*ότε θα έχω*:

$$d(\varepsilon,\varepsilon_1)=\frac{d(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}{2}=\frac{8}{2}=4$$

$d(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$: Η *απόσταση των παραλλήλων ευθειών* $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$

$d(\varepsilon,\varepsilon_1)$: Η *απόσταση των παραλλήλων ευθειών* $(\varepsilon),(\varepsilon_1)$

Ε*πειδή* $(\varepsilon_1)//(\varepsilon)$ *θα έχει εξίσωση*

$(\varepsilon_1): 3x-2y+\kappa=0$

Α*πόσταση δυο παράλληλων ευθειών είναι το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος που είναι κάθετο στις δυο παράλληλες και περιέχεται μεταξύ των δυο παραλλήλων.*

Ο*πότε για να βρώ την απόσταση των δυο παραλλήλων επιλέγω ένα σημείο πάνω σε μια απο τις δυο παράλληλες και παίρνω την απόσταση αυτού του σημείου απο την άλλη παράλληλο*

Έστω $\mathrm{M}(x_0,y_0)\in(\varepsilon)$ *τότε θα έχω*:

$d(\varepsilon,\varepsilon_1)=d(\mathrm{M},\varepsilon_1)=4$

Έστω ευθεία $(\varepsilon): \mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0$ *με* $|\mathrm{A}|+|\mathrm{B}|\neq 0$ *τότε η αποσταση του σημείου* $\mathrm{M}(x_0,y_0)$ *απο την ευθεία* (ε) *δίνεται απο την σχέση*:

$$d(\mathrm{M},\varepsilon)=\frac{|\mathrm{A}x_0+\mathrm{B}y_0+\Gamma|}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}}$$

$d(\mathrm{M},\varepsilon)$: Η *απόσταση του σημείου* Μ *απο την ευθεία* (ε)

$$\mathrm{M}\left(x_0,y_0\right)\in(\varepsilon)\Leftrightarrow 3x_0-2y_0+1=0\Leftrightarrow \boxed{3x_0-2y_0=-1}\,(1)$$

$$d\left(\mathrm{M},\varepsilon_1\right)=4\Leftrightarrow \frac{\left|3x_0-2y_0+\kappa\right|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=4\overset{3x_0-2y_0=-1}{\Leftrightarrow}\frac{\left|-1+\kappa\right|}{\sqrt{13}}=4\Leftrightarrow$$

$$\left|\kappa-1\right|=4\sqrt{13}\overset{|x|=\theta\Leftrightarrow x=\pm\theta,\theta\geq 0}{\Leftrightarrow}\left\{\begin{matrix}\kappa-1=4\sqrt{13}\\ \acute{\eta}\\ \kappa-1=-4\sqrt{13}\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\kappa=1+4\sqrt{13}\\ \acute{\eta}\\ \kappa=1-4\sqrt{13}\end{matrix}\right\}$$

Οπότε έχω τις ευθείες:

$$(\varepsilon_1):3x-2y+1+4\sqrt{13}=0$$

$$(\varepsilon_2):3x-2y+1-4\sqrt{13}=0$$

5.

Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ με κορυφες τα σημεία $\mathrm{A}(-2,4),\mathrm{B}(2,-6),\Gamma(5,4)$.

$$(\mathrm{AB\Gamma})=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\right)\right|$$

$(\mathrm{AB\Gamma})$: Το εμβαδό του τριγώνου $\overset{\triangle}{\mathrm{AB\Gamma}}$

$$\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\right)=\begin{vmatrix}\text{Τετμημένη του}\,\overrightarrow{\mathrm{AB}} & \text{Τεταγμένη του}\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}\\ \text{Τετμημένη του}\,\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} & \text{Τεταγμένη του}\,\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\end{vmatrix}$$

$$\boxed{\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \delta & \gamma\end{vmatrix}=\alpha\gamma-\beta\delta}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\left(x_{\mathrm{B}}-x_{\mathrm{A}},y_{\mathrm{B}}-y_{\mathrm{A}}\right),\mathrm{A}\left(x_{\mathrm{A}},y_{\mathrm{A}}\right),\mathrm{B}\left(x_{\mathrm{B}},y_{\mathrm{B}}\right)}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\underset{\mathrm{A}(-2,4)}{\overset{\mathrm{B}(2,-6)}{=}}\left(2-(-2),-6-4\right)=\left(2+2,-10\right)=\left(4,-10\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\underset{\mathrm{A}(-2,4)}{\overset{\Gamma(5,4)}{=}}\left(5-(-2),4-4\right)=\left(5+2,0\right)=\left(7,0\right)$$

$$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)=\begin{vmatrix}\text{Τετμημένη του}\,\overrightarrow{AB} & \text{Τεταγμένη του}\,\overrightarrow{AB}\\ \text{Τετμημένη του}\,\overrightarrow{A\Gamma} & \text{Τεταγμένη του}\,\overrightarrow{A\Gamma}\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}4 & -10\\ 7 & 0\end{vmatrix}=4\bullet 0-7(-10)=70$$

$$(AB\Gamma)=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)\right| \overset{\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)=70}{=} \frac{1}{\cancel{2}_{1}}\bullet \cancel{70}^{35}=1\bullet 35=35\ \tau.\mu$$

$(\tau.\mu:\text{Τετραγωνικές μονάδες})$

6.

> *Δίνονται τα σημεία* $A(5,1)$ *και* $B(1,3)$. *Να βρείτε το σημείο* M *του άξονα* $x'x$, *για το οποίο το εμβαδόν του τριγώνου* MAB *είναι ίσο με* 7.

Έστω $M(\alpha,\beta)$ *το ζητούμενο σημείο.* *Επειδή* $M(\alpha,\beta)\in x'x$ *θα έχει τεταγμένη μηδέν. Οπότε* $\beta=0$. *Συνεπώς θα έχω*:

$$\boxed{M(\alpha,0)}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A,y_B-y_A),A(x_A,y_A),B(x_B,y_B)}$$

$$\overrightarrow{AM}\underset{A(5,1)}{\overset{M(\alpha,0)}{=}}(\alpha-5,0-1)=(\alpha-5,-1)$$

$$\overrightarrow{AB}\underset{A(5,1)}{\overset{B(1,3)}{=}}(1-5,3-1)=(-4,2)$$

$$\boxed{\begin{array}{l}(AB\Gamma)=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)\right|\\ (AB\Gamma):\text{Το εμβαδό του τριγώνου } \overset{\triangle}{AB\Gamma}\\ \det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)=\begin{vmatrix}\text{Τετμημένη του}\,\overrightarrow{AB} & \text{Τεταγμένη του}\,\overrightarrow{AB}\\ \text{Τετμημένη του}\,\overrightarrow{A\Gamma} & \text{Τεταγμένη του}\,\overrightarrow{A\Gamma}\end{vmatrix}\end{array}}$$

$$\boxed{\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \delta & \gamma\end{vmatrix}=\alpha\gamma-\beta\delta}$$

$$\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}},\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)=\begin{vmatrix}\text{Τ}\varepsilon\tau\mu\eta\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta\ \tau o\upsilon\overrightarrow{\mathrm{AM}} & \text{Τ}\varepsilon\tau\alpha\gamma\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta\ \tau o\upsilon\ \overrightarrow{\mathrm{AM}}\\ \text{Τ}\varepsilon\tau\mu\eta\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta\ \tau o\upsilon\overrightarrow{\mathrm{AB}} & \text{Τ}\varepsilon\tau\alpha\gamma\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta\ \tau o\upsilon\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{\overrightarrow{\mathrm{AM}}=(\alpha-5,-1)\\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-4,2)}}{=}\begin{vmatrix}\alpha-5 & -1\\ -4 & 2\end{vmatrix}=2(\alpha-5)-(-4)(-1)=2\alpha-10-4=$$

$$2\alpha-14=2(\alpha-7)$$

$$(\mathrm{AMB})=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}},\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)\right|\overset{\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}},\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)=2(\alpha-7)}{=}\frac{1}{2}\left|2(\alpha-7)\right|\overset{|xy|=|x||y|}{=}$$

$$\frac{1}{2}|2||\alpha-7|\overset{|x|=x\ \alpha\nu\ x\geq 0}{=}\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}|\alpha-7|=|\alpha-7|$$

$$\acute{\text{Ε}}\chi\omega:(\mathrm{AMB})=7\overset{(\mathrm{AMB})=|\alpha-7|}{\Leftrightarrow}|\alpha-7|=7\overset{|x|=\theta\Leftrightarrow x=\pm\theta,\theta\geq 0}{\Leftrightarrow}\left\{\begin{matrix}\alpha-7=7\\ \acute{\eta}\\ \alpha\cancel{-7}=\cancel{-7}\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix}\alpha=7+7\\ \acute{\eta}\\ \alpha=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\alpha=14\\ \acute{\eta}\\ \alpha=0\end{matrix}\right\}$$

Αν $\alpha=14$ θα έχω το σημείο $\mathrm{M}(14,0)$

Αν $\alpha=0$ θα το σημείο $\mathrm{O}(0,0)$ δηλαδή την αρχή των αξόνων

7.

Δίνονται τα σημεία $\mathrm{A}(3,4)$ και $\mathrm{B}(5,-2)$. Να βρείτε το σημείο M, τέτοιο ώστε $\mathrm{MA}=\mathrm{MB}$ και $(\mathrm{MAB})=10$

$$\boxed{\mathrm{AB}=\sqrt{(x_{\mathrm{B}}-x_{\mathrm{A}})^2+(y_{\mathrm{B}}-y_{\mathrm{A}})^2},\mathrm{A}(x_{\mathrm{A}},y_{\mathrm{A}}),\mathrm{B}(x_{\mathrm{B}},y_{\mathrm{B}})}$$

Έστω $\mathrm{M}(\alpha,\beta)$ το ζητούμενο σημείο.

$\mathrm{AM}=\mathrm{BM}\Leftrightarrow$

$$\sqrt{\left(x_{\mathrm{M}}-x_{\mathrm{A}}\right)^2+\left(y_{\mathrm{M}}-y_{\mathrm{A}}\right)^2}=\sqrt{\left(x_{\mathrm{M}}-x_{\mathrm{B}}\right)^2+\left(y_{\mathrm{M}}-y_{\mathrm{B}}\right)^2}\overset{\substack{\mathrm{M}(\alpha,\beta)\\ \mathrm{A}(3,4)\\ \mathrm{B}(5,-2)}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\sqrt{(\alpha-3)^2+(\beta-4)^2}=\sqrt{(\alpha-5)^2+\left[\beta-(-2)\right]^2}\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(\alpha-3)^2+(\beta-4)^2}=\sqrt{(\alpha-5)^2+(\beta+2)^2}\overset{\substack{\text{Αν } \alpha,\beta\geq 0 \text{ τότε ισχύει}\\ \text{η ισοδυναμία:}\\ \alpha=\beta\Leftrightarrow\alpha^2=\beta^2}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left[\sqrt{(\alpha-3)^2+(\beta-4)^2}\right]^2=\left[\sqrt{(\alpha-5)^2+(\beta+2)^2}\right]^2\overset{\substack{\text{Αν } \alpha\geq 0 \text{ τότε ισχύει:}\\ \left(\sqrt{\alpha}\right)^2=\alpha}}{\Longleftrightarrow}$$

$$(\alpha-3)^2+(\beta-4)^2=(\alpha-5)^2+(\beta+2)^2\overset{\substack{(x-y)^2=x^2-2xy+y^2\\ (x+y)^2=x^2+2xy+y^2}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\cancel{\alpha^2}-2\bullet\alpha\bullet3+3^2+\cancel{\beta^2}-2\bullet\beta\bullet4+4^2=$$

$$\cancel{\alpha^2}-2\bullet\alpha\bullet5+5^2+\cancel{\beta^2}+2\bullet\beta\bullet2+2^2\overset{\alpha+\beta=\alpha+\gamma\Leftrightarrow\beta=\gamma}{\Longleftrightarrow}$$

$$-6\alpha+9-8\beta+16=-10\alpha+25+4\beta+4\overset{16+9=25}{\Longleftrightarrow}$$

$$(-6\alpha-8\beta)+\cancel{25}=(-10\alpha+4\beta+4)+\cancel{25}\overset{\alpha+\beta=\alpha+\gamma\Leftrightarrow\beta=\gamma}{\Longleftrightarrow}$$

$$-6\alpha-8\beta=-10\alpha+4\beta+4\Leftrightarrow\cancel{2}(-3\alpha-4\beta)=\cancel{2}(-5\alpha+2\beta+2)$$

$$\overset{\substack{\text{Αν } \alpha\neq 0 \text{ τότε ισχύει η}\\ \text{ισοδυναμία:}\\ \alpha x=\alpha y\Leftrightarrow x=y}}{\Longleftrightarrow}\quad -3\alpha-4\beta=-5\alpha+2\beta+2\Leftrightarrow-3\alpha+5\alpha-4\beta-2\beta=2$$

$$\Leftrightarrow2\alpha-6\beta=2\Leftrightarrow\cancel{2}(\alpha-3\beta)=\cancel{2}\bullet1\overset{\substack{\text{Αν } \alpha\neq 0 \text{ τότε ισχύει η}\\ \text{ισοδυναμία:}\\ \alpha x=\alpha y\Leftrightarrow x=y}}{\Longleftrightarrow}\quad\alpha-3\beta=1\Leftrightarrow$$

$$\boxed{\alpha=3\beta+1}\,(1)$$

$\text{Οπότε}:\boxed{\mathrm{M}(3\beta+1,\beta)}$

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\left(x_{\mathrm{B}}-x_{\mathrm{A}},y_{\mathrm{B}}-y_{\mathrm{A}}\right),\mathrm{A}\left(x_{\mathrm{A}},y_{\mathrm{A}}\right),\mathrm{B}\left(x_{\mathrm{B}},y_{\mathrm{B}}\right)}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}\underset{\mathrm{A}(3,4)}{\overset{\mathrm{M}(3\beta+1,\beta)}{=}}\left(3\beta+1-3,\beta-4\right)=\left(3\beta-2,\beta-4\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\underset{\mathrm{A}(3,4)}{\overset{\mathrm{B}(5,-2)}{=}}\left(5-3,-2-4\right)=\left(2,-6\right)$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\left(\mathrm{AB\Gamma}\right)=\dfrac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\right)\right|\\ \left(\mathrm{AB\Gamma}\right):\mathrm{T}\textit{ο εμβαδό του τριγώνου }\overset{\triangle}{\mathrm{AB\Gamma}}\\ \det\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\right)=\begin{vmatrix}\mathrm{T}\textit{ετμημένη του}\,\overrightarrow{\mathrm{AB}} & \mathrm{T}\textit{εταγμένη του}\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}\\ \mathrm{T}\textit{ετμημένη του}\,\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} & \mathrm{T}\textit{εταγμένη του}\,\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\end{vmatrix}\end{array}}$$

$$\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}},\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)=\begin{vmatrix}\mathrm{T}\textit{ετμημένη του}\,\overrightarrow{\mathrm{AM}} & \mathrm{T}\textit{εταγμένη του}\,\overrightarrow{\mathrm{AM}}\\ \mathrm{T}\textit{ετμημένη του}\,\overrightarrow{\mathrm{AB}} & \mathrm{T}\textit{εταγμένη του}\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}\end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{\overrightarrow{\mathrm{AM}}=(3\beta-2,\beta-4)\\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2,-6)}}{=}\begin{vmatrix}3\beta-2 & \beta-4\\ 2 & -6\end{vmatrix}=\left(3\beta-2\right)\left(-6\right)-2\left(\beta-4\right)=$$

$$-2\bullet3\left(3\beta-2\right)-2\bullet\left(\beta-4\right)\overset{\substack{\mathrm{B}\textit{γάζω κοινό}\\ \textit{παράγοντα το }-2}}{=}-2\left[3\left(3\beta-2\right)+\beta-4\right]=$$

$$-2\left(9\beta-6+\beta-4\right)=-2\left(10\beta-10\right)\overset{\substack{\mathrm{B}\textit{γάζω κοινό}\\ \textit{παράγοντα το }10}}{=}-2\bullet10\left(\beta-1\right)=$$

$$-20\left(\beta-1\right)$$

$$\left(\mathrm{AMB}\right)=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}},\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)\right|\overset{\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}},\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)=-20(\beta-1)}{=}\frac{1}{2}\left|-20\left(\beta-1\right)\right|\overset{|xy|=|x||y|}{=}$$

$$\frac{1}{2}\left|-20\right|\left|\beta-1\right|=\frac{1}{\cancelto{1}{2}}\cancelto{10}{20}\left|\beta-1\right|=10\left|\beta-1\right|$$

$$\textit{Έχω}:\left(\mathrm{AMB}\right)=10\overset{(\mathrm{AMB})=10|\beta-1|}{\Longleftrightarrow}\cancel{10}\left|\beta-1\right|=\cancel{10}\bullet1\overset{\substack{\mathrm{A}\textit{ν } \alpha\neq0 \textit{ τότε ισχύει η}\\ \textit{ισοδυναμία}:\\ \alpha x=\alpha y\Leftrightarrow x=y}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\acute{E}\chi\omega : (\mathrm{AMB}) = 10 \overset{(\mathrm{AMB})=10|\beta-1|}{\Longleftrightarrow} \cancel{10}|\beta - 1| = \cancel{10} \cdot 1 \overset{\substack{\mathrm{A}\nu\ \alpha\neq 0\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\ \eta \\ \iota\sigma o\delta\upsilon\nu\alpha\mu\acute{\iota}\alpha: \\ \alpha x=\alpha y \Leftrightarrow x=y}}{\Longleftrightarrow}$$

$$|\beta - 1| = 1 \overset{|x|=\theta \Leftrightarrow x=\pm\theta, \theta\geq 0}{\Longleftrightarrow} \begin{Bmatrix} \beta - 1 = 1 \\ \acute{\eta} \\ \beta \cancel{-1} = \cancel{-1} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \beta = 1 + 1 \\ \acute{\eta} \\ \beta \cancel{-1} = \cancel{-1} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \beta = 2 \\ \acute{\eta} \\ \beta = 0 \end{Bmatrix}$$

$\mathrm{A}\nu\ \beta = 2\ \alpha\pi o\ \tau\eta\nu\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\eta\ (1)\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega :$

$$\alpha = 3\beta + 1 \overset{\beta=2}{=} 3 \cdot 2 + 1 = 6 + 1 = 7$$

$\Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ \tau o\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\ \mathrm{M}_1(7,2)$

$\mathrm{A}\nu\ \beta = 0\ \alpha\pi o\ \tau\eta\nu\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\eta\ (1)\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega :$

$$\alpha = 3\beta + 1 \overset{\beta=0}{=} 3 \cdot 0 + 1 = 1$$

$\Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ \tau o\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\ \mathrm{M}_2(1,0)$

8.

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, η οποία διέρχεται απο την αρχή των αξόνων και ισαπέχει απο τα σημεία $\mathrm{A}(-2,0)$ και $\mathrm{B}(0,2)$

Έστω (ε) η ζητούμενη ευθεία Διακρίνω τις περιπτώσεις :

$$\begin{Bmatrix} (\mathrm{I})(\varepsilon) // y'y \\ (\mathrm{II})(\varepsilon) \not\parallel y'y \end{Bmatrix}$$

<u>Περίπτωση (I):</u>

Επειδή $(\varepsilon) // y'y$ και διέρχεται απο την αρχή των αξόνων το σημείο $\mathrm{O}(0,0)$ θα έχει εξίσωση $x = 0$. Οπότε η ευθεία (ε) ταυτίζεται με τον άξονα $y'y$

$y'y : x = 0$

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathrm{A}\nu\ (\varepsilon)//y'y\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \eta\ \varepsilon\upsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\alpha\ (\varepsilon)\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\varepsilon\iota\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta \\ x=\boxed{\begin{array}{l}\mathrm{H}\ \tau\varepsilon\tau\mu\eta\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta\ \tau o\upsilon\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\upsilon\ \alpha\pi o\ \tau o\ o\pi o\acute{\iota}o\ \delta\iota\acute{\varepsilon}\rho\chi\varepsilon\tau\alpha\iota \\ \eta\ \varepsilon\upsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\alpha\ (\varepsilon)\end{array}}\end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\acute{E}\sigma\tau\omega\ \varepsilon\upsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\alpha\ (\varepsilon):\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0\ \mu\varepsilon\ |\mathrm{A}|+|\mathrm{B}|\neq 0\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \eta \\ \alpha\pi o\sigma\tau\alpha\sigma\eta\ \tau o\upsilon\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\upsilon\ \mathrm{M}(x_0,y_0)\ \alpha\pi o\ \tau\eta\nu\ \varepsilon\upsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\alpha\ (\varepsilon) \\ \delta\acute{\iota}\nu\varepsilon\tau\alpha\iota\ \alpha\pi o\ \tau\eta\nu\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\eta: \\ d(\mathrm{M},\varepsilon)=\dfrac{|\mathrm{A}x_0+\mathrm{B}y_0+\Gamma|}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}} \\ d(\mathrm{M},\varepsilon):\mathrm{H}\ \alpha\pi\acute{o}\sigma\tau\alpha\sigma\eta\ \tau o\upsilon\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\upsilon\ \mathrm{M}\ \alpha\pi o\ \tau\eta\nu\ \varepsilon\upsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\alpha\ (\varepsilon)\end{array}}$$

$$d\big(\mathrm{A}(-2,0),y'y\big)=\frac{|1x_{\mathrm{A}}+0y_{\mathrm{A}}+0|}{\sqrt{1^2+0^2}}\overset{\substack{x_{\mathrm{A}}=-2\\ y_{\mathrm{A}}=0}}{=}\frac{|-2|}{1}=2$$

$$d\big(\mathrm{B}(0,2),y'y\big)=\frac{|1x_{\mathrm{B}}+0y_{\mathrm{B}}+0|}{\sqrt{1^2+0^2}}\overset{\substack{x_{\mathrm{B}}=0\\ y_{\mathrm{B}}=2}}{=}\frac{|1\bullet 0+0\bullet 2+0|}{1}=0$$

Ε*πειδή* $d\big(\mathrm{A}(-2,0),y'y\big)\neq d\big(\mathrm{B}(0,2),y'y\big)$ *ο άξονας* $y'y$ *δεν είναι λύση του προβλήματος*

<u>Π*ερίπτωση* (ΙΙ):</u>

Ε*πειδή* $(\varepsilon)\not\parallel y'y$ *τότε υπάρχει ο συντελεστής διεύθυνσης* λ *της ευθείας* (ε) *και η* (ε) *διέρχεται απο την αρχή των αξόνων το σημείο* $\mathrm{O}(0,0)$.Ο*πότε η ευθεία* (ε) *έχει εξίσωση*:

$$y-y_{\mathrm{O}}=\lambda(x-x_0)\overset{\mathrm{O}(0,0)}{\Longleftrightarrow}y-0=\lambda(x-0)\Leftrightarrow y=\lambda x\Leftrightarrow \lambda x-y=0$$

$$(\varepsilon):\lambda x-y=0$$

$(\varepsilon) \not\parallel y'y$
λ: Ο *συντελεστής διευθύνσης της ευθείας*
$\mathrm{A}(x_0, y_0) \in (\varepsilon)$
Τ*ότε η ευθεία* (ε) *θα έχει εξίσωση*:
$y - y_0 = \lambda(x - x_0)$

Έστω ευθεία $(\varepsilon): \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma = 0$ *με* $\lvert \mathrm{A}\rvert + \lvert \mathrm{B}\rvert \neq 0$ *τότε η αποσταση του σημείου* $\mathrm{M}(x_0, y_0)$ *απο την ευθεία* (ε) *δίνεται απο την σχέση*:
$d(\mathrm{M},\varepsilon) = \dfrac{\lvert \mathrm{A}x_0 + \mathrm{B}y_0 + \Gamma\rvert}{\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2}}$
$d(\mathrm{M},\varepsilon)$: Η *απόσταση του σημείου* Μ *απο την ευθεία* (ε)

$$d\big(\mathrm{A}(-2,0),(\varepsilon)\big) = d\big(\mathrm{B}(0,2),(\varepsilon)\big) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\lvert \lambda x_{\mathrm{A}} - y_{\mathrm{A}}\rvert}{\cancel{\sqrt{\lambda^2 + (-1)^2}}} \overset{\substack{x_{\mathrm{A}}=-2,\, y_{\mathrm{A}}=0 \\ x_{\mathrm{B}}=0,\, y_{\mathrm{B}}=2}}{=} \frac{\lvert \lambda x_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{B}}\rvert}{\cancel{\sqrt{\lambda^2 + (-1)^2}}} \Leftrightarrow \lvert -2\lambda - 0\rvert = \lvert \lambda \bullet 0 - 2\rvert \Leftrightarrow$$

$$\lvert -2\lambda\rvert = \lvert -2\rvert \overset{\lvert xy\rvert = \lvert x\rvert\lvert y\rvert}{\Longleftrightarrow} \lvert -2\rvert\lvert \lambda\rvert = 2 \Leftrightarrow \cancel{2}\lvert \lambda\rvert = \cancel{2}\bullet 1 \overset{\substack{\text{Αν } \alpha\neq 0 \text{ τότε ισχύει η} \\ \text{ισοδυναμία:} \\ \alpha x=\alpha y \Leftrightarrow x=y}}{\Longleftrightarrow} \lvert \lambda\rvert = 1$$

$$\overset{\lvert x\rvert=\theta \Leftrightarrow x=\pm\theta,\, \theta\geq 0}{\Longleftrightarrow} (\lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -1)$$

Α*ν* $\lambda = 1$ *θα έχω την ευθεία*:

$y = x$

Α*ν* $\lambda = -1$ *θα έχω την ευθεία*:

$y = -x$

9.

Ν*α βρείτε το σημείο του άξονα* $x'x$, *το οποίο ισαπέχει απο ττην αρχή των αξόνων* Ο *και απο την ευθεία* $5x + 12y - 60 = 0$

$(\varepsilon): 5x+12y-60=0$

$\underline{\textit{Έστω}\ \mathrm{M}(\alpha,\beta)\ \textit{το ζητούμενο σημείο}}$

Επειδή το σημείο $\mathrm{M}(\alpha,\beta)$ ανήκει στον άξονα $x'x$ θα έχω $\beta=0$

Οπότε: $\boxed{\mathrm{M}(\alpha,0)}$

$$\boxed{\mathrm{AB}=\sqrt{(x_{\mathrm{B}}-x_{\mathrm{A}})^2+(y_{\mathrm{B}}-y_{\mathrm{A}})^2},\mathrm{A}(x_{\mathrm{A}},y_{\mathrm{A}}),\mathrm{B}(x_{\mathrm{B}},y_{\mathrm{B}})}$$

Έστω ευθεία $(\varepsilon): \mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0$ με $|\mathrm{A}|+|\mathrm{B}|\neq 0$ τότε η αποσταση του σημείου $\mathrm{M}(x_0,y_0)$ απο την ευθεία (ε) δίνεται απο την σχέση:

$$d(\mathrm{M},\varepsilon)=\frac{|\mathrm{A}x_0+\mathrm{B}y_0+\Gamma|}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}}$$

$d(\mathrm{M},\varepsilon)$: Η απόσταση του σημείου Μ απο την ευθεία (ε)

$\mathrm{OM}=d(\mathrm{M},\varepsilon)\Leftrightarrow$

$$\sqrt{(x_{\mathrm{M}}-x_{\mathrm{O}})^2+(y_{\mathrm{M}}-y_{\mathrm{O}})^2}=\frac{|5x_{\mathrm{M}}+12y_{\mathrm{M}}-60|}{\sqrt{5^2+12^2}}\overset{\substack{x_{\mathrm{M}}=\alpha,y_{\mathrm{M}}=0\\ x_{\mathrm{O}}=y_{\mathrm{O}}=0}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\sqrt{(\alpha-0)^2+(0-0)^2}=\frac{|5\alpha+12\bullet 0-60|}{\sqrt{25+144}}\Leftrightarrow\sqrt{\alpha^2}=\frac{|5\alpha-60|}{\sqrt{169}}\overset{\sqrt{x^2}=|x|}{\Longleftrightarrow}$$

$$|\alpha|=\frac{|5\alpha-60|}{13}\Leftrightarrow 13|\alpha|=|5\alpha-60|\overset{\substack{\text{Αν } \theta>0 \text{ θα έχω:}\\ |\theta|=\theta}}{\Longleftrightarrow}|13||\alpha|=|5\alpha-60|\overset{|xy|=|x||y|}{\Longleftrightarrow}$$

$$|13\alpha|=|5\alpha-60|\overset{|x|=|y|\Leftrightarrow(x=y\ \text{ή}\ x=-y)}{\Longleftrightarrow}\left\{\begin{matrix}5\alpha-60=13\alpha\\ \text{ή}\\ 5\alpha-60=-13\alpha\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}5\alpha-13\alpha=60\\ \text{ή}\\ 5\alpha+13\alpha=60\end{matrix}\right\}$$

$$\left\{\begin{matrix} -8\alpha = 60 \\ \acute{\eta} \\ 18\alpha = 60 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \alpha = -\dfrac{60:4}{8:4} \\ \acute{\eta} \\ \alpha = \dfrac{60:6}{18:6} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \alpha = -\dfrac{15}{2} \\ \acute{\eta} \\ \alpha = \dfrac{10}{3} \end{matrix}\right\}$$

Οπότε έχω τα σημεία $\mathrm{M}_1\left(-\dfrac{15}{2},0\right)$ και $\mathrm{M}_2\left(\dfrac{10}{3},0\right)$

10.

Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών τις οποίες διέρχονται απο το σημείο $\mathrm{M}(1,2)$ και σχηματίζουν με άξονες τρίγωνο με εμβαδό $\mathrm{E}=4$.

Έστω (ε) η ζητούμενη ευθεία

Τότε $(\varepsilon)\not\parallel y'y$ γιατί αν $(\varepsilon)//y'y$ τότε δεν θα σχηματιζόταν με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδό 4 τ.μ

(τ.μ: Τετραγωνικές μονάδες)

Επειδή $(\varepsilon)\not\parallel y'y$ η ευθεία (ε) έχει συντελεστή διεύθυνσης.

Έστω λ ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ε)

Αν $\lambda=0$ τότε $(\varepsilon)//x'x$. Οπότε δεν θα σχηματιζόταν με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδό 4 τ.μ

(τ.μ: Τετραγωνικές μονάδες)

Συνεπώς $\lambda \neq 0$

$(\varepsilon)\not\parallel y'y$
λ: Ο συντελεστής διευθύνσης της ευθείας
$\mathrm{A}(x_0,y_0)\in(\varepsilon)$
Τότε η ευθεία (ε) θα έχει εξίσωση:
$y-y_0=\lambda(x-x_0)$

$\text{Επειδή η ευθεία } (\varepsilon) \text{ έχει συντελεστή διεύθυνσης } \lambda \text{ και}$
$\text{διέρχεται απο το σημείο } \mathrm{M}(1,2) \text{ θα έχει εξίσωση :}$

$$y - y_{\mathrm{M}} = \lambda(x - x_{\mathrm{M}}) \overset{x_{\mathrm{M}}=1, y_{\mathrm{M}}=2}{\Longleftrightarrow} y - 2 = \lambda(x-1) \Leftrightarrow y - 2 = \lambda x - \lambda \Leftrightarrow$$
$$y = \lambda x - \lambda + 2$$
$$(\varepsilon): y = \lambda x - \lambda + 2$$

$\underline{\mathrm{A}\nu \ \mathrm{A}(x,y) \in (\varepsilon) \cap x'x}$

$$\mathrm{A}(x,y) \in (\varepsilon) \cap x'x \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \mathrm{A}(x,y) \in (\varepsilon) \\ \mathrm{A}(x,y) \in x'x \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y = \lambda x - \lambda + 2 \\ y = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} \lambda x - \lambda + 2 = 0 \\ y = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \lambda x = \lambda - 2 \\ y = 0 \end{Bmatrix} \overset{\lambda \neq 0}{\Longleftrightarrow} \begin{Bmatrix} x = \dfrac{\lambda - 2}{\lambda} \\ y = 0 \\ \lambda \neq 0 \end{Bmatrix}$$

$\text{Οπότε η ευθεία } (\varepsilon) \text{ τέμνει τον άξονα } x'x \text{ στο σημείο}$

$$\mathrm{A}\left(\frac{\lambda - 2}{\lambda}, 0\right) \text{ με } \lambda \neq 0$$

$\underline{\mathrm{A}\nu \ \mathrm{B}(x,y) \in (\varepsilon) \cap y'y}$

$$\mathrm{A}(x,y) \in (\varepsilon) \cap y'y \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \mathrm{A}(x,y) \in (\varepsilon) \\ \mathrm{A}(x,y) \in y'y \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y = \lambda x - \lambda + 2 \\ x = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} y = \lambda \bullet 0 - \lambda + 2 \\ x = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y = -(\lambda - 2) \\ x = 0 \end{Bmatrix}$$

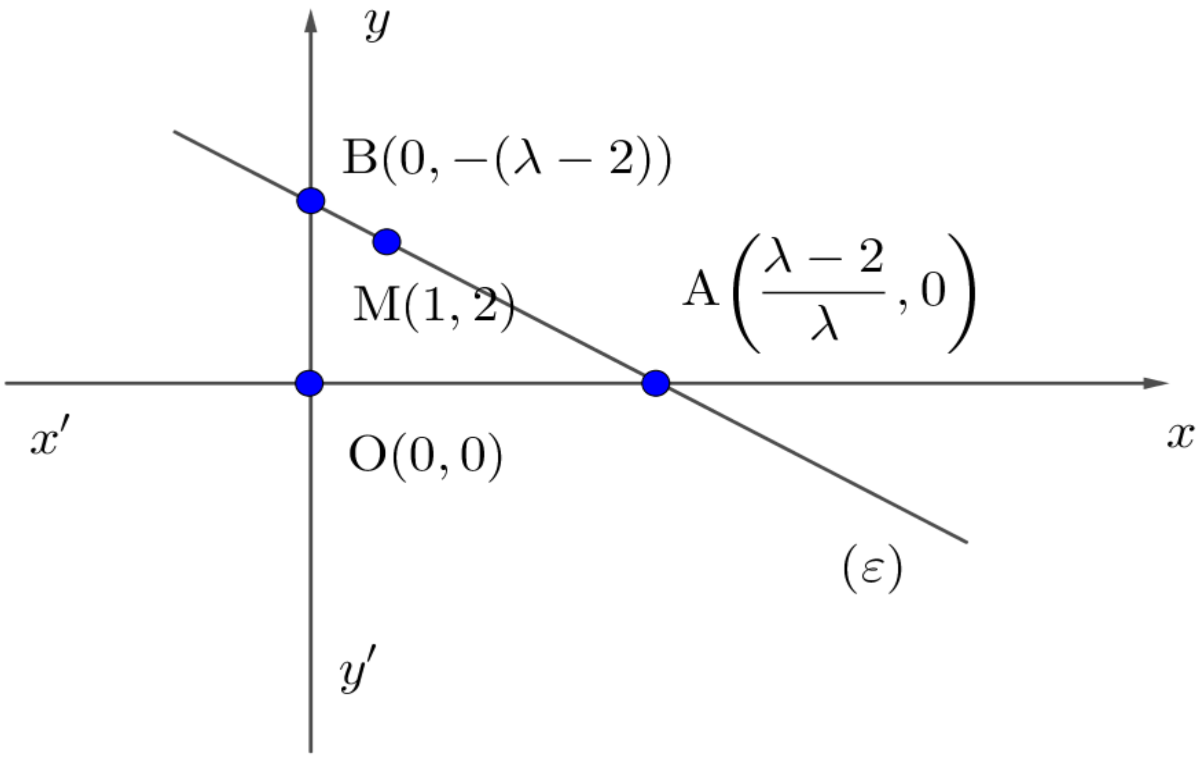
$\text{Οπότε η ευθεία } (\varepsilon) \text{ τέμνει τον άξονα } y'y \text{ στο σημείο}$

$$\mathrm{B}(0, -(\lambda - 2))$$

$\Theta\alpha$ *πρέπει να ορίζεται τρίγωνο* OAB *θα πρέπει τα σημεία* $\mathrm{O,A,B}$ *να είναι ανα δυο διακεκριμένα.Οπότε θα έχω*:

$$\mathrm{O}(0,0) \neq \mathrm{A}\left(\frac{\lambda-2}{\lambda},0\right) \neq \mathrm{B}(0,-(\lambda-2)) \neq \mathrm{O}(0,0), \lambda \neq 0$$

$$\begin{Bmatrix} \lambda-2 \neq 0 \\ \lambda \neq 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \lambda \neq 2 \\ \lambda \neq 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \lambda \neq 0,2$$



$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\left(x_{\mathrm{B}}-x_{\mathrm{A}},y_{\mathrm{B}}-y_{\mathrm{A}}\right),\mathrm{A}\left(x_{\mathrm{A}},y_{\mathrm{A}}\right),\mathrm{B}\left(x_{\mathrm{B}},y_{\mathrm{B}}\right)}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\underset{\mathrm{O}(0,0)}{\overset{\mathrm{A}\left(\frac{\lambda-2}{\lambda},0\right)}{=}}\left(\frac{\lambda-2}{\lambda}-0,0-0\right)=\left(\frac{\lambda-2}{\lambda},0\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\underset{\mathrm{O}(0,0)}{\overset{\mathrm{B}(0,-(\lambda-2))}{=}}\left(0-0,0-\left[-(\lambda-2)\right]\right)=(0,\lambda-2)$$

$$\boxed{\begin{array}{l}(\mathrm{AB\Gamma})=\dfrac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\right)\right| \\ (\mathrm{AB\Gamma}):\mathrm{T}\textit{ο εμβαδό του τριγώνου } \overset{\triangle}{\mathrm{AB\Gamma}} \\ \det\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\right)=\begin{vmatrix}\mathrm{T}\textit{ετμημένη του}\overrightarrow{\mathrm{AB}} & \mathrm{T}\textit{εταγμένη του } \overrightarrow{\mathrm{AB}} \\ \mathrm{T}\textit{ετμημένη του}\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} & \mathrm{T}\textit{εταγμένη του } \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\end{vmatrix}\end{array}}$$

$$\det\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)=\begin{vmatrix}\mathrm{T}\textit{ετμημένη του}\overrightarrow{\mathrm{OA}} & \mathrm{T}\textit{εταγμένη του } \overrightarrow{\mathrm{OA}} \\ \mathrm{T}\textit{ετμημένη του}\overrightarrow{\mathrm{OB}} & \mathrm{T}\textit{εταγμένη του } \overrightarrow{\mathrm{OB}}\end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\left(\frac{\lambda-2}{\lambda},0\right)\\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}=(0,\lambda-2)}}{=}\begin{vmatrix}\dfrac{\lambda-2}{\lambda} & 0 \\ 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=\frac{\lambda-2}{\lambda}(\lambda-2)-0\bullet 0=\frac{(\lambda-2)^2}{\lambda}$$

$$(\mathrm{OAB})=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\right|\overset{\det\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)=\frac{(\lambda-2)^2}{\lambda}}{=}\frac{1}{2}\left|\frac{(\lambda-2)^2}{\lambda}\right|\overset{\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|},y\neq 0}{=}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\left|(\lambda-2)^2\right|}{|\lambda|}\overset{\substack{(\lambda-2)^2\geq 0\Rightarrow\\ \left|(\lambda-2)^2\right|=(\lambda-2)^2}}{=}\frac{1}{2}\frac{(\lambda-2)^2}{|\lambda|}=\frac{(\lambda-2)^2}{2|\lambda|}$$

$$\textit{Έχω}:(\mathrm{OAB})=4\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{r}\dfrac{(\lambda-2)^2}{2|\lambda|}=4 \\ \lambda\neq 0,2\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}(\lambda-2)^2=8|\lambda| \\ \lambda\neq 0,2\end{array}\right\}$$

$$\Delta\iota\alpha\kappa\rho\acute{\iota}\nu\omega\ \tau\iota\varsigma\ \pi\varepsilon\rho\iota\pi\tau\acute{\omega}\sigma\varepsilon\iota\varsigma:\begin{Bmatrix}(\mathrm{I})\,\lambda>0\\(\mathrm{II})\,\lambda<0\end{Bmatrix}$$

$\Pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\pi\tau\omega\sigma\eta\ (\mathrm{I})$:

$$\begin{Bmatrix}(\lambda-2)^2=8|\lambda|\\\lambda\neq 0,2\\\lambda>0\end{Bmatrix}\overset{\substack{\lambda>0\Rightarrow|\lambda|=\lambda\\(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2}}{\Longleftrightarrow}\begin{Bmatrix}\lambda^2-2\bullet\lambda\bullet 2+2^2=8\lambda\\\lambda\neq 0,2\\\lambda>0\end{Bmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\lambda^2-4\lambda+4-8\lambda=0\\\lambda\neq 0,2\\\lambda>0\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}\lambda^2-12\lambda+4=0\,(1)\\\lambda\neq 0,2\\\lambda>0\end{Bmatrix}$$

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-12)^2-4\bullet 4\bullet 1=144-16=128>0$$

$\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \Delta>0\ \eta\ \delta\varepsilon\upsilon\tau\varepsilon\rho o\beta\acute{\alpha}\theta\mu\iota\alpha\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta\ (1)\ \acute{\varepsilon}\chi\varepsilon\iota\ \delta\upsilon o\ \rho\acute{\iota}\zeta\varepsilon\varsigma$
$\pi\rho\alpha\gamma\mu\alpha\tau\iota\kappa\acute{\varepsilon}\varsigma\ \kappa\alpha\iota\ \acute{\alpha}\nu\iota\sigma\varepsilon\varsigma$:

$$\lambda_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-12)\pm\sqrt{128}}{2\bullet 1}\overset{128=2\bullet 64}{=}\frac{12\pm\sqrt{2\bullet 64}}{2}\overset{\sqrt{\alpha\beta}=\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta},\alpha,\beta\geq 0}{=}$$

$$\frac{12\pm\sqrt{2}\sqrt{64}}{2}=\frac{12\pm 8\sqrt{2}}{2}=\frac{\overset{2}{\cancel{4}}\left(3\pm 2\sqrt{2}\right)}{\underset{1}{\cancel{2}}}=2\left(3\pm 2\sqrt{2}\right)=\begin{matrix}\nearrow 2\left(3+2\sqrt{2}\right)\\\searrow 2\left(3-2\sqrt{2}\right)\end{matrix}$$

$\mathrm{A}\nu\ \lambda=2\left(3+2\sqrt{2}\right)\ \acute{\eta}\ \lambda=2\left(3-2\sqrt{2}\right)\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \lambda\ \acute{\alpha}\rho\rho\eta\tau o\varsigma\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma$

$\lambda\neq 0\ \kappa\alpha\iota\ \lambda\neq 2.\ \mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ o\iota\ \tau\iota\mu\acute{\varepsilon}\varsigma\ \tau o\upsilon\ \lambda=3\pm 2\sqrt{2}\ \gamma\acute{\iota}\nu o\nu\tau\alpha\iota\ \delta\varepsilon\kappa\tau\acute{\varepsilon}\varsigma.$

$\mathrm{A}\nu\ \lambda=2\left(3+2\sqrt{2}\right)\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ \tau\eta\nu\ \varepsilon\upsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\alpha$:

$$y=\lambda x-\lambda+2\overset{\lambda=2\left(3+2\sqrt{2}\right)}{\Longleftrightarrow}y=2\left(3+2\sqrt{2}\right)x-2\left(3+2\sqrt{2}\right)+2$$

$$\overset{\mathrm{B}\gamma\acute{\alpha}\zeta\omega\ \kappa o\iota\nu\acute{o}\ \pi\alpha\rho\acute{\alpha}\gamma o\nu\tau\alpha\ \tau o\ 2}{\Longleftrightarrow}\quad y=2\left[\left(3+2\sqrt{2}\right)x-\left(3+2\sqrt{2}\right)+1\right]\Leftrightarrow$$

$$y=2\left[\left(3+2\sqrt{2}\right)x-3-2\sqrt{2}+1\right]\Leftrightarrow y=2\left[\left(3+2\sqrt{2}\right)x-2-2\sqrt{2}\right]$$

$$\left(\varepsilon_1\right):y=2\left[\left(3+2\sqrt{2}\right)x-2-2\sqrt{2}\right]$$

$\text{Αν } \lambda=2\left(3-2\sqrt{2}\right)\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ \tau\eta\nu\ \varepsilon\upsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\alpha:$

$$y=\lambda x-\lambda+2 \overset{\lambda=2\left(3-2\sqrt{2}\right)}{\Longleftrightarrow} y=2\left(3-2\sqrt{2}\right)x-2\left(3-2\sqrt{2}\right)+2$$

$$\underset{\text{Βγάζω κοινό παράγοντα το 2}}{\Longleftrightarrow} \quad y=2\left[\left(3-2\sqrt{2}\right)x-\left(3-2\sqrt{2}\right)+1\right]\Leftrightarrow$$

$$y=2\left[\left(3-2\sqrt{2}\right)x-3+2\sqrt{2}+1\right]\Leftrightarrow y=2\left[\left(3+2\sqrt{2}\right)x-2+2\sqrt{2}\right]$$

$$\left(\varepsilon_2\right):y=2\left[\left(3-2\sqrt{2}\right)x-2+2\sqrt{2}\right]$$

$\Pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\pi\tau\omega\sigma\eta\ (\text{II}):$

$$\left\{\begin{array}{l}(\lambda-2)^2=8|\lambda|\\ \lambda\neq 0,2\\ \lambda<0\end{array}\right\} \overset{\substack{\lambda<0\Rightarrow|\lambda|=-\lambda\\ (\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{l}\lambda^2-2\bullet\lambda\bullet 2+2^2=-8\lambda\\ \lambda<0\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}\lambda^2-4\lambda+4+8\lambda=0\\ \lambda<0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\lambda^2+4\lambda+4=0\\ \lambda<0\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}\lambda^2+2\bullet\lambda\bullet 2+2^2=0\\ \lambda<0\end{array}\right\} \overset{(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{l}(\lambda+2)^2=0\\ \lambda<0\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}\lambda+2=0\\ \lambda<0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\lambda=-2\left(\Delta\varepsilon\kappa\tau\acute{\eta}\right)\\ \lambda<0\end{array}\right\}\Leftrightarrow \lambda=-2$$

$\text{Αν } \lambda=-2\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ \tau\eta\nu\ \varepsilon\upsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\alpha:$

$$y=\lambda x-\lambda+2\overset{\lambda=-2}{\Longleftrightarrow}y=-2x-(-2)+2\Leftrightarrow y=-2x+2+2\Leftrightarrow$$

$$y=-2x+4$$

$$\left(\varepsilon_3\right):y=-2x+4$$

11.

$\text{N}\alpha$ *βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών οι οποίες διέρχονται απο την αρχή των αξόνων* O *και απέχουν απο το σημείο* $\text{A}(-1,3)$ *απόσταση ίση με* 1.

Έστω (ε) *η ζητούμενη ευθεία* Δ*ιακρίνω τις περιπτώσεις* :

$$\begin{Bmatrix} (\text{I})(\varepsilon)//y'y \\ (\text{II})(\varepsilon)\not{/\!/}\,y'y \end{Bmatrix}$$

<u>Π*ερίπτωση* (I):</u>

Ε*πειδή* $(\varepsilon)//y'y$ *και διέρχεται απο την αρχή των αξόνων το σημείο* $\text{O}(0,0)$ *θα έχει εξίσωση* $x=0$.Ο*πότε η ευθεία* (ε) *ταυτίζεται με τον άξονα* $y'y$

$y'y: x=0$

A*ν* $(\varepsilon)//y'y$ *τότε η ευθεία* (ε) *θα έχει εξίσωση*	
$x=$	Η *τετμημένη του σημείου απο το οποίο διέρχεται η ευθεία* (ε)

Έστω ευθεία $(\varepsilon): \text{A}x+\text{B}y+\Gamma=0$ *με* $\lvert\text{A}\rvert+\lvert\text{B}\rvert\neq 0$ *τότε η αποσταση του σημείου* $\text{M}(x_0,y_0)$ *απο την ευθεία* (ε) *δίνεται απο την σχέση* :
$d(\text{M},\varepsilon)=\dfrac{\lvert\text{A}x_0+\text{B}y_0+\Gamma\rvert}{\sqrt{\text{A}^2+\text{B}^2}}$
$d(\text{M},\varepsilon)$: Η *απόσταση του σημείου* M *απο την ευθεία* (ε)

$$d\big(\text{A}(-1,3),y'y\big)=\frac{\lvert 1x_\text{A}+0y_\text{A}+0\rvert}{\sqrt{1^2+0^2}}\overset{\substack{x_\text{A}=-1\\ y_\text{A}=3}}{=}\frac{\lvert -1\rvert}{1}=1$$

Άρα ο άξονας $y'y$ *είναι λύση του προβλήματος*

<u>$\Pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\pi\tau\omega\sigma\eta\ (\mathrm{II})$:</u>

$\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ (\varepsilon)\not\parallel y'y$ τότε υπάρχει ο συντελεστής διεύθυνσης λ της ευθείας (ε) και η (ε) διέρχεται απο την αρχή των αξόνων το σημείο $\mathrm{O}(0,0)$. Οπότε η ευθεία (ε) έχει εξίσωση:

$$y-y_{\mathrm{O}}=\lambda(x-x_0)\overset{\mathrm{O}(0,0)}{\Longleftrightarrow}y-0=\lambda(x-0)\Leftrightarrow y=\lambda x\Leftrightarrow \lambda x-y=0$$

$(\varepsilon):\lambda x-y=0$

Έστω ευθεία $(\varepsilon):\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0$ με $\lvert\mathrm{A}\rvert+\lvert\mathrm{B}\rvert\neq 0$ τότε η αποσταση του σημείου $\mathrm{M}(x_0,y_0)$ απο την ευθεία (ε) δίνεται απο την σχέση:
$d(\mathrm{M},\varepsilon)=\dfrac{\lvert\mathrm{A}x_0+\mathrm{B}y_0+\Gamma\rvert}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}}$
$d(\mathrm{M},\varepsilon)$: Η απόσταση του σημείου M απο την ευθεία (ε)

$$d\big(\mathrm{A}(-1,3),(\varepsilon)\big)=1\Leftrightarrow\frac{\lvert\lambda x_{\mathrm{A}}-y_{\mathrm{A}}\rvert}{\sqrt{\lambda^2+(-1)^2}}=1\overset{\substack{x_{\mathrm{A}}=-1\\ y_{\mathrm{A}}=3}}{\Longleftrightarrow}\frac{\lvert-\lambda-3\rvert}{\sqrt{\lambda^2+1}}=1\overset{-\lambda-3=-(\lambda=3)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\frac{\lvert-(\lambda+3)\rvert}{\sqrt{\lambda^2+1}}=1\overset{\lvert-\alpha\rvert=\lvert\alpha\rvert}{\Longleftrightarrow}\frac{\lvert\lambda+3\rvert}{\sqrt{\lambda^2+1}}=1\Leftrightarrow\lvert\lambda+3\rvert=\sqrt{\lambda^2+1}\overset{\substack{\text{Αν } \alpha,\beta\geq 0 \text{ τότε ισχύει η}\\ \text{ισοδυναμία:}\\ \alpha=\beta\Leftrightarrow\alpha^2=\beta^2}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\lvert\lambda+3\rvert^2=\left(\sqrt{\lambda^2+1}\right)^2\overset{\substack{\lvert\alpha\rvert^2=\alpha^2\\ (\sqrt{\alpha})^2=\alpha,\alpha\geq 0}}{\Longleftrightarrow}(\lambda+3)^2=\lambda^2+1\overset{(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2}{\Longleftrightarrow}$$

$$\cancel{\lambda^2}+2\cdot\lambda\cdot 3+3^2=\cancel{\lambda^2}+1\overset{\alpha+\beta=\alpha+\gamma\Leftrightarrow\beta=\gamma}{\Longleftrightarrow}6\lambda+9=1\Leftrightarrow 6\lambda=1-9\Leftrightarrow$$

$$6\lambda=-8\Leftrightarrow\cancel{2}\cdot 3\lambda=\cancel{2}(-4)\overset{\substack{\text{Αν } \alpha\neq 0 \text{ τότε ισχύει}\\ \text{η ισοδυναμία:}\\ \alpha x=\alpha y\Leftrightarrow x=y}}{\Longleftrightarrow}3\lambda=-4\Leftrightarrow\lambda=-\frac{4}{3}$$

$\text{Τ}\acute{o}\tau\varepsilon\ \eta\ \varepsilon\upsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\alpha\ (\varepsilon)\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\varepsilon\iota\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta:$

$$\lambda x - y = 0 \overset{\lambda=-\frac{4}{3}}{\Longleftrightarrow} -\frac{4}{3}x - y = 0 \Leftrightarrow -\left(\frac{4}{3}x + y\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{3}x + y = 0 \Leftrightarrow$$

$$3\left(\frac{4}{3}x + y\right) = 3\cdot 0 \Leftrightarrow \cancel{3}\frac{4}{\cancel{3}}x + 3y = 0 \Leftrightarrow 4x + 3y = 0$$

$(\varepsilon): 4x + 3y = 0$

12.

$\text{Ν}\alpha$ *βρεθούν τα σημεία της ευθείας* $x - y + 2 = 0,$ *τα οποία απέχουν απο την ευθεία* $12x - 5y + 60 = 0$ *απόσταση ίση με* $1.$

$(\varepsilon): x - y + 2 = 0$

$(\eta): 12x - 5y + 60 = 0$

<u>*Έστω* $\text{Μ}(\alpha,\beta)$ *το ζητούμενο σημείο.*</u> Ε*πειδή* $\text{Μ}(\alpha,\beta) \in (\varepsilon)$ *θα έχω*:

$$x_{\text{Μ}} - y_{\text{Μ}} + 2 = 0 \overset{\substack{x_{\text{Μ}}=\alpha \\ y_{\text{Μ}}=\beta}}{\Longleftrightarrow} \alpha - \beta + 2 = 0 \Leftrightarrow \beta = \alpha + 2$$

Ο*πότε*: $\boxed{\text{Μ}(\alpha, \alpha+2)}$

Έστω ευθεία $(\varepsilon): \text{Α}x + \text{Β}y + \Gamma = 0$ *με* $\lvert\text{Α}\rvert + \lvert\text{Β}\rvert \neq 0$ *τότε η αποσταση του σημείου* $\text{Μ}(x_0, y_0)$ *απο την ευθεία* (ε) *δίνεται απο την σχέση*: $d(\text{Μ},\varepsilon) = \dfrac{\lvert \text{Α}x_0 + \text{Β}y_0 + \Gamma \rvert}{\sqrt{\text{Α}^2 + \text{Β}^2}}$ $d(\text{Μ},\varepsilon)$: Η *απόσταση του σημείου* Μ *απο την ευθεία* (ε)

$$d(\text{Μ},(\eta)) = 1 \Leftrightarrow \frac{\lvert 12x_{\text{Μ}} - 5y_{\text{Μ}} + 60\rvert}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} = 1 \overset{\substack{x_{\text{Μ}}=\alpha \\ y_{\text{Μ}}=\alpha+2}}{\Longleftrightarrow} \frac{\lvert 12\alpha - 5(\alpha+2) + 60\rvert}{\sqrt{144+25}} = 1$$

$$\frac{|12\alpha - 5\alpha - 10 + 60|}{\sqrt{169}} = 1 \Leftrightarrow \frac{|7\alpha + 50|}{13} = 1 \Leftrightarrow |7\alpha + 50| = 13 \overset{|x|=\theta \Leftrightarrow x=\pm\theta, \theta \geq 0}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left\{\begin{matrix} 7\alpha + 50 = 13 \\ \acute{\eta} \\ 7\alpha + 50 = -13 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} 7\alpha = 13 - 50 \\ \acute{\eta} \\ 7\alpha = -13 - 50 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} 7\alpha = -37 \\ \acute{\eta} \\ 7\alpha = -63 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix} \alpha = -\dfrac{37}{7} \\ \acute{\eta} \\ \cancel{7}\alpha = \cancel{7}(-9) \end{matrix}\right\} \overset{\substack{\mathrm{A}\nu\ \alpha \neq 0\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota \\ \eta\ \iota\sigma o\delta\upsilon\nu\alpha\mu\acute{\iota}\alpha: \\ \alpha x = \alpha y \Leftrightarrow x = y}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{matrix} \alpha = -\dfrac{37}{7} \\ \acute{\eta} \\ \alpha = -9 \end{matrix}\right\}$$

$\mathrm{A}\nu\ \alpha = -\dfrac{37}{7}\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$x_{\mathrm{M}} = \alpha = -\dfrac{37}{7}$

$y_{\mathrm{M}} = \alpha + 2 = -\dfrac{37}{7} + \dfrac{14}{7} = -\dfrac{23}{7}$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ \tau o\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\ \mathrm{M}_1\left(-\dfrac{37}{7}, -\dfrac{23}{7}\right)$

$\mathrm{A}\nu\ \alpha = -9\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$x_{\mathrm{M}} = \alpha = -9$

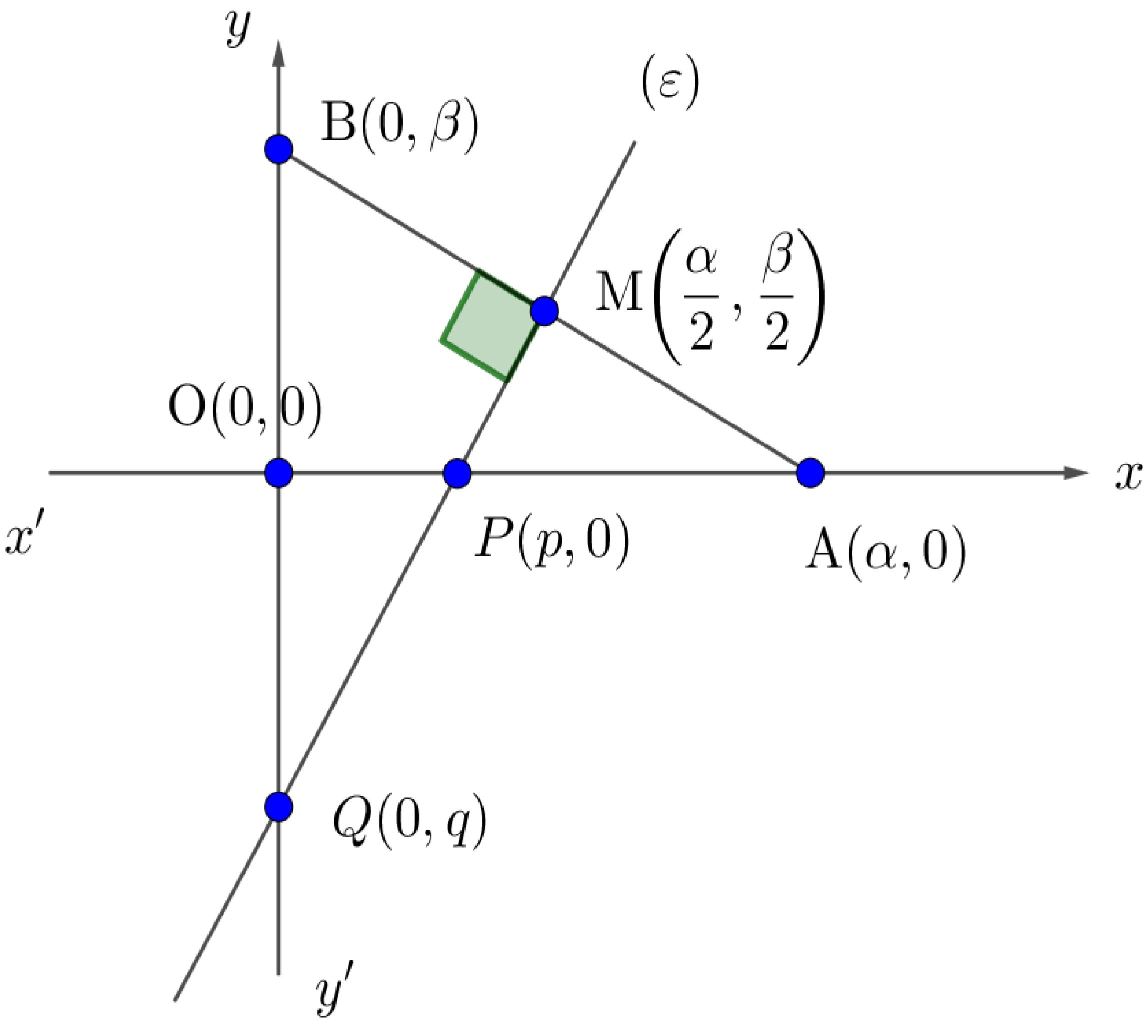
$y_{\mathrm{M}} = \alpha + 2 = -9 + 2 = -7$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ \tau o\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\ \mathrm{M}_2(-9, -7)$

13.

Δίνονται τα σημεία $\mathrm{A}(\alpha, 0)$ *και* $\mathrm{B}(0, \beta)$ *με* $\alpha, \beta \neq 0$. *Αν η μεσοκάθετος του* AB *τέμνει τους άξονες στα σημεία* $P(p, 0)$ *και* $\mathrm{Q}(0, q)$ *να δείξετε ότι:*

$(\mathrm{I})\ \alpha q + \beta p = 2pq \qquad (\mathrm{II})\ \alpha p + \beta q = 0$



Έστω (ε) *η μεσοκάθετος του* ΑΒ

Αν $\mathrm{AB} \not\parallel y'y$, $\mathrm{A}(x_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{A}}), \mathrm{B}(x_{\mathrm{B}}, y_{\mathrm{B}})$, *τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας* ΑΒ *δίνεται απο την σχέση*:

$$\lambda_{\mathrm{AB}} = \frac{y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}}}{x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}}, x_{\mathrm{A}} \neq x_{\mathrm{B}}$$

$$\lambda_{\mathrm{AB}} \overset{\mathrm{B}(0,\beta)}{\underset{\mathrm{A}(\alpha,0)}{=}} \frac{\beta - 0}{0 - \alpha} = -\frac{\beta}{\alpha}$$

$\text{Αν } (\varepsilon_1),(\varepsilon_2) \nparallel y'y$ *με*

λ_{ε_1} : Ο *συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας* (ε_1)

λ_{ε_2} : Ο *συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας* (ε_2)

Τότε *ισχύει η ισοδυναμία* :

$$\lambda_{\varepsilon_1}\lambda_{\varepsilon_2} = -1 \Leftrightarrow (\varepsilon_1) \perp (\varepsilon_2)$$

Επειδή $(\varepsilon) \perp \text{AB}$ *θα έχω* :

$$\lambda_\varepsilon \lambda_{\text{AB}} = -1 \overset{\lambda_{\text{AB}}=-\frac{\beta}{\alpha}}{\Longleftrightarrow} \lambda_\varepsilon\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) = -1 \Leftrightarrow \frac{\lambda_\varepsilon \beta}{\alpha} = 1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \beta = \alpha \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \frac{\alpha}{\beta}$$

$\text{Αν } \mathrm{M}(x_{\mathrm{M}}, y_{\mathrm{M}})$ *το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος* AB

με $\mathrm{A}(x_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{A}}), \mathrm{B}(x_{\mathrm{B}}, y_{\mathrm{B}})$ *τότε θα έχω* :

$$x_{\mathrm{M}} = \frac{x_{\mathrm{A}} + x_{\mathrm{B}}}{2},\ y_{\mathrm{M}} = \frac{y_{\mathrm{A}} + y_{\mathrm{B}}}{2}$$

$\text{Αν } \mathrm{M}(x_{\mathrm{M}}, y_{\mathrm{M}})$ *μέσο του ευθυγράμμου τμήματος* AB *θα έχω* :

$$x_{\mathrm{M}} = \frac{x_{\mathrm{A}} + x_{\mathrm{B}}}{2} \overset{\substack{x_{\mathrm{A}}=\alpha \\ x_{\mathrm{B}}=0}}{=} \frac{\alpha + 0}{2} = \frac{\alpha}{2}$$

$$y_{\mathrm{M}} = \frac{y_{\mathrm{A}} + y_{\mathrm{B}}}{2} \overset{\substack{y_{\mathrm{A}}=0 \\ y_{\mathrm{B}}=\beta}}{=} \frac{0 + \beta}{2} = \frac{\beta}{2}$$

Οπότε : $\boxed{\mathrm{M}\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right)}$

$(\varepsilon) \nparallel y'y$

λ : Ο *συντελεστής διευθύνσης της ευθείας*

$\mathrm{A}(x_0, y_0) \in (\varepsilon)$

Τότε *η ευθεία* (ε) *θα έχει εξίσωση* :

$$y - y_0 = \lambda(x - x_0)$$

$\text{Επειδή η ευθεία } (\varepsilon) \text{ διέρχεται απο το σημείο } \mathrm{M}\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2}\right) \text{ και}$

$\text{έχει συντελεστή διεύθυνσης } \lambda_\varepsilon = \frac{\alpha}{\beta} \text{ θα έχει εξίσωση:}$

$$y - y_{\mathrm{M}} = \lambda_\varepsilon\left(x - x_{\mathrm{M}}\right) \overset{\substack{\lambda_\varepsilon = \frac{\alpha}{\beta} \\ x_{\mathrm{M}} = \frac{\alpha}{2} \\ y_{\mathrm{M}} = \frac{\beta}{2}}}{\Longleftrightarrow} y - \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha}{\beta}\left(x - \frac{\alpha}{2}\right) \overset{\substack{\text{Πολλαπλασιάζω και τα} \\ \text{δυο μέλη της εξίσωσης} \\ \text{με το } 2\beta}}{\Longleftrightarrow}$$

$$2\beta\left(y - \frac{\beta}{2}\right) = 2\cancel{\beta}\,\frac{\alpha}{\cancel{\beta}}\left(x - \frac{\alpha}{2}\right) \Leftrightarrow 2\beta y - \cancel{2}\beta\,\frac{\beta}{\cancel{2}} = 2\alpha x - \cancel{2}\alpha\,\frac{\alpha}{\cancel{2}}$$

$$\Leftrightarrow 2\beta y - \beta^2 = 2\alpha x - \alpha^2 \Leftrightarrow -2\alpha x + 2\beta y = \beta^2 - \alpha^2$$

$$(\varepsilon): -2\alpha x + 2\beta y = \beta^2 - \alpha^2$$

$\text{Επειδή } P(p,0) \in (\varepsilon) \text{ θα έχω:}$

$$-2\alpha x_Q + 2\beta y_Q = \beta^2 - \alpha^2 \overset{x_P = p,\, y_p = 0}{\Longleftrightarrow} -2\alpha p + 2\beta \bullet 0 = \beta^2 - \alpha^2 \Leftrightarrow$$

$$-2\alpha p = \beta^2 - \alpha^2 \Leftrightarrow \boxed{p = -\frac{\beta^2 - \alpha^2}{2\alpha}}$$

$\text{Επειδή} \in Q(0,q)(\varepsilon) \text{ θα έχω:}$

$$-2\alpha x_Q + 2\beta y_Q = \beta^2 - \alpha^2 \overset{x_Q = 0,\, y_Q = q}{\Longleftrightarrow} -2\alpha \bullet 0 + 2\beta q = \beta^2 - \alpha^2 \Leftrightarrow$$

$$2\beta q = \beta^2 - \alpha^2 \Leftrightarrow \boxed{q = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2\beta}}$$

$$(\mathrm{I})\, \alpha q + \beta p \overset{\substack{p = -\frac{\beta^2 - \alpha^2}{2\alpha} \\ q = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2\beta}}}{=} \alpha\,\frac{\beta^2 - \alpha^2}{2\beta} + \beta\left(-\frac{\beta^2 - \alpha^2}{2\alpha}\right) =$$

$$\left(\beta^2-\alpha^2\right)\frac{\alpha}{2\beta}+\left(\beta^2-\alpha^2\right)\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)\overset{\substack{\text{Βγάζω κοινό παράγοντα}\\ \text{το } \beta^2-\alpha^2}}{=}$$

$$\left(\beta^2-\alpha^2\right)\left(\frac{\alpha}{2\beta}-\frac{\beta}{2\alpha}\right)=\left(\beta^2-\alpha^2\right)\left(\frac{\alpha^2}{2\alpha\beta}-\frac{\beta^2}{2\alpha\beta}\right)=$$

$$=\left(\beta^2-\alpha^2\right)\frac{\alpha^2-\beta^2}{2\alpha\beta}\overset{\alpha^2-\beta^2=-\left(\beta^2-\alpha^2\right)}{=}\left(\beta^2-\alpha^2\right)\frac{-\left(\beta^2-\alpha^2\right)}{2\alpha\beta}$$

Πολλαπλασιάζω και διαιρώ με το 2 για να εμφανιστούν οι παραστάσεις $p=\frac{-\left(\beta^2-\alpha^2\right)}{2\alpha}$ *και* $q=\frac{\beta^2-\alpha^2}{2\beta}$

$=$

$$2\left(\beta^2-\alpha^2\right)\frac{-\left(\beta^2-\alpha^2\right)}{2\bullet 2\alpha\beta}=2\frac{-\left(\beta^2-\alpha^2\right)}{2\alpha\beta}\frac{\beta^2-\alpha^2}{2\beta}\overset{\substack{p=\frac{-\left(\beta^2-\alpha^2\right)}{2\alpha}\\ q=\frac{\beta^2-\alpha^2}{2\beta}}}{=}$$

$$2pq$$

$$(\mathrm{II})\,\alpha p+\beta q\overset{\substack{p=-\frac{\beta^2-\alpha^2}{2\alpha}\\ q=\frac{\beta^2-\alpha^2}{2\beta}}}{=}\cancel{\alpha}\left(-\frac{\beta^2-\alpha^2}{2\cancel{\alpha}}\right)+\cancel{\beta}\,\frac{\beta^2-\alpha^2}{2\cancel{\beta}}=$$

$$=-\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}+\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}=0$$

14.

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται απο το σημείο τομής των ευθειών $x-y+1=0$ *και* $2x-3y+5=0$ *και απέχει απο το σημείο* $\mathrm{A}(3,2)$ *απόσταση ίση με* $\frac{7}{5}$

$(\varepsilon_1): x - y + 1 = 0$

$(\varepsilon_2): 2x - 3y + 5 = 0$

$\underline{\text{Αν } \mathrm{M} \in (\varepsilon_1) \cap (\varepsilon_2)}$

$$\mathrm{M} \in (\varepsilon_1) \cap (\varepsilon_2) \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \mathrm{M} \in (\varepsilon_1) \\ \mathrm{M} \in (\varepsilon_2) \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x - y + 1 = 0 \\ 2x - 3y + 5 = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} x - y = -1 \\ 2x - 3y = -5 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \overset{\substack{\text{Πολλαπλασιάζω την} \\ \text{πρώτη εξίσωση με} \\ \text{το } -2 \text{ για να προκύψουν} \\ \text{αντίθετοι συντελεστές} \\ \text{για το } x!!!}}{\Leftrightarrow} \begin{Bmatrix} -2(x - y) = -2(-1) \\ 2x - 3y = -5 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} -2x - 2(-y) = 2 \\ 2x - 3y = -5 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -2x + 2y = 2 \\ 2x - 3y = -5 \end{Bmatrix}$$

<u>*Προσθέτω κατά μέλη τις σχέσεις* $-2x + 2y = 2$ *και* $2x - 3y = -5$ *τότε τα* x *θα απλοποιηθούν και θα προκύψει μια εξίσωση με μια μεταβλητή το* y!!!. *Επειδή όμως έχω ένα σύστημα δυο εξισώσεων με δυο μεταβλητές και θα πρέπει να οδηγηθώ σε ένα ισοδύναμο σύστημα με δυο εξισώσεις και δυο μεταβλητές θα επιλέξω ως δεύτερη εξίσωση μια οποιαδήποτε εξίσωση του συστήματος. Οπότε επιλέγω ως δεύτερη εξίσωση την* $x - y = -1$ *γιατί είναι η ποιο απλή εξίσωση του συστήματος*</u>

$$\begin{Bmatrix} -2x + 2y = 2 \\ 2x - 3y = -5 \end{Bmatrix} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} \begin{Bmatrix} \cancel{-2x} + 2y + \cancel{2x} - 3y = 2 - 5 \\ x - y = -1 \end{Bmatrix}$$

$$\overset{\substack{\text{Απο την πρώτη εξίσωση θα} \\ \text{βρώ την τιμή του } y.\text{Λύνω την} \\ \text{δεύτερη εξίσωση ως προς} \\ x \text{ για να βρώ ποιο "εύκολα"} \\ \text{την τιμή του } x}}{\Leftrightarrow} \begin{Bmatrix} -y = -3 \\ x = y - 1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y = 3 \\ x = y - 1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y = 3 \\ x = 3 - 1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y=3 \\ x=2 \end{cases}$$

$\text{Οπότε}: \boxed{\text{M}(2,3)}$

$\underline{\textit{Έστω } (\varepsilon) \textit{ ζητούμενη ευθεία}}$. *Διακρίνω τις περιπτώσεις* :

$$\begin{cases} (\text{I})(\varepsilon)//y'y \\ (\text{II})(\varepsilon)\not\parallel y'y \end{cases}$$

$\underline{\text{Περίπτωση } (\text{I}):}$

Επειδή $(\varepsilon)//y'y$ *και διέρχεται απο την αρχή των αξόνων το σημείο* $\text{M}(2,3)$ *θα έχει εξίσωση* $x=2$.

$(\varepsilon): x-2=0$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Αν } (\varepsilon)//y'y \textit{ τότε η ευθεία } (\varepsilon) \textit{ θα έχει εξίσωση} \\ x = \boxed{\begin{array}{l}\text{Η τετμημένη του σημείου απο το οποίο διέρχεται} \\ \text{η ευθεία } (\varepsilon)\end{array}}\end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\textit{Έστω ευθεία } (\varepsilon): \text{A}x+\text{B}y+\Gamma=0 \textit{ με } |\text{A}|+|\text{B}|\neq 0 \textit{ τότε η} \\ \textit{αποσταση του σημείου } \text{M}(x_0,y_0) \textit{ απο την ευθεία } (\varepsilon) \\ \textit{δίνεται απο την σχέση}: \\ d(\text{M},\varepsilon)=\dfrac{|\text{A}x_0+\text{B}y_0+\Gamma|}{\sqrt{\text{A}^2+\text{B}^2}} \\ d(\text{M},\varepsilon): \text{Η απόσταση του σημείου M απο την ευθεία } (\varepsilon)\end{array}}$$

$$d\big(\text{A}(3,2),(\varepsilon)\big)=\frac{|1x_{\text{A}}+0y_{\text{A}}-2|}{\sqrt{1^2+0^2}} \overset{\substack{x_{\text{A}}=3\\ y_{\text{A}}=2}}{=} \frac{|3-2|}{1}=1\neq\frac{7}{5}$$

Επειδή $d\big(\text{A}(3,2),(\varepsilon)\big)\neq\dfrac{7}{5}$ *η ευθεία* (ε) *δεν είναι λύση του προβλήματος*

$\underline{\Pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\pi\tau\omega\sigma\eta\,(\mathrm{II}):}$

$\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\,(\varepsilon)\not\parallel y'y$ *τότε υπάρχει ο συντελεστής διεύθυνσης* λ *της ευθείας* (ε) *και η* (ε) *διέρχεται απο την αρχή των αξόνων το σημείο* $\mathrm{M}(2,3)$.*Οπότε η ευθεία* (ε) *έχει εξίσωση*:

$$y-y_{\mathrm{M}}=\lambda\left(x-x_{\mathrm{M}}\right)\overset{x_{\mathrm{M}}=2,y_{\mathrm{M}}=3}{\Longleftrightarrow}y-3=\lambda\left(x-2\right)\Leftrightarrow y-3=\lambda x-2\lambda\Leftrightarrow$$

$$-\lambda x+y+2\lambda-3=0$$

$$(\varepsilon):-\lambda x+y+2\lambda-3=0$$

Έστω ευθεία $(\varepsilon):\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0$ *με* $\lvert\mathrm{A}\rvert+\lvert\mathrm{B}\rvert\neq 0$ *τότε η αποσταση του σημείου* $\mathrm{M}(x_0,y_0)$ *απο την ευθεία* (ε) *δίνεται απο την σχέση*:
$d(\mathrm{M},\varepsilon)=\dfrac{\lvert\mathrm{A}x_0+\mathrm{B}y_0+\Gamma\rvert}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}}$
$d(\mathrm{M},\varepsilon)$: Η *απόσταση του σημείου* Μ *απο την ευθεία* (ε)

$$d\left(\mathrm{A}(3,2),(\varepsilon)\right)=\frac{7}{5}\Leftrightarrow\frac{\left|-\lambda x_{\mathrm{A}}+y_{\mathrm{A}}+2\lambda-3\right|}{\sqrt{(-\lambda)^2+1^2}}=\frac{7}{5}\overset{\substack{x_{\mathrm{A}}=3\\ y_{\mathrm{A}}=2}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\frac{\left|-3\lambda+2+2\lambda-3\right|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=\frac{7}{5}\Leftrightarrow\frac{\left|-\lambda-1\right|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=\frac{7}{5}\overset{-\lambda-1=-(\lambda+1)}{\Longleftrightarrow}\frac{\left|-(\lambda+1)\right|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=\frac{7}{5}$$

$$\overset{|\alpha|=|-\alpha|}{\Longleftrightarrow}\frac{\left|\lambda+1\right|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=\frac{7}{5}\Leftrightarrow 5\left|\lambda+1\right|=7\sqrt{\lambda^2+1}\overset{\substack{\text{Αν } \alpha,\beta\geq 0 \text{ τότε ισχύει η}\\ \text{ισοδυναμία:}\\ \alpha=\beta\Leftrightarrow\alpha^2=\beta^2}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left(5\left|\lambda+1\right|\right)^2=\left(7\sqrt{\lambda^2+1}\right)^2\overset{(\alpha\beta)^\nu=\alpha^\nu\beta^\nu}{\Longleftrightarrow}25\left|\lambda+1\right|^2=49\left(\sqrt{\lambda^2+1}\right)^2$$

$$\overset{\substack{|\alpha|^2=\alpha^2\\ (\sqrt{\alpha})^2=\alpha,\alpha\geq 0}}{\Longleftrightarrow}25\left(\lambda+1\right)^2=49\left(\lambda^2+1\right)\overset{(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2}{\Longleftrightarrow}$$

$$25\left(\lambda^2+2\lambda+1\right)=49\lambda^2+49 \Leftrightarrow 25\lambda^2+25\bullet 2\lambda+25=49\lambda^2+49$$

$$\Leftrightarrow 25\lambda^2+50\lambda+25-49\lambda^2-49=0 \Leftrightarrow -24\lambda^2+50\lambda-24=0 \Leftrightarrow$$

$$-2\bullet 12\lambda^2-2\left(-25\lambda\right)-2\bullet 12=0 \overset{\substack{\text{Βγάζω κοινό} \\ \text{παράγοντα το } -2}}{\Leftrightarrow} -2\left(12\lambda^2-25\lambda+12\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 12\lambda^2-25\lambda+12=0\left(1\right)$$

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=\left(-25\right)^2-4\bullet 12\bullet 12=625-4\bullet 144=625-576=49>0$$

Επειδή $\Delta>0$ *η δευτεροβάθμια εξίσωση* $\left(1\right)$ *έχει δυο ρίζες παραγματικές και άνισες* :

$$\lambda_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-\left(-25\right)\pm\sqrt{49}}{2\bullet 12}=\frac{25\pm 7}{24}=\begin{cases}\nearrow\dfrac{25+7}{24}=\dfrac{32:8}{24:8}=\dfrac{4}{3}\\[4pt] \searrow\dfrac{25-7}{24}=\dfrac{18:6}{24:6}=\dfrac{4}{3}\end{cases}$$

Αν $\lambda=\frac{4}{3}$ *θα έχω την εξίσωση* :

$$-\lambda x+y+2\lambda-3=0 \overset{\lambda=\frac{4}{3}}{\Leftrightarrow} -\frac{4}{3}x+y+2\bullet\frac{4}{3}-3=0 \Leftrightarrow$$

$$-\frac{4}{3}x+y+\frac{8}{3}-\frac{9}{3}=0 \Leftrightarrow -\frac{4}{3}x+y-\frac{1}{3}=0 \overset{\substack{\text{Πολλαπλασιάζω και} \\ \text{τα δυο μέλη της εξίσωσης} \\ \text{με το } 3}}{\Leftrightarrow}$$

$$3\left(-\frac{4}{3}x+y-\frac{1}{3}\right)=3\bullet 0 \Leftrightarrow -3\frac{4}{3}x+3y-3\frac{1}{3}=0 \Leftrightarrow$$

$$-4x+3y-1=0 \Leftrightarrow -\left(4x-3y+1\right)=0 \Leftrightarrow 4x-3y+1=0$$

$$\left(\varepsilon_1\right): 4x-3y+1=0$$

Αν $\lambda=\frac{3}{4}$ *θα έχω την εξίσωση* :

$$-\lambda x+y+2\lambda-3=0 \overset{\lambda=\frac{3}{4}}{\Leftrightarrow} -\frac{3}{4}x+y+2\bullet\frac{3}{4}-3=0 \Leftrightarrow$$

Πολλαπλασιάζω και τα δυο μέλη της εξίσωσης με το 4

$$-\frac{3}{4}x+y+\frac{6}{4}-\frac{12}{4}=0 \Leftrightarrow -\frac{3}{4}x+y-\frac{6}{4}=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$4\left(-\frac{3}{4}x+y-\frac{6}{4}\right)=4\bullet 0 \Leftrightarrow -4\frac{3}{4}x+4y-4\frac{6}{4}=0 \Leftrightarrow$$

$$-3x+4y-6=0 \Leftrightarrow -\left(3x-4y+6\right)=0 \Leftrightarrow 3x-4y+6=0$$

$$\left(\varepsilon_2\right): 3x-4y+6=0$$

15.

Δίνονται τα σημεία $\mathrm{A}(-1,-2)$ *και* $\mathrm{B}(3,1)$. *Να βρείτε το σύνολο των σημείων* M *για τα οποία ισχύει* $(\mathrm{MAB})=8$

$$(\mathrm{AB\Gamma})=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\right)\right|$$

$(\mathrm{AB\Gamma})$: Τ*ο εμβαδό του τριγώνου* $\mathrm{A\overset{\triangle}{B}\Gamma}$

$$\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\right)=\begin{vmatrix}\text{Τετμημένη του}\,\overrightarrow{\mathrm{AB}} & \text{Τεταγμένη του}\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}\\ \text{Τετμημένη του}\,\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} & \text{Τεταγμένη του}\,\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\end{vmatrix}$$

$$\boxed{\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \delta & \gamma\end{vmatrix}=\alpha\gamma-\beta\delta}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\left(x_{\mathrm{B}}-x_{\mathrm{A}},y_{\mathrm{B}}-y_{\mathrm{A}}\right),\mathrm{A}\left(x_{\mathrm{A}},y_{\mathrm{A}}\right),\mathrm{B}\left(x_{\mathrm{B}},y_{\mathrm{B}}\right)}$$

<u>Αν $\mathrm{M}(x,y)$ *το ζητούμενο σημείο*</u>

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}\underset{\mathrm{A}(-1,-2)}{\overset{\mathrm{M}(x,y)}{=}}\left(x-(-1),y-(-2)\right)=\left(x+1,y+2\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\underset{\mathrm{A}(-1,-2)}{\overset{\mathrm{B}(3,1)}{=}}\left(3-(-1),1-(-2)\right)=\left(3+1,1+2\right)=\left(4,3\right)$$

$$\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}},\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)=\begin{vmatrix}\text{Τετμημένη του}\,\overrightarrow{\mathrm{AM}} & \text{Τεταγμένη του}\,\overrightarrow{\mathrm{AM}}\\ \text{Τετμημένη του}\,\overrightarrow{\mathrm{AB}} & \text{Τεταγμένη του}\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} x+1 & y+2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 3(x+1)-4(y+2) = 3x+3-4y-4\bullet 2 =$$

$$3x+3-4y-8 = 3x-4y-5$$

$$(\mathrm{MAB}) = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}},\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)\right| \overset{\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}},\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)=3x-4y-5}{=} \frac{1}{2}|3x-4y-5|$$

$$\acute{E}\chi\omega : (\mathrm{MAB}) = 8 \Leftrightarrow \frac{1}{2}|3x-4y-5| = 8 \Leftrightarrow |3x-4y-5| = 2\bullet 8 \Leftrightarrow$$

$$|3x-4y-5| = 16 \overset{|x|=\theta \Leftrightarrow x=\pm\theta}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{matrix} 3x-4y-5=16 \\ \acute{\eta} \\ 3x-4y-5=-16 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix} 3x-4y-5-16=0 \\ \acute{\eta} \\ 3x-4y-5+16=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} 3x-4y-21=0 \\ \acute{\eta} \\ 3x-4y+11=0 \end{matrix}\right\}$$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ \tau\iota\varsigma\ \varepsilon\upsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\varepsilon\varsigma$

$(\varepsilon_1): 3x-4y-21=0$

$(\varepsilon_2): 3x-4y+11=0$

ΠΡΟΣΟΧΗ!!!

$$\left|\alpha x+\beta y+\gamma\right|=\theta \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \alpha x+\beta y+\gamma=\theta \\ \acute{\eta} \\ \alpha x+\beta y+\gamma=-\theta \end{matrix}\right\}, \theta>0$$

<u>Το ίδιο δεν συμβαίνει για συναρτήσεις!!!</u>

<u>Μπορει να εχω $\left|f(x)\right|=\theta, \theta>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ χωρίς αυτό να σημαίνει $f(x)=\theta$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ή $f(x)=-\theta$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$</u>

Πράγματι:

Αν $f(x)=\begin{cases}1, x\le 0\\ -1, x>0\end{cases}$ τότε $\left|f(x)\right|=\begin{cases}\left|f(x)\right|, x\le 0\\ \left|f(x)\right|, x>0\end{cases}=$

$=\begin{cases}\left|1\right|, x\le 0\\ \left|-1\right|, x>0\end{cases}=\begin{cases}1, x\le 0\\ 1, x>0\end{cases}=1$

<u>Έχω $\left|f(x)\right|=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ αλλά δεν ισχύει $f(x)=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ή $f(x)=-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$</u>