ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟΝ ΚΥΚΛΟ

1.

Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου $C: x^2+y^2=5$ που διέρχεται απο το σημείο $\mathrm{A}(3,1)$ καινα αποδειχτεί ότι οι εφαπτόμενες αυτές είναι κάθετες

Έστω (ε) *εφαπτομένη του κύκλου* $C: x^2+y^2=5$ *στο σημείο επαφής* $\mathrm{M}(x_1,y_1)$ *και* $\mathrm{A}(3,1)\in(\varepsilon)$. *Τότε η ευθεία* (ε) *θα έχει εξίσωση.*

$(\varepsilon): xx_1+yy_1=5$

Αν (ε) *η εφαπτομένη του κύκλου* $(C): x^2+y^2=\rho^2$ *στο σημείο επαφής* $\mathrm{M}(x_1,y_1)$. *Τότε η* (ε) *θα έχει εξίσωση.*
$(\varepsilon): xx_1+yy_1=\rho^2$

Επειδή $\mathrm{A}(3,1)\in(\varepsilon)$ *οι συντεταγμένες του ικανοποιούν την εξίσωση της ευθείας* (ε). *Οπότε θα έχω:*

$$x_{\mathrm{A}}x_1+y_{\mathrm{A}}y_1=5 \overset{\substack{x_{\mathrm{A}}=3\\ y_{\mathrm{A}}=1}}{\Longleftrightarrow} x_{\mathrm{A}}x_1+y_{\mathrm{A}}y_1=5 \Leftrightarrow 3x_1+y_1=5 (1)$$

Επειδή $\mathrm{M}(x_1,y_1)\in(C)$ *οι συντεταγμένες του ικανοποιούν την επίσωση του κύκλου* (C). *Οπότε θα έχω:*

$x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}=5 (2)$

Απο τις σχέσεις $(1),(2)$ *έχω το σύστημα:*

$$\left\{\begin{matrix} x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}=5 \\ 3x_1+y_1=5 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}=5 \\ y_1=5-3x_1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x_1^{\ 2}+(5-3x_1)^2=5 \\ y_1=5-3x_1 \end{matrix}\right\}$$

$$\overset{(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{matrix} x_1^{\ 2}+5^2-2\bullet5\bullet3x_1+(3x_1)^2=5 \\ y_1=5-3x_1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix} x_1^{\ 2}+25-30x_1+9x_1^{\ 2}-5=0 \\ y_1=5-3x_1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} 10x_1^{\ 2}-30x_1+20=0 \\ y_1=5-3x_1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 10\left(x_1^{\,2}-3x_1+2\right)=0 \\ y_1=5-3x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^{\,2}-3x_1+2=0\,(3) \\ y_1=5-3x_1\,(4) \end{cases}$$

$x_1^{\,2}-3x_1+2=0\,(3)$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-3)^2-4\bullet1\bullet2=9-8=1>0$

$$x_1=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{1}}{2\bullet1}=\frac{3\pm1}{2}=\begin{matrix}\nearrow\frac{3+1}{2}=\frac{4}{2}=2\\ \searrow\frac{3-1}{2}=\frac{2}{2}=1\end{matrix}$$

$\mathrm{A}\nu\ x_1=2\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \alpha\pi o\ \tau\eta\nu\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\eta\ (4)\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$y_1=5-3x_1\overset{x_1=2}{=}5-3\bullet2=5-6=-1$$

$\mathrm{T}\acute{o}\tau\varepsilon\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ \tau\eta\nu\ \varepsilon\upsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\alpha:$

$$xx_1+yy_1=5\overset{\substack{x_1=2\\y_1=-1}}{\Longleftrightarrow}2x-y=5$$

$(\varepsilon_1):2x-y=5$

$\mathrm{A}\nu\ x_1=1\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \alpha\pi o\ \tau\eta\nu\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\eta\ (4)\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$y_1=5-3x_1\overset{x_1=1}{=}5-3\bullet1=5-3=2$$

$\mathrm{T}\acute{o}\tau\varepsilon\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ \tau\eta\nu\ \varepsilon\upsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\alpha:$

$$xx_1+yy_1=5\overset{\substack{x_1=1\\y_1=2}}{\Longleftrightarrow}x+2y=5$$

$(\varepsilon_2):x+2y=5$

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathrm{A}\nu\ (\varepsilon):\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0\ \mu\varepsilon\ \mathrm{B}\neq0\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ o\ \sigma\upsilon\nu\tau\varepsilon\lambda\varepsilon\sigma\tau\acute{\eta}\varsigma\\ \delta\iota\varepsilon\acute{\upsilon}\theta\upsilon\nu\sigma\eta\varsigma\ \tau\eta\varsigma\ (\varepsilon)\ \delta\acute{\iota}\nu\varepsilon\tau\alpha\iota\ \alpha\pi o\ \tau\eta\nu\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\eta\ \lambda=-\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}\end{array}}$$

$\mathrm{O}\ \sigma\upsilon\nu\tau\varepsilon\lambda\varepsilon\sigma\tau\acute{\eta}\varsigma\ \delta\iota\varepsilon\acute{\upsilon}\theta\upsilon\nu\sigma\eta\varsigma\ \tau\eta\varsigma\ \varepsilon\upsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\alpha\varsigma\ (\varepsilon_1)\ \delta\acute{\iota}\nu\varepsilon\tau\alpha\iota\ \alpha\pi o$ $\tau\eta\nu\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\eta:$

$$\lambda_{\varepsilon_1}=-\frac{\mathrm{A}_1}{\mathrm{B}_1}=-\frac{2}{-1}=2$$

$\mathrm{O}\ \sigma\upsilon\nu\tau\varepsilon\lambda\varepsilon\sigma\tau\acute{\eta}\varsigma\ \delta\iota\varepsilon\acute{\upsilon}\theta\upsilon\nu\sigma\eta\varsigma\ \tau\eta\varsigma\ \varepsilon\upsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\alpha\varsigma\ (\varepsilon_2)\ \delta\acute{\iota}\nu\varepsilon\tau\alpha\iota\ \alpha\pi o$ $\tau\eta\nu\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\eta:$

$$\lambda_{\varepsilon_2} = -\frac{\mathrm{A}_2}{\mathrm{B}_2} = -\frac{1}{2}$$

$$\acute{E}\chi\omega : \lambda_{\varepsilon_1}\lambda_{\varepsilon_2} = 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \lambda_{\varepsilon_1}\lambda_{\varepsilon_2} = -1\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ (\varepsilon_1) \perp (\varepsilon_2)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{A}\nu\ (\varepsilon_1),(\varepsilon_2) \not\parallel y'y\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\ \eta\ \iota\sigma o\delta\upsilon\nu\alpha\mu\acute{\iota}\alpha : \\ (\varepsilon_1) \perp (\varepsilon_2) \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_1}\lambda_{\varepsilon_2} = -1 \\ \lambda_{\varepsilon_1} : \mathrm{O}\ \sigma\upsilon\nu\tau\varepsilon\lambda\varepsilon\sigma\tau\acute{\eta}\varsigma\ \delta\iota\varepsilon\acute{\upsilon}\theta\upsilon\nu\sigma\eta\varsigma\ \tau\eta\varsigma\ (\varepsilon_1) \\ \lambda_{\varepsilon_2} : \mathrm{O}\ \sigma\upsilon\nu\tau\varepsilon\lambda\varepsilon\sigma\tau\acute{\eta}\varsigma\ \delta\iota\varepsilon\acute{\upsilon}\theta\upsilon\nu\sigma\eta\varsigma\ \tau\eta\varsigma\ (\varepsilon_2) \end{array}}$$

2.

Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων και διέρχεται απο το σημείο $\mathrm{A}(1,\sqrt{3})$

Έστω κύκλος (C) *έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και διέρχεται απο το σημείο* $\mathrm{A}(1,\sqrt{3})$. *Επειδή ο κύκλος* (C) *έχει κέντρο την αρχή αξόνων θα έχει εξίσωση* :

$x^2 + y^2 = \rho^2, \rho$: Η *ακτίνα του κύκλου* (C)

Αν ο κύκλος (C) *έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα* ρ *θα έχει εξίσωση* : $x^2 + y^2 = \rho^2$

Η *ακτίνα του κύκλου θα είναι ίση με την απόσταση τυχαίου του κύκλου απο το κέντρο του. Οπότε θα έχω* :

$$\rho^2 = \mathrm{OA}^2 = (x_\mathrm{A} - x_\mathrm{O})^2 + (y_\mathrm{A} - y_\mathrm{O})^2 = (1-0)^2 + (\sqrt{3}-0)^2 =$$

$$= 1 + 3 = 4$$

$$\boxed{\mathrm{AB} = \sqrt{(x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A})^2 + (y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A})^2},\ \mathrm{A}(x_\mathrm{A}, y_\mathrm{A}), \mathrm{B}(x_\mathrm{B}, y_\mathrm{B})}$$

Οπότε ο κύκλος (C) *θα έχει εξίσωση* :

$$x^2 + y^2 = 4$$

3.

$\text{Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο την αρχή}$
$\text{των αξόνων και εφάπτεται στην ευθεία } (\varepsilon): x - y - 2 = 0$

Έστω κύκλος (C) έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και εφάπτεται στην ευθεία $(\varepsilon): x - y - 2 = 0$. Επειδή ο κύκλος (C) έχει κέντρο την αρχή αξόνων θα έχει εξίσωση:

$x^2 + y^2 = \rho^2, \rho$: Η ακτίνα του κύκλου (C)

Αν ο κύκλος (C) έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ θα έχει εξίσωση:
$x^2 + y^2 = \rho^2$

Επειδή ο κύκλος (C) εφάπτεται στην ευθεία $(\varepsilon): x - y - 2 = 0$ τότε η απόσταση του κέντρου του κύκλου απο την εφαπτομένη θα είναι ίση με την ακτίνα του κύκλου.
Οπότε θα έχω:

$$\rho = d\left(\mathrm{O}(0,0),(\varepsilon)\right) = \frac{\left|x_{\mathrm{O}} - y_{\mathrm{O}} - 2\right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} \overset{x_{\mathrm{O}} = y_{\mathrm{O}} = 0}{=} \frac{\left|0 - 0 - 2\right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$\overset{\substack{\text{Πολλαπλασιάζω αριθμητή} \\ \text{και παρονομαστή με το } \sqrt{2}}}{=} \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2} \overset{\left(\sqrt{\alpha}\right)^2 = \alpha, \alpha \geq 0}{=} \frac{\cancel{2}\sqrt{2}}{\cancel{2}} = \sqrt{2}$$

Έστω ευθεία $(\varepsilon): \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma = 0$ με $|\mathrm{A}| + |\mathrm{B}| \neq 0$ τότε η αποσταση του σημείου $\mathrm{M}(x_0, y_0)$ απο την ευθεία (ε) δίνεται απο την σχέση:

$$d(\mathrm{M}, \varepsilon) = \frac{\left|\mathrm{A}x_0 + \mathrm{B}y_0 + \Gamma\right|}{\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2}}$$

$d(\mathrm{M}, \varepsilon)$: Η απόσταση του σημείου Μ απο την ευθεία (ε)

Ο κύκλος (C) θα έχει εξίσωση:

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \overset{\rho = \sqrt{2}}{\Longleftrightarrow} x^2 + y^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2$$

4.

$\mathrm{N}\alpha\ \beta\rho\varepsilon\acute{\iota}\tau\varepsilon\ \tau\eta\nu\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta\ \tau o\upsilon\ \kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\upsilon\ \pi o\upsilon\ \delta\iota\acute{\varepsilon}\rho\varepsilon\tau\alpha\iota\ \alpha\pi o\ \tau\eta\nu$
$\alpha\rho\chi\acute{\eta}\ \tau\omega\nu\ \alpha\xi\acute{o}\nu\omega\nu\ \kappa\alpha\iota\ \varepsilon\varphi\acute{\alpha}\pi\tau\varepsilon\tau\alpha\iota\ \tau\eta\varsigma\ \varepsilon\upsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\alpha\varsigma$
$(\varepsilon):3x+4y-12=0\ \sigma\tau o\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\ \mathrm{A}(0,3)$

$\acute{\mathrm{E}}\sigma\tau\omega\ \mathrm{K}(\alpha,\beta)\ \tau o\ \kappa\acute{\varepsilon}\nu\tau\rho o\ \tau o\upsilon\ \kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\upsilon\ (c).\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ o\ \kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\varsigma$ $(c)\ \delta\iota\acute{\varepsilon}\rho\chi\varepsilon\tau\alpha\iota\ \alpha\pi o\ \tau\eta\nu\ \alpha\rho\chi\acute{\eta}\ \tau\omega\nu\ \alpha\xi\acute{o}\nu\omega\nu\ \eta$ $\underline{\alpha\pi\acute{o}\sigma\tau\alpha\sigma\eta\ \tau o\upsilon\ \kappa\acute{\varepsilon}\nu\tau\rho o\upsilon\ \tau o\upsilon\ \kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\upsilon\ \alpha\pi o\ \tau o\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\ \mathrm{O}(0,0)\ \theta\alpha\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \acute{\iota}\sigma\eta\ \mu\varepsilon\ \tau\eta\nu\ \alpha\kappa\tau\acute{\iota}\nu\alpha\ \tau o\upsilon\ \kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\upsilon}$ $\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$\rho=\mathrm{KO}(1)$

$\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \eta\ \varepsilon\upsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\alpha\ (\varepsilon):3x+4y-12=0\ \varepsilon\varphi\acute{\alpha}\pi\tau\varepsilon\tau\alpha\iota\ \sigma\tau o\nu\ \kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o$ $(c)\ \sigma\tau o\ \sigma\eta\varepsilon\acute{\iota}o\ \varepsilon\pi\alpha\varphi\acute{\eta}\varsigma\ \mathrm{A}(0,3)\ \theta\alpha\ \pi\rho\acute{\varepsilon}\pi\varepsilon\iota$ $\underline{\eta\ \alpha\kappa\tau\acute{\iota}\nu\alpha\ \ \tau o\upsilon\ \kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\upsilon\ \nu\alpha\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \acute{\iota}\sigma\eta\ \mu\varepsilon\ \tau\eta\nu\ \alpha\pi\acute{o}\sigma\tau\alpha\sigma\eta\ \tau o\upsilon\ \kappa\acute{\varepsilon}\tau\rho o\upsilon\ \tau o\upsilon\ \alpha\pi o\ \tau\eta\nu\ \varepsilon\upsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\alpha\ (\varepsilon):3x+4y-12=0\ \acute{\iota}\sigma\eta\ \mu\varepsilon\ \tau\eta\nu\ \alpha\pi\acute{o}\sigma\tau\alpha\sigma\eta\ \tau o\upsilon\ \kappa\acute{\varepsilon}\nu\tau\rho o\upsilon\ \tau o\upsilon\ \kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\upsilon\ \alpha\pi o\ \tau o\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\ \varepsilon\pi\alpha\varphi\acute{\eta}\varsigma\ \mathrm{A}(0,3)}$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$\rho=d(\mathrm{K},\varepsilon)=\mathrm{KA}(2)$

$\mathrm{A}\pi o\ \tau\iota\varsigma\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\varepsilon\iota\varsigma\ (1),(2)\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$\rho=\mathrm{OK}=d(\mathrm{K},\varepsilon)=\mathrm{AK}\Leftrightarrow$

$$\rho=\sqrt{(x_{\mathrm{K}}-x_{\mathrm{O}})^2+(y_{\mathrm{K}}-y_{\mathrm{O}})^2}=\frac{|3x_{\mathrm{K}}+4y_{\mathrm{K}}-12|}{\sqrt{3^2+4^2}}=$$

$$=\sqrt{(x_{\mathrm{K}}-x_{\mathrm{A}})^2+(y_{\mathrm{K}}-y_{\mathrm{A}})^2}\overset{\substack{x_{\mathrm{O}}=y_{\mathrm{O}}=0\\ x_{\mathrm{K}}=\alpha,y_{\mathrm{K}}=\beta\\ x_{\mathrm{A}}=0,y_{\mathrm{A}}=3}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\rho=\sqrt{(\alpha-0)^2+(\beta-0)^2}=\frac{|3\alpha+4\beta-12|}{\sqrt{25}}=\sqrt{(\alpha-0)^2+(\beta-3)^2}$$

$$\Leftrightarrow\rho=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\frac{|3\alpha+4\beta-12|}{5}=\sqrt{\alpha^2+(\beta-3)^2}$$

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\sqrt{\alpha^2+(\beta-3)^2}\Leftrightarrow\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)^2=\left(\sqrt{\alpha^2+(\beta-3)^2}\right)^2$$

$$\overset{\left(\sqrt{\theta}\right)^2=\theta,\theta\geq 0}{\Leftrightarrow}\quad \cancel{\alpha^2}+\beta^2=\cancel{\alpha^2}+(\beta-3)^2\quad\overset{(x-y)^2=x^2-2xy+y^2}{\Leftrightarrow}$$

$$\cancel{\beta^2}=\cancel{\beta^2}-2\bullet\beta\bullet 3+3^2\Leftrightarrow 3(-2\beta+3)=0\Leftrightarrow -2\beta+3=0\Leftrightarrow$$

$$-2\beta=-3\Leftrightarrow\beta=\frac{-3}{-2}\Leftrightarrow\beta=\frac{3}{2}$$

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\frac{|3\alpha+4\beta-12|}{5}\overset{\beta=\frac{3}{2}}{\Leftrightarrow}\sqrt{\alpha^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{\left|3\alpha+\overset{2}{\cancel{4}}\,\frac{3}{\cancel{2}}-12\right|}{5}\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\alpha^2+\frac{9}{4}\Leftrightarrow}=\frac{\left|3\alpha+\overset{2}{\cancel{4}}\,\frac{3}{\cancel{2}}-12\right|}{5}\Leftrightarrow\sqrt{\frac{4\alpha^2+9}{4}}=\frac{|3\alpha+6-12|}{5}$$

$$\overset{\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}=\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}},\alpha\geq 0,\beta>0}{\Leftrightarrow}\quad\frac{\sqrt{4\alpha^2+9}}{2}=\frac{|3\alpha-6|}{5}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{4\alpha^2+9}}{2}=\frac{3|\alpha-2|}{5}\Leftrightarrow$$

$$5\sqrt{4\alpha^2+9}=6|\alpha-2|\quad\overset{\substack{\text{Αν } \alpha,\beta\geq 0 \text{ τότε ισχύει η}\\ \text{ισοδυναμία:}\\ \alpha=\beta\Leftrightarrow\alpha^2=\beta^2}}{\Leftrightarrow}\quad\left(5\sqrt{4\alpha^2+9}=6|\alpha-2|\right)^2$$

$$\overset{(\alpha\beta)^\nu=\alpha^\nu\beta^\nu}{\Leftrightarrow}\quad 25\left(\sqrt{4\alpha^2+9}\right)^2=36|\alpha-2|^2\quad\overset{\substack{\left(\sqrt{\alpha}\right)^2=\alpha,\alpha\geq 0\\ |x|^2=x^2}}{\Leftrightarrow}$$

$$25(4\alpha^2+9)=36(\alpha-2)^2\quad\overset{(x-y)^2=x^2-2xy+y^2}{\Leftrightarrow}$$

$$25\bullet 4\alpha^2+25\bullet 9=36\left(\alpha^2-2\bullet a\bullet 2+2^2\right)\Leftrightarrow 100\alpha^2+225=36\left(\alpha^2-4a+4\right)$$

$$100\alpha^2+225=36\alpha^2-36\bullet 4a+36\bullet 4\Leftrightarrow 100\alpha^2+225=36\alpha^2-144a+144$$

$$\Leftrightarrow 100\alpha^2+225-36\alpha^2+144a-144=0\Leftrightarrow 64\alpha^2+144a+81=0\Leftrightarrow$$

$$(8\alpha)^2+2\bullet 8a\bullet 9+9^2=0\quad\overset{(x+y)^2=x^2+2xy+y^2}{\Leftrightarrow}\quad(8\alpha+9)^2=0\Leftrightarrow 8\alpha+9=0\Leftrightarrow$$

$$8\alpha=-9\Leftrightarrow\alpha=-\frac{9}{8}$$

$8\alpha=-9 \Leftrightarrow \alpha=-\frac{9}{8}$

$\rho=\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \overset{\substack{\text{Αν } \alpha,\beta\geq 0 \text{ τότε ισχύει η} \\ \text{ισοδυναμία:} \\ \alpha=\beta\Leftrightarrow\alpha^2=\beta^2}}{\Longleftrightarrow} \rho^2=\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)^2 \overset{\left(\sqrt{\alpha}\right)^2=\alpha,\alpha\geq 0}{\Longleftrightarrow}$

$\rho^2=\alpha^2+\beta^2 \overset{\substack{\alpha=-\frac{9}{8} \\ \beta=\frac{3}{2}}}{\Longleftrightarrow} \rho^2=\left(-\frac{9}{8}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \rho^2=\frac{81}{64}+\frac{9}{4} \Leftrightarrow$

$\rho^2=\frac{81}{64}+\frac{9\bullet 16}{4\bullet 16} \Leftrightarrow \rho^2=\frac{81}{64}+\frac{144}{64} \Leftrightarrow \rho^2=\frac{225}{64}$

Ο *κύκλος* (c) *με κέντρο το σημείο* $\mathrm{K}(\alpha,\beta)$ *και ακτίνα* ρ *έχει εξίσωση* $(c):(x-\alpha)^2+(y-\alpha)^2=\rho^2$

Ο*πότε ο κύκλος θα έχει εξίσωση* :

$\left(x+\frac{9}{8}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{225}{64}$

5.

Ν*α βρείτε την εξίσωση του κύκλου όταν εφάπτεται του άξονα* $x'x$ *στο σημείο* $\mathrm{A}(3,0)$ *και διέρχεται απο το σημείο* $\mathrm{B}(1,2)$.

Έστω $\mathrm{K}(\alpha,\beta)$ *το κέντρο του κύκλου* (c). Ε*πειδή ο κύκλος* (c) *διέρχεται απο το σημείο* $\mathrm{B}(1,2)$ *η* <u>*απόσταση του κέντρου του κύκλου απο το σημείο* $\mathrm{B}(1,2)$ *θα είναι ίση με την ακτίνα του κύκλου*</u> .Ο*πότε θα έχω* :

$\rho=\mathrm{KB}(1)$

Ο *άξονας* $x'x$ *έχει εξίσωση* $x'x: y=0$

$\text{Επειδή η ευθεία } x'x : y = 0 \text{ εφάπτεται στον κύκλο}$

(c) στο σηείο επαφής $\mathrm{A}(3,0)$ θα πρέπει <u>η ακτίνα του κύκλου να είναι ίση με την απόσταση του κέτρου του απο την ευθεία $x'x : y = 0$ ίση με την απόσταση του κέντρου του κύκλου απο το σημείο επαφής $\mathrm{A}(3,0)$</u>

Οπότε θα έχω:

$$\rho = d(\mathrm{K},\varepsilon) = \mathrm{KA} \quad (2)$$

Απο τις σχέσεις $(1),(2)$ θα έχω:

$$\rho = \mathrm{BK} = d(\mathrm{K},\varepsilon) = \mathrm{AK} \Leftrightarrow$$

$$\rho = \sqrt{(x_{\mathrm{K}} - x_{\mathrm{B}})^2 + (y_{\mathrm{K}} - y_{\mathrm{B}})^2} = \frac{|y_{\mathrm{K}}|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} =$$

$$= \sqrt{(x_{\mathrm{K}} - x_{\mathrm{A}})^2 + (y_{\mathrm{K}} - y_{\mathrm{A}})^2} \overset{\substack{x_{\mathrm{A}}=3,\, y_{\mathrm{A}}=0 \\ x_{\mathrm{K}}=\alpha,\, y_{\mathrm{K}}=\beta \\ x_{\mathrm{B}}=1,\, y_{\mathrm{B}}=2}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\rho = \sqrt{(\alpha - 1)^2 + (\beta - 2)^2} = |\beta| = \sqrt{(\alpha - 3)^2 + (\beta - 0)^2}$$

$$\Leftrightarrow \rho = \sqrt{(\alpha - 1)^2 + (\beta - 2)^2} = |\beta| = \sqrt{(\alpha - 3)^2 + \beta^2}$$

$$|\beta| = \sqrt{(\alpha - 3)^2 + \beta^2} \overset{\substack{\text{Αν } \alpha,\beta \geq 0 \text{ τότε ισχύει η} \\ \text{ισοδυναμία:} \\ \alpha=\beta \Leftrightarrow \alpha^2=\beta^2}}{\Longleftrightarrow} |\beta|^2 = \left(\sqrt{(\alpha - 3)^2 + \beta^2}\right)^2$$

$$\overset{\substack{(\sqrt{\alpha})^2=\alpha,\, \alpha\geq 0 \\ |x|^2=x^2}}{\Longleftrightarrow} \beta^2 = (\alpha - 3)^2 + \beta^2 \Leftrightarrow (\alpha - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha - 3 = 0 \Leftrightarrow a = 3$$

$$\sqrt{(\alpha - 1)^2 + (\beta - 2)^2} = |\beta| \overset{a=3}{\Longleftrightarrow} \sqrt{(3 - 1)^2 + (\beta - 2)^2} = |\beta| \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{4 + (\beta - 2)^2} = |\beta| \overset{\substack{\text{Αν } \alpha,\beta \geq 0 \text{ τότε ισχύει η} \\ \text{ισοδυναμία:} \\ \alpha=\beta \Leftrightarrow \alpha^2=\beta^2}}{\Longleftrightarrow} \left(\sqrt{4 + (\beta - 2)^2}\right)^2 = |\beta|^2 \overset{\substack{(\sqrt{\alpha})^2=\alpha,\, \alpha\geq 0 \\ |x|^2=x^2}}{\Longleftrightarrow}$$

$$4 + (\beta - 2)^2 = \beta^2 \overset{(x-y)^2=x^2-2xy+y^2}{\Longleftrightarrow} 4 + \cancel{\beta^2} - 2\bullet\beta\bullet 2 + 2^2 = \cancel{\beta^2} \Leftrightarrow$$

$$4+\cancel{\beta^2}-2\bullet\beta\bullet2+4=\cancel{\beta^2}\Leftrightarrow 8-4\beta=0\Leftrightarrow 4(2-\beta)=0\Leftrightarrow$$

$$2-\beta=0\Leftrightarrow\beta=2$$

$$\acute{E}\chi\omega:\rho=|2|=2$$

Ο *κύκλος* (c) *με κέντρο το σημείο* $\mathrm{K}(\alpha,\beta)$ *και ακτίνα* ρ *έχει εξίσωση* $(c):(x-\alpha)^2+(y-\alpha)^2=\rho^2$

Ο*πότε ο κύκλος θα έχει εξίσωση*:

$$(x-3)^2+(y-2)^2=4$$

6.

Ν*α βρείτε την εξίσωση του κύκλου που τέμνει τον άξονα* $x'x$ *στα σημεία* $\mathrm{A}(4,0)$, $\mathrm{B}(8,0)$ *και διέρχεται απο το σημείο* $\Gamma(0,-2)$.

Έστω $\mathrm{K}(\alpha,\beta)$ *το κέντρο του κύκλου* (c). Ε*πειδή ο κύκλος* (c) *διέρχεται απο τα σημεία* $\mathrm{A}(4,0)$, $\mathrm{B}(8,0)$, $\Gamma(0,-2)$ *θα πρέπει* <u>*οι αποστάσεις των σημείων* Α,Β,Γ *απο το κέντρο του κύκλου να είναι ίσες με την ακτίνα του κύκλου*</u>

Ο*πότε θα έχω*:

$$\rho=\mathrm{KA}=\mathrm{KB}=\mathrm{K\Gamma}\,(1)$$

$$\boxed{\mathrm{AB}=\sqrt{(x_\mathrm{B}-x_\mathrm{A})^2+(y_\mathrm{B}-y_\mathrm{A})^2},\ \mathrm{A}(x_\mathrm{A},y_\mathrm{A}),\mathrm{B}(x_\mathrm{B},y_\mathrm{B})}$$

$$\mathrm{AK}=\mathrm{BK}\Leftrightarrow\sqrt{(x_\mathrm{K}-x_\mathrm{A})^2+(y_\mathrm{K}-y_\mathrm{A})^2}=\sqrt{(x_\mathrm{K}-x_\mathrm{B})^2+(y_\mathrm{K}-y_\mathrm{B})^2}$$

$$\overset{\substack{x_\mathrm{K}=\alpha,y_\mathrm{K}=\beta\\ x_\mathrm{A}=4,y_\mathrm{A}=0\\ x_\mathrm{B}=8,y_\mathrm{B}=0}}{\Leftrightarrow}\sqrt{(\alpha-4)^2+(\beta-0)^2}=\sqrt{(\alpha-8)^2+(\beta-0)^2}\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(\alpha-4)^2+\beta^2}=\sqrt{(\alpha-8)^2+\beta^2}\overset{\substack{\text{Αν } \alpha,\beta\geq0 \text{ τότε ισχύει η}\\ \text{ισοδυναμία:}\\ \alpha=\beta\Leftrightarrow\alpha^2=\beta^2}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left(\sqrt{(\alpha-4)^2+\beta^2}\right)^2=\left(\sqrt{(\alpha-8)^2+\beta^2}\right)^2 \overset{\left(\sqrt{\alpha}\right)^2=\alpha,\alpha\geq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$(\alpha-4)^2+\cancel{\beta^2}=(\alpha-8)^2+\cancel{\beta^2} \overset{(x-y)^2=x^2-2xy+y^2}{\Leftrightarrow}$$

$$\cancel{\alpha^2}-2\bullet\alpha\bullet 4+4^2=\cancel{\alpha^2}-2\bullet\alpha\bullet 8+8^2 \Leftrightarrow -8\alpha+16=-16\alpha+64 \Leftrightarrow$$

$$8(-\alpha+2)=16(-\alpha+4) \overset{16=2\bullet 8}{\Leftrightarrow} \cancel{8}(-\alpha+2)=2\bullet\cancel{8}(-\alpha+4) \overset{\text{Αν } \alpha\neq 0 \text{ ισχύει η ισοδυναμία: } \alpha x=\alpha y\Leftrightarrow x=y}{\Leftrightarrow}$$

$$-\alpha+2=-2a+8 \Leftrightarrow -\alpha+2a=8-2 \Leftrightarrow a=6$$

$$\mathrm{BK}=\Gamma\mathrm{K} \Leftrightarrow \sqrt{(x_{\mathrm{K}}-x_{\mathrm{B}})^2+(y_{\mathrm{K}}-y_{\mathrm{B}})^2}=\sqrt{(x_{\mathrm{K}}-x_{\Gamma})^2+(y_{\mathrm{K}}-y_{\Gamma})^2}$$

$$\overset{\substack{x_{\mathrm{K}}=\alpha,y_{\mathrm{K}}=\beta \\ x_{\mathrm{B}}=8,y_{\mathrm{B}}=0 \\ x_{\Gamma}=0,y_{\Gamma}=-2}}{\Leftrightarrow} \sqrt{(\alpha-8)^2+(\beta-0)^2}=\sqrt{(\alpha-0)^2+(\beta+2)^2} \overset{a=6}{\Leftrightarrow}$$

$$\sqrt{(6-8)^2+\beta^2}=\sqrt{6^2+(\beta+2)^2} \Leftrightarrow \sqrt{4+\beta^2}=\sqrt{36+(\beta+2)^2}$$

$$\overset{\substack{\text{Αν } \alpha,\beta\geq 0 \text{ τότε ισχύει η} \\ \text{ισοδυναμία:} \\ \alpha=\beta\Leftrightarrow\alpha^2=\beta^2}}{\Leftrightarrow} \left(\sqrt{4+\beta^2}\right)^2=\left(\sqrt{36+(\beta+2)^2}\right)^2 \overset{(x-y)^2=x^2+2xy+y^2}{\Leftrightarrow}$$

$$4+\cancel{\beta^2}=36+\cancel{\beta^2}+2\bullet\beta\bullet 2+2^2 \overset{\alpha+\beta=\alpha+\gamma\Leftrightarrow\beta=\gamma}{\Leftrightarrow} \cancel{4}=36+4\beta+\cancel{4} \Leftrightarrow$$

$$4(9+\beta)=0 \Leftrightarrow 9+\beta=0 \Leftrightarrow \beta=-9$$

$$\text{Έχω}: \rho=\mathrm{KA}=\sqrt{(x_{\mathrm{K}}-x_{\mathrm{A}})^2+(y_{\mathrm{K}}-y_{\mathrm{A}})^2} \overset{\substack{x_{\mathrm{K}}=6,y_{\mathrm{K}}=-9 \\ x_{\mathrm{A}}=4,y_{\mathrm{A}}=0}}{=}$$

$$\sqrt{(6-4)^2+(-9-0)^2}=\sqrt{4+81}=\sqrt{85}$$

Ο *κύκλος* (c) *με κέντρο το σημείο* $\mathrm{K}(\alpha,\beta)$ *και ακτίνα* ρ *έχει εξίσωση* $(c):(x-\alpha)^2+(y-\alpha)^2=\rho^2$

Ο*πότε ο κύκλος θα έχει εξίσωση*:

$$(x-6)^2+(y+9)^2=\left(\sqrt{85}\right)^2 \Leftrightarrow (x-6)^2+(y+9)^2=85$$

7.

$$\boxed{\text{Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται απο τα σημεία } \mathrm{A}(4,0) \text{ και } \mathrm{B}(8,0) \text{ και έχει το κέντρο του στην ευθεία } y = x.}$$

Έστω $\mathrm{K}(\alpha,\beta)$ *το κέντρο του κύκλου* (c). *Επειδή το κέντρο* $\mathrm{K}(\alpha,\beta)$ *του κύκλου* (c) *βρίσκεται πάνω στην ευθεία* $y = x$ *οι συντεταγμένες του ικανοποιούν την εξίσωση της ευθείας*

Οπότε θα έχω:

$$x_{\mathrm{K}} = y_{\mathrm{K}} \Leftrightarrow \alpha = \beta$$

Επειδή ο κύκλος (c) *διέρχεται απο τα σημεία* $\mathrm{A}(4,0)$, $\mathrm{B}(8,0)$ *θα πρέπει* *<u>οι αποστάσεις των σημείων Α,Β απο το κέντρο του κύκλου να είναι ίσες με την ακτίνα του κύκλου</u>*

Οπότε θα έχω:

$$\rho = \mathrm{KA} = \mathrm{KB}\,(1)$$

$$\boxed{\mathrm{AB} = \sqrt{(x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}})^2 + (y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}})^2},\ \mathrm{A}(x_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{A}}), \mathrm{B}(x_{\mathrm{B}}, y_{\mathrm{B}})}$$

$$\mathrm{AK} = \mathrm{BK} \Leftrightarrow \sqrt{(x_{\mathrm{K}} - x_{\mathrm{A}})^2 + (y_{\mathrm{K}} - y_{\mathrm{A}})^2} = \sqrt{(x_{\mathrm{K}} - x_{\mathrm{B}})^2 + (y_{\mathrm{K}} - y_{\mathrm{B}})^2}$$

$$\overset{\substack{x_{\mathrm{K}} = y_{\mathrm{K}} = \alpha \\ x_{\mathrm{A}} = 4, y_{\mathrm{A}} = 0 \\ x_{\mathrm{B}} = 8, y_{\mathrm{B}} = 0}}{\Longleftrightarrow} \sqrt{(\alpha - 4)^2 + (\alpha - 0)^2} = \sqrt{(\alpha - 8)^2 + (\alpha - 0)^2} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(\alpha - 4)^2 + \alpha^2} = \sqrt{(\alpha - 8)^2 + \alpha^2} \overset{\substack{\text{Αν } \alpha,\beta \geq 0 \text{ τότε ισχύει η} \\ \text{ισοδυναμία:} \\ \alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^2 = \beta^2}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left(\sqrt{(\alpha - 4)^2 + \alpha^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(\alpha - 8)^2 + \alpha^2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha - 4)^2 + \cancel{\alpha^2} = (\alpha - 8)^2 + \cancel{\alpha^2} \overset{\alpha + \beta = \alpha + \gamma \Leftrightarrow \beta = \gamma}{\Longleftrightarrow} (\alpha - 4)^2 = (\alpha - 8)^2$$

$$\overset{(x-y)^2=x^2-2xy+y^2}{\Leftrightarrow} \cancel{a^2} - 2\bullet a\bullet 4 + 4^2 = \cancel{a^2} - 2\bullet a\bullet 8 + 8^2 \Leftrightarrow$$

$$-8a + 16 = -16a + 64 \Leftrightarrow 8(-a+2) = 16(-a+4) \overset{16=2\bullet 8}{\Leftrightarrow}$$

$$\cancel{8}(-a+2) = 2\bullet\cancel{8}(-a+4) \overset{\text{Αν } \alpha\neq 0 \text{ ισχύει η ισοδυναμία: } \alpha x=\alpha y\Leftrightarrow x=y}{\Leftrightarrow} -a+2 = 2(-a+4) \Leftrightarrow$$

$$-a + 2 = -2a + 8 \Leftrightarrow -a + 2a = 8 - 2 \Leftrightarrow a = 6$$

$$\rho = \mathrm{AK} = \sqrt{(x_{\mathrm{K}} - x_{\mathrm{A}})^2 + (y_{\mathrm{K}} - y_{\mathrm{A}})^2} \overset{x_{\mathrm{K}}=y_{\mathrm{K}}=6,\ x_{\mathrm{A}}=4, y_{\mathrm{A}}=0}{=} \sqrt{(6-4)^2 + (6-0)^2}$$

$$= \sqrt{4+36} = \sqrt{40} \overset{40=4\bullet 10}{=} \sqrt{4\bullet 10} = \sqrt{4}\sqrt{10} = 2\sqrt{10}$$

$$\boxed{\text{Ο κύκλος } (c) \text{ με κέντρο το σημείο } \mathrm{K}(\alpha,\beta) \text{ και ακτίνα } \rho \text{ έχει εξίσωση } (c):(x-\alpha)^2 + (y-\alpha)^2 = \rho^2}$$

Οπότε ο κύκλος θα έχει εξίσωση:

$$(x-6)^2 + (y-6)^2 = \left(2\sqrt{10}\right)^2 \overset{(\alpha\beta)^\nu=\alpha^\nu\beta^\nu}{\Leftrightarrow} (x-6)^2 + (y-6)^2 = 4\left(\sqrt{10}\right)^2$$

$$\overset{\left(\sqrt{\alpha}\right)^2=\alpha,\alpha\geq 0}{\Leftrightarrow} (x-6)^2 + (y-6)^2 = 4\bullet 10 \Leftrightarrow (x-6)^2 + (y-6)^2 = 40$$

8.

$$\boxed{\text{Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου } C: x^2 + y^2 = 5 \text{ που είναι παράλληλη στην ευθεία } y = 2x + 3}$$

$(\eta): y = 2x + 3$

$$\boxed{\text{Η ευθεία με εξίσωση } y = \alpha x + \beta \text{ έχει συντελεστή διεύθυνσης τον αριθμό } \alpha \text{ !!!}}$$

Οπότε: $\lambda_\eta = 2$

Έστω (ε) *εφαπτομένη του κύκλου* $C: x^2+y^2=5$ *στο σημείο επαφής* $\mathrm{M}(x_1,y_1)$ *με* $(\varepsilon)//(\eta)$. Τ*ότε η ευθεία* (ε) *θα έχει εξίσωση.*

$(\varepsilon): xx_1+yy_1-5=0$

Α*ν* (ε) *η εφαπτομένη του κύκλου* $(C): x^2+y^2=\rho^2$ *στο σημείο επαφής* $\mathrm{M}(x_1,y_1)$. Τ*ότε η* (ε) *θα έχει εξίσωση.*
$(\varepsilon): xx_1+yy_1=\rho^2$

Έστω $y_1=0$. Τ*ότε θα έχω* $x_1\neq 0$ *γιατί η εξίσωση* $\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0$ *εκφράζει* <u>*ευθεία αν και μόνο αν τα* Α *και* Β *δεν είναι ταυτόχρονα μηδέν*</u>!!! Ο*πότε θα έχω*:

$$(\varepsilon): xx_1+yy_1-5=0 \overset{y_1=0}{\Longleftrightarrow} (\varepsilon): x-=\frac{5}{x_1}$$

Σ*υνεπώς* $(\varepsilon)//y'y$. Τ*ότε θα ισχύει*:

$$\left.\begin{cases}(\varepsilon)//y'y\\(\varepsilon)//(\eta)\end{cases}\right\}\Rightarrow(\eta)//y'y\,(\textit{Άτοπο})$$

Άρα $y_1\neq 0$

Α*ν* $(\varepsilon): \mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0$ *με* $\mathrm{B}\neq 0$ *τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της* (ε) *δίνεται απο την σχέση* $\lambda=-\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$

Ο *συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας* (ε) *δίνεται απο την σχέση*:

$$\lambda_\varepsilon=-\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=-\frac{x_1}{y_1}$$

Ε*πειδή* $(\varepsilon)//(\eta)$ *θα έχω*:

$$\lambda_\varepsilon=\lambda_\eta\Leftrightarrow-\frac{x_1}{y_1}=2\Leftrightarrow x_1=-2y_1 (1)$$

Ε*πειδή* $\mathrm{M}(x_1,y_1)\in(C)$ *οι συντεταγμένες του ικανοποιούν την εξίσωση του κύκλου* (C). Ο*πότε θα έχω*:

$x_1^{\,2}+y_1^{\,2}=5(2)$

$\text{Απο}\ \textit{τις σχέσεις}\ (1),(2)\ \textit{έχω το σύστημα}:$

$$\begin{Bmatrix} x_1^{\,2}+y_1^{\,2}=5 \\ x_1=-2y_1 \end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix} (-2y_1)^2+y_1^{\,2}=5 \\ x_1=-2y_1 \end{Bmatrix}\overset{(\alpha\beta)^\nu=\alpha^\nu\beta^\nu}{\Longleftrightarrow}\begin{Bmatrix} 4y_1^{\,2}+y_1^{\,2}=5 \\ x_1=-2y_1 \end{Bmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} \cancel{5}y_1^{\,2}=\cancel{5}\bullet 1 \\ x_1=-2y_1 \end{Bmatrix}\overset{\substack{\text{Αν } \alpha\neq 0 \text{ ισχύει η} \\ \text{ισοδυναμία:} \\ \alpha x=\alpha y\Leftrightarrow x=y}}{\Longleftrightarrow}\begin{Bmatrix} y_1^{\,2}=1 \\ x_1=-2y_1 \end{Bmatrix}\overset{x^2=\theta\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\theta},\theta\geq 0}{\Longleftrightarrow}\begin{Bmatrix} y_1=\pm\sqrt{1} \\ x_1=-2y_1 \end{Bmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} y_1=\pm 1 \\ x_1=-2y_1 \end{Bmatrix}\Leftrightarrow\left\{\begin{pmatrix} y_1=1 \\ x_1=-2y_1 \end{pmatrix}\acute{\eta}\begin{pmatrix} y_1=-1 \\ x_1=-2y_1 \end{pmatrix}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{pmatrix} y_1=1 \\ x_1=-2\bullet 1 \end{pmatrix}\acute{\eta}\begin{pmatrix} y_1=-1 \\ x_1=-2(-1) \end{pmatrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{pmatrix} y_1=1 \\ x_1=-2 \end{pmatrix}\acute{\eta}\begin{pmatrix} y_1=-1 \\ x_1=2 \end{pmatrix}\right\}$$

$\text{Αν}\ x_1=-2, y_1=1\ \textit{θα έχω την ευθεία}\ (\varepsilon_1):$

$$xx_1+yy_1-5=0\overset{x_1=-2,y_1=1}{\Longleftrightarrow}-2x+y-5=0\Leftrightarrow-(2x-y+5)=0\Leftrightarrow$$

$2x-y+5=0$

$\text{Οπότε}\ (\varepsilon_1): 2x-y+5=0$

$\text{Αν}\ x_1=2, y_1=-1\ \textit{θα έχω την ευθεία}\ (\varepsilon_1):$

$$xx_1+yy_1-5=0\overset{x_1=2,y_1=-1}{\Longleftrightarrow}2x-y-5=0\Leftrightarrow-(-2x+y+5)=0\Leftrightarrow$$

$-2x+y+5=0$

$\text{Οπότε}\ (\varepsilon_2): -2x+y+5=0$

9.

Ν*α βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου* $C: x^2+y^2=5$ *που είναι κάθετη στην ευθεία* $y=\frac{1}{2}x$

$(\eta): y=\frac{1}{2}x$

Η *ευθεία με εξίσωση* $y=\alpha x+\beta$ *έχει συντελεστή διεύθυνσης τον αριθμό* α !!!

$\text{Οπότε}: \lambda_\eta = \dfrac{1}{2}$

$\acute{Ε}\sigma\tau\omega$ (ε) εφαπτομένη του κύκλου $C: x^2 + y^2 = 5$ στο σημείο επαφής $\mathrm{M}(x_1, y_1)$ με $(\varepsilon) \perp (\eta)$. Τότε η ευθεία (ε) θα έχει εξίσωση.

$(\varepsilon): xx_1 + yy_1 - 5 = 0$

Αν (ε) η εφαπτομένη του κύκλου $(C): x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο επαφής $\mathrm{M}(x_1, y_1)$. Τότε η (ε) θα έχει εξίσωση. $(\varepsilon): xx_1 + yy_1 = \rho^2$

Έστω $y_1 = 0$. Τότε θα έχω $x_1 \neq 0$ γιατί η εξίσωση $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma = 0$ εκφράζει <u>ευθεία αν και μόνο αν τα Α και Β δεν είναι ταυτόχρονα μηδέν</u>!!! Οπότε θα έχω:

$$(\varepsilon): xx_1 + yy_1 - 5 = 0 \overset{y_1=0}{\Longleftrightarrow} (\varepsilon): x = \frac{5}{x_1}$$

Συνεπώς $(\varepsilon) // y'y$. Τότε θα ισχύει:

$$\left.\begin{cases}(\varepsilon) // y'y \\ (\varepsilon) \perp (\eta)\end{cases}\right\} \Rightarrow (\eta) \perp y'y \,(\text{Άτοπο})$$

Άρα $y_1 \neq 0$

Αν $(\varepsilon): \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma = 0$ με $\mathrm{B} \neq 0$ τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της (ε) δίνεται απο την σχέση $\lambda = -\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ε) δίνεται απο την σχέση:

$$\lambda_\varepsilon = -\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = -\frac{x_1}{y_1}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Αν } (\varepsilon_1),(\varepsilon_2) \not\parallel y'y \text{ τότε ισχύει η ισοδυναμία}:\\ (\varepsilon_1)\perp(\varepsilon_2)\Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_1}\lambda_{\varepsilon_2}=-1\\ \lambda_{\varepsilon_1}:\text{Ο συντελεστής διεύθυνσης της } (\varepsilon_1)\\ \lambda_{\varepsilon_2}:\text{Ο συντελεστής διεύθυνσης της } (\varepsilon_2)\end{array}}$$

Επειδή $(\varepsilon)\perp(\eta)$ θα έχω:

$$\lambda_\varepsilon\lambda_\eta=-1\Leftrightarrow -\frac{x_1}{y_1}\frac{1}{2}=-1\Leftrightarrow x_1=2y_1(1)$$

Επειδή $\mathrm{M}(x_1,y_1)\in(C)$ οι συντεταγμένες του ικανοποιούν την εξίσωση του κύκλου (C). Οπότε θα έχω:

$$x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}=5(2)$$

Απο τις σχέσεις $(1),(2)$ έχω το σύστημα:

$$\left\{\begin{matrix}x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}=5\\ x_1=2y_1\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}(2y_1)^2+y_1^{\ 2}=5\\ x_1=2y_1\end{matrix}\right\}\overset{(\alpha\beta)^\nu=\alpha^\nu\beta^\nu}{\Longleftrightarrow}\left\{\begin{matrix}4y_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}=5\\ x_1=2y_1\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix}\cancel{5}y_1^{\ 2}=\cancel{5}\bullet1\\ x_1=2y_1\end{matrix}\right\}\overset{\substack{\text{Αν } \alpha\neq0 \text{ ισχύει η}\\ \text{ισοδυναμία:}\\ \alpha x=\alpha y\Leftrightarrow x=y}}{\Longleftrightarrow}\left\{\begin{matrix}y_1^{\ 2}=1\\ x_1=2y_1\end{matrix}\right\}\overset{x^2=\theta\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\theta},\theta\geq0}{\Longleftrightarrow}\left\{\begin{matrix}y_1=\pm\sqrt{1}\\ x_1=2y_1\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix}y_1=\pm1\\ x_1=2y_1\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{pmatrix}y_1=1\\ x_1=2y_1\end{pmatrix}\acute{\eta}\begin{pmatrix}y_1=-1\\ x_1=2y_1\end{pmatrix}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{pmatrix}y_1=1\\ x_1=2\bullet1\end{pmatrix}\acute{\eta}\begin{pmatrix}y_1=-1\\ x_1=2(-1)\end{pmatrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{pmatrix}y_1=1\\ x_1=2\end{pmatrix}\acute{\eta}\begin{pmatrix}y_1=-1\\ x_1=-2\end{pmatrix}\right\}$$

Αν $x_1=2,y_1=1$ θα έχω την ευθεία (ε_1):

$$xx_1+yy_1-5=0\overset{x_1=2,y_1=1}{\Longleftrightarrow}2x+y-5=0$$

Οπότε $(\varepsilon_1):2x+y-5=0$

Αν $x_1=-2,y_1=-1$ θα έχω την ευθεία (ε_1):

$$xx_1+yy_1-5=0\overset{x_1=-2,y_1=-1}{\Longleftrightarrow}-2x-y-5=0\Leftrightarrow-(2x+y+5)=0\Leftrightarrow$$

$2x+y+5=0$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ (\varepsilon_2): 2x+y+5=0$

10.

$\mathrm{N}\alpha$ *βρείτε την εξίσωση της χορδής του κύκλου* $C: x^2+y^2=4$ *που έχει μέσο το σημείο* $\mathrm{M}(1,-1)$.

<u>$1^{o\varsigma}$ *τρόπος*</u>

Έστω η ευθεία (ε) *τέμνει τον κύκλο* $C: x^2+y^2=4$ *στα σημεία* $\mathrm{A}(x_1,y_1),\mathrm{B}(x_2,y_2)$ *και* $\mathrm{M}(1,-1)$ *μέσο του* AB. T*ότε θα έχω*:

$$\begin{Bmatrix} x_{\mathrm{M}}=\dfrac{x_1+x_2}{2} \\ y_{\mathrm{M}}=\dfrac{y_1+y_2}{2} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x_1+x_2=2x_{\mathrm{M}} \\ y_1+y_2=2y_{\mathrm{M}} \end{Bmatrix} \overset{\substack{x_{\mathrm{M}}=1 \\ y_{\mathrm{M}}=-1}}{\Longleftrightarrow} \begin{Bmatrix} x_1+x_2=2\bullet 1 \\ y_1+y_2=2(-1) \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} x_1+x_2=2 \\ y_1+y_2=-2 \end{Bmatrix}$$

Δ*ιακρίνω τις περιπτώσεις*:

$$\begin{Bmatrix} (\mathrm{I})\,(\varepsilon)//y'y \\ (\mathrm{II})\,(\varepsilon)\not\parallel y'y \end{Bmatrix}$$

<u>Π*ερίπτωση* (I):</u>

Ε*πειδή* $(\varepsilon)//y'y$ *και διέρχεται απο το σημείο* $\mathrm{M}(1,-1)$ *θα έχει εξίσωση.*

$(\varepsilon): x=1$

Α*ν* $(\varepsilon)//y'y$ *τότε η ευθεία* (ε) *θα έχει εξίσωση* $x=$ Η *τετμημένη του σημείου απο το οποίο διέρχεται η ευθεία* (ε)

$\underline{\text{Οι συντεταγμένες των σημείων } \mathrm{A}(x_1, y_1), \mathrm{B}(x_2, y_2) \text{ είναι οι}}$

$\underline{\text{λύσεις του συστήματος που ορίζεται απο την εξίσωση}}$

$\underline{\text{της ευθείας } (\varepsilon): x=1 \text{ και του κύκλου } C: x^2+y^2=4}$

$$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1^2+y^2=4 \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=4-1 \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=3 \\ x=1 \end{cases}$$

$$\overset{x^2=\theta \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\theta}, \theta\geq 0}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} y=\pm\sqrt{3} \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ (x,y)=\left(1,\sqrt{3}\right) \text{ ή } (x,y)=\left(1,-\sqrt{3}\right) \right\}$$

Τότε θα έχω: $y_1+y_2=\sqrt{3}-\sqrt{3}=0\neq -2$

Οπότε η ευθεία $(\varepsilon): x=1$ δεν είναι λύση του προβλήματος!!!

$\underline{\text{Περίπτωση (ΙΙ):}}$

Επειδή $(\varepsilon) \not\parallel y'y$ τότε υπάρχει ο συντελεστής διεύθυνσης λ της ευθείας (ε) και η (ε) διέρχεται απο το σημείο $\mathrm{M}(1,-1)$.

Οπότε η ευθεία (ε) έχει εξίσωση:

$$y-y_{\mathrm{M}}=\lambda(x-x_{\mathrm{M}}) \overset{\mathrm{M}(1,-1)}{\Longleftrightarrow} y+1=\lambda(x-1) \Leftrightarrow y=\lambda(x-1)-1$$

$(\varepsilon): y=\lambda(x-1)-1$

$(\varepsilon) \not\parallel y'y$
λ: Ο συντελεστής διευθύνσης της ευθείας
$\mathrm{A}(x_0, y_0) \in (\varepsilon)$
Τότε η ευθεία (ε) θα έχει εξίσωση:
$y-y_0=\lambda(x-x_0)$

$\underline{\text{Οι συντεταγμένες των σημείων } \mathrm{A}(x_1, y_1), \mathrm{B}(x_2, y_2) \text{ είναι οι}}$

$\underline{\text{λύσεις του συστήματος που ορίζεται απο την εξίσωση}}$

$\underline{\text{της ευθείας } (\varepsilon): y=\lambda(x-1)-1 \text{ και του κύκλου } C: x^2+y^2=4}$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = \lambda(x-1)-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \left[\lambda(x-1)-1\right]^2 = 4 \\ y = \lambda(x-1)-1 \end{cases} \overset{(x-y)^2 = x^2+2xy+y^2}{\Leftrightarrow}$$

$$\begin{cases} x^2 + \left[\lambda(x-1)\right]^2 - 2\lambda(x-1)+1 = 4 \\ y = \lambda(x-1)-1 \end{cases} \overset{(\alpha\beta)^\nu = \alpha^\nu\beta^\nu}{\Leftrightarrow}$$

$$\begin{cases} x^2 + \lambda^2(x-1)^2 - 2\lambda x + 2\lambda + 1 - 4 = 0 \\ y = \lambda(x-1)-1 \end{cases} \overset{(x-y)^2 = x^2-2xy+y^2}{\Leftrightarrow} x$$

$$\begin{cases} x^2 + \lambda^2(x^2 - 2x + 1) - 2\lambda x + 2\lambda - 3 = 0 \\ y = \lambda(x-1)-1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 + \lambda^2 x^2 - 2x\lambda^2 + \lambda^2 - 2\lambda x + 2\lambda - 3 = 0 \\ y = \lambda(x-1)-1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (1+\lambda^2)x^2 - 2\lambda(\lambda+1)x + \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 (1) \\ y = \lambda(x-1)-1 \end{cases}$$

Έστω η δευτεροβάθμια εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 (\alpha \neq 0)$ *με ρίζες τους πραγματικούς αριθμούς* x_1, x_2. Τότε *θα έχω*: $x_1 + x_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha}, \Delta \geq 0$

Α*ν* x_1, x_2 *οι ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης* (1) *τότε θα έχω* $x_1 + x_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha}, \Delta \geq 0$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = \left[-2\lambda(\lambda+1)\right]^2 - 4(1+\lambda^2)(\lambda^2+2\lambda-3) \overset{(\alpha\beta\gamma)^\nu = \alpha^\nu\beta^\nu\gamma^\nu}{=}$$

$$4\lambda^2(\lambda+1)^2 - 4(\lambda^2 + 2\lambda - 3 + \lambda^4 + 2\lambda^3 - 3\lambda^2) \overset{(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2}{=}$$

$$4\left[\lambda^2(\lambda^2+2\lambda+1) - (\lambda^4 + 2\lambda^3 - 2\lambda^2 + 2\lambda - 3)\right] =$$

$$= 4(\cancel{\lambda^4} + \cancel{2\lambda^3} + \lambda^2 - \cancel{\lambda^4} - \cancel{2\lambda^3} + 2\lambda^2 - 2\lambda + 3) \overset{2\lambda^2 = \lambda^2+\lambda^2, 3=1+2}{=}$$

$$= 4\left(\lambda^2+\lambda^2-2\lambda+1+2\right)=4\left(\lambda^2-2\bullet\lambda\bullet1+1^2+\lambda^2+2\right)\overset{(x-y)^2=x^2-2xy+y^2}{=}$$

$$4\left[\left(\lambda-1\right)^2+\lambda^2+2\right]>0$$

$$\left.\begin{cases}\left(\lambda-1\right)^2\geq 0\\ \lambda^2\geq 0\\ 2>0\end{cases}\right\}\overset{(+)}{\Longrightarrow}\left(\lambda-1\right)^2+\lambda^2+2>0\Rightarrow 4\left[\left(\lambda-1\right)^2+\lambda^2+2\right]>0\Rightarrow$$

$$\Delta>0$$

Ο*πότε η δευτεροβάθμια εξίσωση* (1) *έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.* Τ*ότε θα έχω*:

$$x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{-2\lambda(\lambda+1)}{1+\lambda^2}=\frac{2\lambda(\lambda+1)}{1+\lambda^2}$$

Θ*α πρέπει να ισχύει*: $\left.\begin{cases}x_1+x_2=2\\ y_1+y_2=-2\end{cases}\right\}$

$$x_1+x_2=2\Leftrightarrow \cancel{2}\,\frac{\lambda(\lambda+1)}{1+\lambda^2}=\cancel{2}\bullet1\overset{\substack{\text{Αν } \alpha\neq0 \text{ ισχύει η}\\ \text{ισοδυναμία:}\\ \alpha x=\alpha y\Leftrightarrow x=y}}{\Longleftrightarrow}\frac{\lambda(\lambda+1)}{1+\lambda^2}=1\Leftrightarrow$$

$$\cancel{\lambda^2}+\lambda=1+\cancel{\lambda^2}\overset{\alpha+\beta=\alpha+\gamma\Leftrightarrow\beta=\gamma}{\Longleftrightarrow}\lambda=1$$

Τ*ότε θα έχω*:

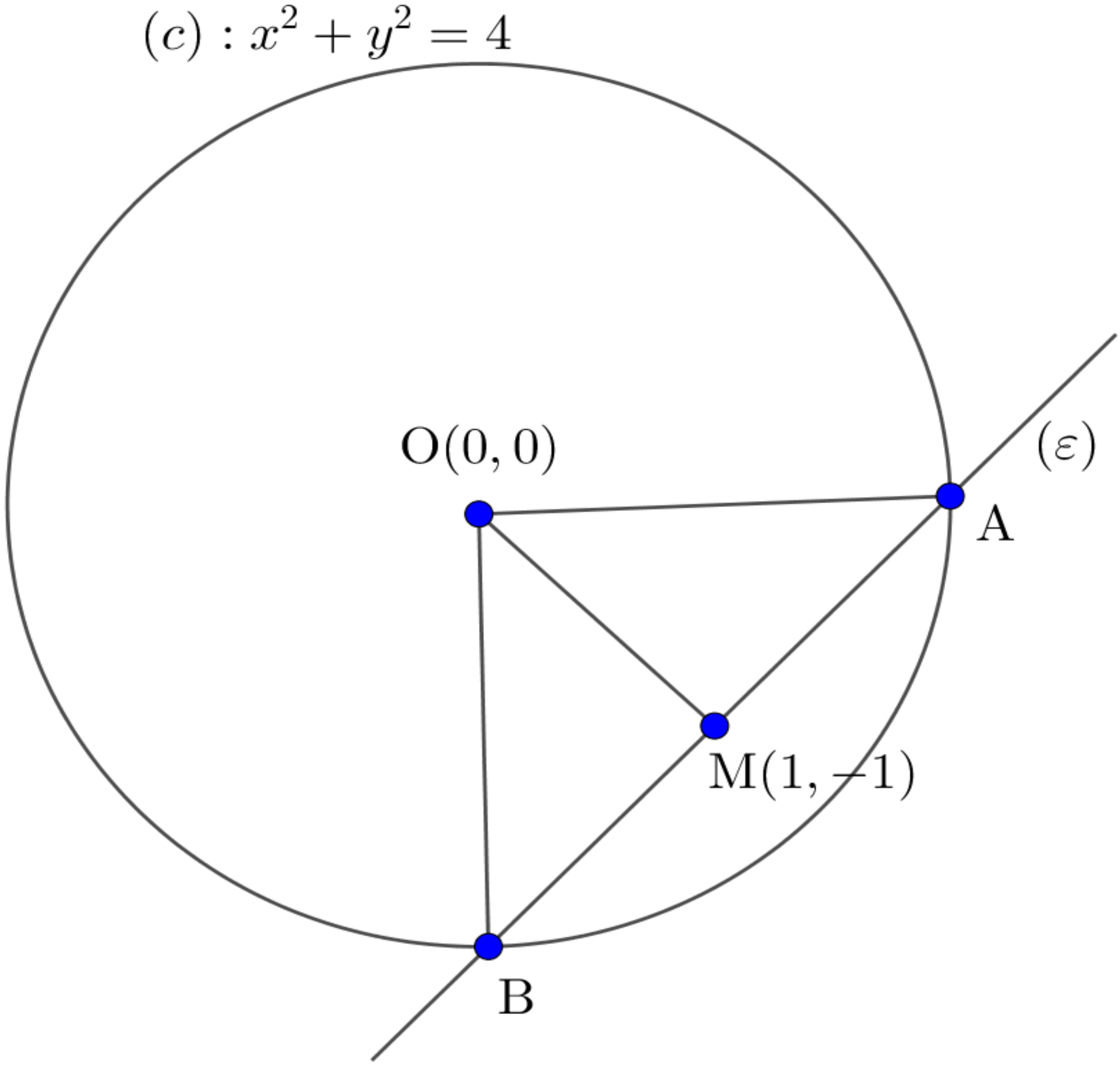
$$\left.\begin{cases}y_1=\lambda(x_1-1)-1\\ y_2=\lambda(x_2-1)-1\end{cases}\right\}\overset{\lambda=1}{\Longrightarrow}\left.\begin{cases}y_1=x_1-2\\ y_2=x_2-2\end{cases}\right\}\overset{(+)}{\Longrightarrow}$$

$$y_1+y_2=x_1-2+x_2-2=x_1+x_2-4\overset{x_1+x_2=2}{=}2-4=-2$$

<u>$2^{ος}$ *τρόπος*</u>

Τ*ο σημείο* $\mathrm{M}(1,-1)$ *είναι το μέσο της χορδής* ΑΒ.

Σ*το ισοσκελές τρίγωνο* ΟΑΒ(ΟΑ = ΟΒ) *η* ΟΜ *είναι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην βάση του* ΑΒ. *Άρα θα έχω*:



$\mathrm{OM} \perp \mathrm{AB} \left(\begin{array}{l} \textit{Ως διάμεσος που αντιστοιχεί στην βάση} \\ \textit{ισοσκελούς τριγώνου} \end{array} \right)$

Συνεπώς η ζητούμενη ευθεία θα είναι κάθετη στην ευθεία OM *και θα διέρχεται απο το σημείο* $\mathrm{M}(1,-1)$

Αν $\mathrm{AB} \nparallel y'y$, $\mathrm{A}(x_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{A}}), \mathrm{B}(x_{\mathrm{B}}, y_{\mathrm{B}})$, *τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας* AB *δίνεται απο την σχέση*: $\lambda_{\mathrm{AB}} = \dfrac{y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}}}{x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}}, x_{\mathrm{A}} \neq x_{\mathrm{B}}$

$$\lambda_{\mathrm{OM}} \underset{\mathrm{O}(0,0)}{\overset{\mathrm{M}(1,-1)}{=}} \frac{-1-0}{1-0} = \frac{-1}{1} = -1$$

Αν $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2) \not\parallel y'y$ *τότε ισχύει η ισοδυναμία*:
$(\varepsilon_1) \perp (\varepsilon_2) \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_1}\lambda_{\varepsilon_2} = -1$
λ_{ε_1} : Ο *συντελεστής διεύθυνσης της* (ε_1)
λ_{ε_2} : Ο *συντελεστής διεύθυνσης της* (ε_2)

Ε*πειδή* $(\varepsilon) \perp \mathrm{OM}$ *θα έχω*:

$\lambda_\varepsilon \lambda_{\mathrm{OM}} = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon(-1) = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = 1$

Η *ευθεία* (ε) *θα έχει εξίσωση*:

$$y - y_{\mathrm{M}} = \lambda_\varepsilon(x - x_{\mathrm{M}}) \overset{\substack{x_{\mathrm{M}}=1,\, y_{\mathrm{M}}=-1 \\ \lambda_\varepsilon = 1}}{\Longleftrightarrow} y+1 = 1(x-1) \Leftrightarrow y+1 = x-1 \Leftrightarrow$$
$$y = x-2$$

11.

(I) Ν*α αποδείξετε ότι η εξίσωση* $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$ *εκφράζει κύκλο με κέντρο το σημείο* $\mathrm{K}(1,-2)$ *και ακτίνα* $\rho = 1$
(II) Ν*α αποδείξετε οτι το σημείο* $\mathrm{A}(1,-1)$ *ανήκει στον κύκλο με κέντρο το σημείο* $\mathrm{K}(1,-2)$ *και ακτίνα* $\rho = 1$
(III) Ν*α βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου* $(\mathrm{K}(1,-2),1)$ *στο σημείο επαφής* $\mathrm{A}(1,-1)$

$\mathrm{H}\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta\ x^2+y^2+\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0\ \varepsilon\kappa\rho\acute{\alpha}\zeta\varepsilon\iota\ \kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\ \acute{o}\tau\alpha\nu$ $\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma>0.\ \mathrm{T}\acute{o}\tau\varepsilon\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ \tau o\nu\ \kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\ \mu\varepsilon\ \kappa\acute{\varepsilon}\nu\tau\rho o\ \mathrm{K}\left(-\frac{\mathrm{A}}{2},-\frac{\mathrm{B}}{2}\right)$ $\kappa\alpha\iota\ \alpha\kappa\tau\acute{\iota}\nu\alpha\ \rho=\frac{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma}}{2}$

$(\mathrm{I})\, x^2+y^2-2x+4y+4=0\,(1)$

$\acute{E}\chi\omega: \mathrm{A}=-2, \mathrm{B}=4, \Gamma=4$

$\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma=(-2)^2+4^2-4\bullet 4=4+\cancel{16}-\cancel{16}=4>0$

$\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma>0\ \eta\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta\ (1)\ \varepsilon\kappa\varphi\rho\acute{\alpha}\zeta\varepsilon\iota\ \kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o.$

$\acute{E}\chi\omega: -\frac{\mathrm{A}}{2}=-\frac{-2}{2}=1, -\frac{\mathrm{B}}{2}=-\frac{4}{2}=-2$

$\mathrm{T}o\ \kappa\acute{\varepsilon}\nu\tau\rho o\ \tau o\upsilon\ \kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\upsilon\ \theta\alpha\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \tau o\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\ \mathrm{K}(1,-2)\ \kappa\alpha\iota\ \eta$

$\alpha\kappa\tau\acute{\iota}\nu\alpha\ \tau o\upsilon\ \rho=\frac{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma}}{2}=\frac{\sqrt{4}}{2}=\frac{2}{2}=1$

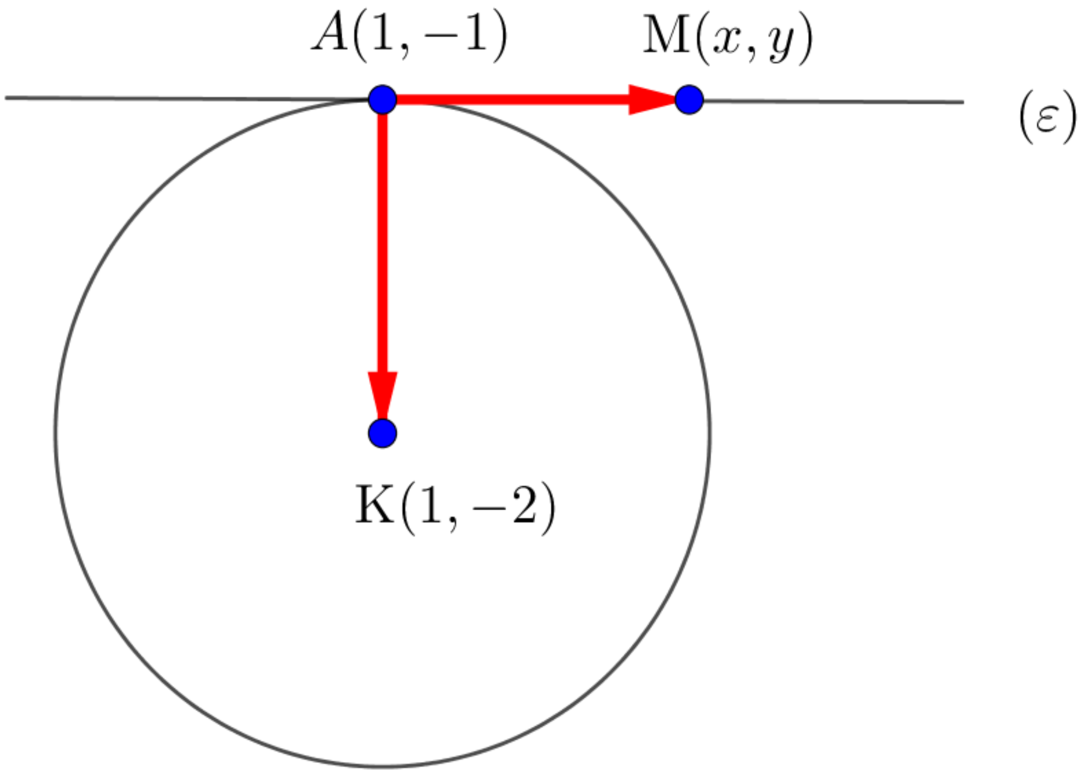
$(\mathrm{II})\, x_{\mathrm{A}}{}^2+y_{\mathrm{A}}{}^2-2x_{\mathrm{A}}+4y_{\mathrm{A}}+4 \overset{\substack{x_{\mathrm{A}}=1\\ y_{\mathrm{A}}=-1}}{=} 1^2+(-1)^2-2\bullet 1+4(-1)+4=$
$=1+1-2-4+4=0$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \tau o\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\ \mathrm{A}(1,-1)\ \alpha\nu\acute{\eta}\kappa\varepsilon\iota\ \sigma\tau o\ \kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\ (\mathrm{K}(1,-2),1)\ \gamma\iota\alpha\tau\acute{\iota}\ o\iota$ $\sigma\upsilon\nu\tau\varepsilon\tau\alpha\gamma\mu\acute{\varepsilon}\nu\varepsilon\varsigma\ \tau o\upsilon\ \iota\kappa\alpha\nu o\pi o\iota o\acute{\upsilon}\nu\ \tau\eta\nu\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta\ \tau o\upsilon\ \kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\upsilon.$

(III)

<u>$1^{o\varsigma}\ \tau\rho\acute{o}\pi o\varsigma$</u>

$\mathrm{A}\nu\ (\varepsilon)\ \eta\ \varepsilon\varphi\alpha\pi\tau o\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta\ \tau o\upsilon\ \kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\upsilon\ (\mathrm{K}(1,-2),1)\ \sigma\tau o\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\ \varepsilon\pi\alpha\varphi\acute{\eta}\varsigma$ $\mathrm{A}(1,-1)\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \acute{\varepsilon}\nu\alpha\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\ \mathrm{M}(x,y)\ \alpha\nu\acute{\eta}\kappa\varepsilon\iota\ \sigma\tau\eta\nu\ (\varepsilon)\ \alpha\nu\ \kappa\alpha\iota\ \mu\acute{o}\nu o\ \alpha\nu$ $\iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\ \mathrm{AM}\perp\mathrm{AK}.$



$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} \underset{\mathrm{A}(1,-1)}{\overset{\mathrm{M}(x,y)}{=}} (x-1, y+1)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AK}} \underset{\mathrm{A}(1,-1)}{\overset{\mathrm{K}(1,-2)}{=}} (1-1, -2+1) = (0, -1)$$

$$\mathrm{AM} \perp \mathrm{AK} \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AM}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AK}} \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AM}}\,\overrightarrow{\mathrm{AK}} = 0 \Leftrightarrow 0(x-1) - 1(y+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow y+1 = 0 \Leftrightarrow y = -1$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}\vec{\beta} = 0 \\ \mathrm{A}\nu\ \vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2), \vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2)\ \tau \acute{o} \tau \varepsilon\ \vec{\alpha}\vec{\beta} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 \end{array}}$$

<u>$2^{ος}$ *τρόπος*</u>

Αν (ε) η εφαπτομένη του κύκλου $(\mathrm{K}(1,-2),1)$ στο σημείο επαφής $\mathrm{A}(1,-1)$. Τότε θα έχω $\mathrm{A}(1,-1)\in(\varepsilon)$. Διακρίνω τις περιπτώσεις :

$$\begin{Bmatrix} (\mathrm{I})(\varepsilon)//y'y \\ (\mathrm{II})(\varepsilon)//y'y \end{Bmatrix}$$

Περίπτωση (I):

Επειδή $(\varepsilon)//y'y$ και διέρχεται απο το σημείο $\mathrm{A}(1,-1)$ θα έχει εξίσωση.

$(\varepsilon): x=1 \Leftrightarrow (\varepsilon): x-1=0$

Αν $(\varepsilon)//y'y$ τότε η ευθεία (ε) θα έχει εξίσωση
$x=$ $\boxed{\text{Η τετμημένη του σημείου απο το οποίο διέρχεται η ευθεία } (\varepsilon)}$

<u>Η ευθεία (ε) εφάπτεται στον κύκλο $(\mathrm{K}(1,-2),1)$ αν και μόνο αν η απόσταση του κέντρου του κύκλου απο την ευθεία (ε) είναι ίση με την ακτίνα του κύκλου.</u>

Έχω: $d(\mathrm{K}(1,-2),(\varepsilon))=\dfrac{|x_{\mathrm{K}}-1|}{\sqrt{0^2+1^2}}\overset{x_{\mathrm{K}}=1}{=}|1-1|=0\neq 1=\rho$

Συνεπώς η ευθεία $(\varepsilon): x-1=0$ δεν είναι λύση του προβλήματος

Έστω ευθεία $(\varepsilon): \mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0$ με $\lvert\mathrm{A}\rvert+\lvert\mathrm{B}\rvert\neq 0$ τότε η αποσταση του σημείου $\mathrm{M}(x_0,y_0)$ απο την ευθεία (ε) δίνεται απο την σχέση :
$d(\mathrm{M},\varepsilon)=\dfrac{\lvert\mathrm{A}x_0+\mathrm{B}y_0+\Gamma\rvert}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}}$
$d(\mathrm{M},\varepsilon)$: Η απόσταση του σημείου Μ απο την ευθεία (ε)

$\underline{\Pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\pi\tau\omega\sigma\eta\,(\mathrm{II})}$:

$\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\,(\varepsilon)\not\parallel y'y$ $\tau\acute{o}\tau\varepsilon$ $\upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota$ o $\sigma\upsilon\nu\tau\varepsilon\lambda\varepsilon\sigma\tau\acute{\eta}\varsigma$ $\delta\iota\varepsilon\acute{\upsilon}\theta\upsilon\nu\sigma\eta\varsigma$ λ $\tau\eta\varsigma$ $\varepsilon\upsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\alpha\varsigma$ (ε) $\kappa\alpha\iota$ η (ε) $\delta\iota\acute{\varepsilon}\rho\chi\varepsilon\tau\alpha\iota$ $\alpha\pi o$ τo $\sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o$ $\mathrm{A}(1,-1)$.

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon$ η $\varepsilon\upsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\alpha$ (ε) $\acute{\varepsilon}\chi\varepsilon\iota$ $\varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta$:

$$y-y_{\mathrm{A}}=\lambda(x-x_{\mathrm{A}})\overset{\mathrm{M}(1,-1)}{\Longleftrightarrow}y+1=\lambda(x-1)\Leftrightarrow y+1=\lambda x-\lambda\Leftrightarrow$$

$$-\lambda x+y+\lambda+1=0$$

$$(\varepsilon):-\lambda x+y+\lambda+1=0$$

$$\boxed{\begin{array}{l}(\varepsilon)\not\parallel y'y\\ \lambda:\mathrm{O}\ \sigma\upsilon\nu\tau\varepsilon\lambda\varepsilon\sigma\tau\acute{\eta}\varsigma\ \delta\iota\varepsilon\upsilon\theta\acute{\upsilon}\nu\sigma\eta\varsigma\ \tau\eta\varsigma\ \varepsilon\upsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\alpha\varsigma\\ \mathrm{A}(x_0,y_0)\in(\varepsilon)\\ \mathrm{T}\acute{o}\tau\varepsilon\ \eta\ \varepsilon\upsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\alpha\ (\varepsilon)\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\varepsilon\iota\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta:\\ y-y_0=\lambda(x-x_0)\end{array}}$$

$\underline{\mathrm{H}\ \varepsilon\upsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\alpha\ (\varepsilon)\ \varepsilon\varphi\acute{\alpha}\pi\tau\varepsilon\tau\alpha\iota\ \sigma\tau o\nu\ \kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\ (\mathrm{K}(1,-2),1)\ \alpha\nu\ \kappa\alpha\iota\ \mu\acute{o}\nu o\ \alpha\nu}$

$\underline{\eta\ \alpha\pi\acute{o}\sigma\tau\alpha\sigma\eta\ \tau o\upsilon\ \kappa\acute{\varepsilon}\nu\tau\rho o\upsilon\ \tau o\upsilon\ \kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\upsilon\ \alpha\pi o\ \tau\eta\nu\ \varepsilon\upsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\alpha\ (\varepsilon)\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota}$

$\underline{\acute{\iota}\sigma\eta\ \mu\varepsilon\ \tau\eta\nu\ \alpha\kappa\tau\acute{\iota}\nu\alpha\ \tau o\upsilon\ \kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\upsilon.}$

$$d(\mathrm{K}(1,-2),(\varepsilon))=\rho\Leftrightarrow\frac{|-\lambda x_{\mathrm{K}}+y_{\mathrm{K}}+\lambda+1|}{\sqrt{(-\lambda)^2+1^2}}=1\overset{\substack{x_{\mathrm{K}}=1\\ y_{\mathrm{K}}=-2}}{\Longleftrightarrow}\frac{|-\lambda-2+\lambda+1|}{\sqrt{(-\lambda)^2+1^2}}=1$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{\lambda^2+1}}=1\Leftrightarrow\sqrt{\lambda^2+1}=1\overset{\substack{\mathrm{A}\nu\ \alpha,\beta\geq 0\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\ \eta\\ \iota\sigma o\delta\upsilon\nu\alpha\mu\acute{\iota}\alpha:\\ \alpha=\beta\Leftrightarrow\alpha^2=\beta^2}}{\Longleftrightarrow}\left(\sqrt{\lambda^2+1}\right)^2=1^2$$

$$\overset{(\sqrt{\alpha})^2=\alpha,\alpha\geq 0}{\Longleftrightarrow}\lambda^2+\cancel{1}=\cancel{1}\Leftrightarrow\lambda^2=0\Leftrightarrow\lambda=0$$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon$ η $\varepsilon\upsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\alpha$ (ε) $\theta\alpha$ $\acute{\varepsilon}\chi\varepsilon\iota$ $\varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta$:

$$-\lambda x+y+\lambda+1=0\overset{\lambda=0}{\Longleftrightarrow}0x+y+0+1=0\Leftrightarrow y+1=0$$

12.

$\mathrm{N}\alpha$ *αποδείξετε ότι η εξίσωση*
$$(x-\alpha)(x-\beta)+(y-\gamma)(y-\delta)=0$$
παριστάνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τετραπλεύρου με κορυφές τα σημεία $\mathrm{A}(\alpha,\gamma),\mathrm{B}(\beta,\gamma),\Gamma(\beta,\delta),\Delta(\alpha,\delta)$ *και ότι οι* $\mathrm{A}\Gamma$ *και* $\mathrm{B}\Delta$ *είναι διάμετροι αυτού του κύκλου.*

$$\boxed{(x+\kappa)(x+\lambda)=x^2+\begin{pmatrix}\text{Το άθροισμα}\\ \text{των } \kappa \text{ και } \lambda\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}\text{Το γινόμενο}\\ \text{των } \kappa \text{ και } \lambda\end{pmatrix}}$$

$$(x-\alpha)(x-\beta)+(y-\gamma)(y-\delta)=0 \Leftrightarrow$$
$$x^2+(-\alpha-\beta)x+(-\alpha)(-\beta)+y^2+(-\gamma-\delta)y+(-\gamma)(-\delta)=0 \Leftrightarrow$$
$$x^2+y^2-(\alpha+\beta)x-(\gamma+\delta)y+\alpha\beta+\gamma\delta=0$$

Η *εξίσωση* $x^2+y^2+\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0$ *εκράζει κύκλο όταν* $\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma>0.$ Τ*ότε έχω τον κύκλο με κέντρο* $\mathrm{K}\left(-\frac{\mathrm{A}}{2},-\frac{\mathrm{B}}{2}\right)$ *και ακτίνα* $\rho=\frac{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma}}{2}$

Έχω: $\mathrm{A}=-(\alpha+\beta),\mathrm{B}=-(\gamma+\delta),\Gamma=\alpha\beta+\gamma\delta$

$$\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma=\left[-(\alpha+\beta)\right]^2+\left[-(\gamma+\delta)\right]-4(\alpha\beta+\gamma\delta)\overset{(-x)^2=x^2}{=}$$
$$(\alpha+\beta)^2+(\gamma+\delta)^2-4\alpha\beta-4\gamma\delta\overset{(x+y)^2=x^2+2xy+y^2}{=}$$
$$\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2+\gamma^2+2\gamma\delta+\delta^2-4\alpha\beta-4\gamma\delta=$$
$$\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2+\gamma^2-2\gamma\delta+\delta^2\overset{(x-y)^2=x^2-2xy+y^2}{=}(\alpha-\beta)^2+(\gamma-\delta)^2\geq 0$$

Ο*πότε*: $\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma\geq 0$

Έστω $\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma=0\Leftrightarrow(\alpha-\beta)^2+(\gamma-\delta)^2=0\Leftrightarrow$
$$\alpha-\beta=\gamma-\delta=0\Leftrightarrow\alpha=\beta,\gamma=\delta$$

$\boxed{x^2+y^2=0 \Leftrightarrow x=y=0}$

Επειδή $\alpha=\beta$ θα έχω:

$\mathrm{A}(\alpha,\gamma) \overset{\alpha=\beta}{\equiv} \mathrm{A}(\alpha,\gamma)$

Τότε τα σημεία $\mathrm{A}(\alpha,\gamma)$ και $\mathrm{B}(\beta,\gamma)$ ταυτίζονται γιατί έχουν ίσες τετμημένες και ίσες τεταγμένες. Αυτό είναι άτοπο γιατί υπάρχει τετράπλευρο $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ συνεπώς τα σημεία $\mathrm{A,B,\Gamma,\Delta}$ είναι ανα δυο διακεκριμένα!!! Οπότε $\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma>0$ συνεπώς η εξίσωση $(x-\alpha)(x-\beta)+(y-\gamma)(y-\delta)=0$ εκφράζει κύκλο.

Έχω: $-\dfrac{\mathrm{A}}{2}=-\dfrac{-(\alpha+\beta)}{2}=\dfrac{\alpha+\beta}{2}, -\dfrac{\mathrm{B}}{2}=-\dfrac{-(\gamma+\delta)}{2}=\dfrac{\gamma+\delta}{2}$

Το κέντρο του κύκλου είναι $\mathrm{K}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\dfrac{\gamma+\delta}{2}\right)$

Έχω: $(x_\mathrm{A}-\alpha)(x_\mathrm{A}-\beta)+(y_\mathrm{A}-\gamma)(y_\mathrm{A}-\delta) \overset{\substack{x_\mathrm{A}=\alpha\\ y_\mathrm{A}=\gamma}}{=}$
$(\alpha-\alpha)(\alpha-\beta)+(\gamma-\gamma)(\gamma-\delta)=0(\alpha-\beta)+0(\gamma-\delta)=0$

Οπότε το σημείο $\mathrm{A}(\alpha,\gamma)$ ανήκει στον κύκλο γιατί οι συντεταγμένες του ικανοποιούν την εξίσωση του κύκλου.

Έχω: $(x_\mathrm{B}-\alpha)(x_\mathrm{B}-\beta)+(y_\mathrm{B}-\gamma)(y_\mathrm{B}-\delta) \overset{\substack{x_\mathrm{B}=\beta\\ y_\mathrm{B}=\gamma}}{=}$
$(\beta-\alpha)(\beta-\beta)+(\gamma-\gamma)(\gamma-\delta)=(\beta-\alpha)0+0(\gamma-\delta)=0$

Οπότε το σημείο $\mathrm{B}(\beta,\gamma)$ ανήκει στον κύκλο γιατί οι συντεταγμένες του ικανοποιούν την εξίσωση του κύκλου.

Έχω: $(x_\Gamma-\alpha)(x_\Gamma-\beta)+(y_\Gamma-\gamma)(y_\Gamma-\delta) \overset{\substack{x_\Gamma=\beta\\ y_\Gamma=\delta}}{=}$
$(\beta-\alpha)(\beta-\beta)+(\delta-\gamma)(\delta-\delta)=(\beta-\alpha)0+(\delta-\gamma)0=0$

Οπότε το σημείο $\Gamma(\beta,\delta)$ ανήκει στον κύκλο γιατί οι συντεταγμένες του ικανοποιούν την εξίσωση του κύκλου.

$$\textit{Έχω}: (x_\Delta-\alpha)(x_\Delta-\beta)+(y_\Delta-\gamma)(y_\Delta-\delta) \overset{\substack{x_\Delta=\alpha\\ y_\Delta=\delta}}{=}$$
$$(\alpha-\alpha)(\alpha-\beta)+(\delta-\gamma)(\delta-\delta)=0(\alpha-\beta)+(\delta-\gamma)0=0$$

Οπότε το σημείο $\Delta(\alpha,\delta)$ *ανήκει στον κύκλο γιατί οι συντεταγμένες του ικανοποιούν την εξίσωση του κύκλου.*

Έστω $\mathrm{M}(x_\mathrm{M},y_\mathrm{M})$ *το μέσο της χορδής* ΑΓ. *Τότε θα έχω:*

Αν $\mathrm{M}(x_\mathrm{M},y_\mathrm{M})$ *το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος* ΑΒ *με* $\mathrm{A}(x_\mathrm{A},y_\mathrm{A}),\mathrm{B}(x_\mathrm{B},y_\mathrm{B})$ *τότε θα έχω:* $x_\mathrm{M}=\frac{x_\mathrm{A}+x_\mathrm{B}}{2}$, $y_\mathrm{M}=\frac{y_\mathrm{A}+y_\mathrm{B}}{2}$

$$x_\mathrm{M}=\frac{x_\mathrm{A}+x_\Gamma}{2}\overset{\substack{x_\mathrm{A}=\alpha\\ x_\Gamma=\beta}}{=}\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$y_\mathrm{M}=\frac{y_\mathrm{A}+y_\Gamma}{2}\overset{\substack{y_\mathrm{A}=\gamma\\ y_\Gamma=\delta}}{=}\frac{\gamma+\delta}{2}$$

$$\textit{Οπότε}: \boxed{\mathrm{M}\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\frac{\gamma+\delta}{2}\right)}$$

Συνεπώς τα σημεία $\mathrm{M}\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\frac{\gamma+\delta}{2}\right)$ *και* $\mathrm{K}\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\frac{\gamma+\delta}{2}\right)$ *ταυτίζονται γιατί έχουν ίσες τετμημένες και ίσες τεταγμένες.*

Επειδή τα σημεία Α,Γ *ανήκουν στον κύκλο και το μέσο του* ΑΓ *είναι το κέντρο του κύκλου προκύπτει οτι η* ΑΓ *είναι διάμετρος.*

Έστω $\Lambda(x_\Lambda,y_\Lambda)$ *το μέσο της χορδής* ΒΔ. *Τότε θα έχω:*

$$x_\Lambda=\frac{x_\mathrm{B}+x_\Delta}{2}\overset{\substack{x_\mathrm{B}=\beta\\ x_\Delta=\alpha}}{=}\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$y_\Lambda=\frac{y_\mathrm{B}+y_\Delta}{2}\overset{\substack{y_\mathrm{B}=\gamma\\ y_\Delta=\delta}}{=}\frac{\gamma+\delta}{2}$$

$\text{Οπότε}: \boxed{\Lambda\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\gamma+\delta}{2}\right)}$

$\text{Συνεπώς τα σημεία } \Lambda\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\gamma+\delta}{2}\right) \text{ και } \mathrm{K}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\gamma+\delta}{2}\right)$

ταυτίζονται γιατί έχουν ίσες τετμημένες και ίσες τεταγμένες.

Επειδή τα σημεία B, Δ ανήκουν στον κύκλο και το μέσο του $\mathrm{B}\Delta$ είναι το κέντρο του κύκλου προκύπτει οτι η $\mathrm{B}\Delta$ είναι διάμετρος.

13.

Να αποδείξετε ότι η ευθεία $x\sigma\upsilon\nu\varphi + y\eta\mu\varphi = 4\eta\mu\varphi - 2\sigma\upsilon\nu\varphi + 4$ εφάπτεται του κύκλου $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 4 = 0$.

$(\varepsilon): x\sigma\upsilon\nu\varphi + y\eta\mu\varphi - 4\eta\mu\varphi + 2\sigma\upsilon\nu\varphi - 4 = 0$

$x^2 + y^2 + 4x - 8y + 4 = 0 (1)$

Η εξίσωση $x^2 + y^2 + \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma = 0$ εκράζει κύκλο όταν $\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 - 4\Gamma > 0$. Τότε έχω τον κύκλο με κέντρο $\mathrm{K}\left(-\frac{\mathrm{A}}{2}, -\frac{\mathrm{B}}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 - 4\Gamma}}{2}$

Έχω: $\mathrm{A} = 4, \mathrm{B} = -8, \Gamma = 4$

$\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 - 4\Gamma = 4^2 + (-8)^2 - 4 \bullet 4 = \cancel{16} + 64 - \cancel{16} = 64 > 0$

Επειδή $\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 - 4\Gamma > 0$ η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο.

Έχω: $-\frac{\mathrm{A}}{2} = -\frac{4}{2} = -2, -\frac{\mathrm{B}}{2} = -\frac{-8}{2} = 4$

Οπότε ο κύκλος έχει κένρο $\mathrm{K}(-2, 4)$

Η ακτίνα του κύκλου είναι:

$$\rho = \frac{\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{64}}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$\underline{\text{Η } \textit{ευθεία } (\varepsilon) \textit{ εφάπτεται στον κυκλο } (\mathrm{K}(-2,4),4) \textit{ αν και μόνο}}$

$\underline{\textit{αν η απόσταση του κέντρου του κύκλου απο την ευθεία } (\varepsilon)}$

$\underline{\textit{είναι ίση με την ακτίνα του κύκλου.}}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \textit{Έστω ευθεία } (\varepsilon): \mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0 \textit{ με } |\mathrm{A}|+|\mathrm{B}|\neq 0 \textit{ τότε η} \\ \textit{αποσταση του σημείου } \mathrm{M}(x_0,y_0) \textit{ απο την ευθεία } (\varepsilon) \\ \textit{δίνεται απο την σχέση}: \\ d(\mathrm{M},\varepsilon)=\dfrac{|\mathrm{A}x_0+\mathrm{B}y_0+\Gamma|}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}} \\ d(\mathrm{M},\varepsilon): \text{Η } \textit{απόσταση του σημείου } \mathrm{M} \textit{ απο την ευθεία } (\varepsilon) \end{array}}$$

$$d(\mathrm{K}(-2,4),\varepsilon)=\frac{|x_{\mathrm{K}}\,\sigma\upsilon\nu\varphi+y_{\mathrm{K}}\,\eta\mu\varphi-4\eta\mu\varphi+2\sigma\upsilon\nu\varphi-4|}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2\varphi+\eta\mu^2\varphi}}\overset{\substack{x_{\mathrm{K}}=-2\\ y_{\mathrm{K}}=4}}{=}$$

$$\boxed{\sigma\upsilon\nu^2\varphi+\eta\mu^2\varphi=1}$$

$$\frac{|\cancel{-2\sigma\upsilon\nu\varphi}+\cancel{4\eta\mu\varphi}\cancel{-4\eta\mu\varphi}+\cancel{2\sigma\upsilon\nu\varphi}-4|}{\sqrt{1}}=\frac{4}{1}=4$$

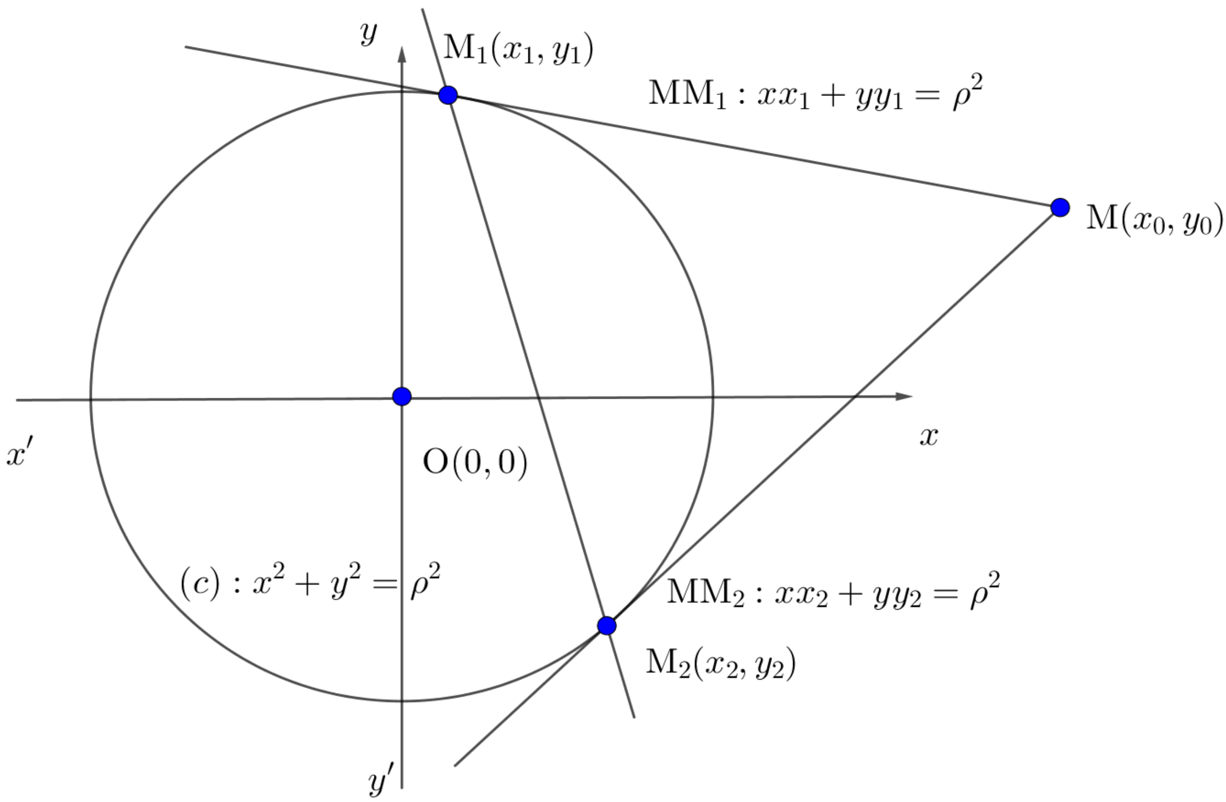
$\Sigma\textit{υνεπώς η ευθεία } (\varepsilon) \textit{ εφάπτεται στον κύκλο } (\mathrm{K}(-2,4),4)$

14.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Α}\textit{πο ένα σημείο } \mathrm{M}_0(x_0,y_0) \textit{ εκτός του κύκλου } x^2+y^2=\rho^2 \\ \textit{φέρνουμε δυο εφαπτόμενες του. } \text{Α}\textit{ν } \mathrm{M}_1,\mathrm{M}_2 \textit{ τα σημεία} \\ \textit{επαφής, να αποδείξετε ότι η χορδή } \mathrm{M}_1\mathrm{M}_2 \textit{ έχει εξίσωση} \\ xx_0+yy_0=\rho^2. \end{array}}$$

Ε*πειδή* $\mathrm{M}_0\mathrm{M}_1$ *εφαπτομένη του κύκλου* $x^2+y^2=\rho^2$ *στο σημείο επαφής* $\mathrm{M}_1(x_1,y_1)$ *η* $\mathrm{M}_0\mathrm{M}_1$ *θα έχει εξίσωση*:

$\mathrm{M}_0\mathrm{M}_1: xx_1+yy_1=\rho^2$



Επειδή $\mathrm{M}_0\left(x_0, y_0\right) \in \mathrm{M}_0\mathrm{M}_1$ *οι συντεταγμένες του ικανοποιούν την εξίσωση της ευθείας* $\mathrm{M}_0\mathrm{M}_1$. *Οπότε θα έχω*:

$\boxed{x_0x_1 + y_0y_1 = \rho^2}\,(1)$

Επειδή $\mathrm{M}_0\mathrm{M}_2$ *εφαπτομένη του κύκλου* $x^2 + y^2 = \rho^2$ *στο σημείο επαφής* $\mathrm{M}_2\left(x_2, y_2\right)$ *η* $\mathrm{M}_0\mathrm{M}_2$ *θα έχει εξίσωση*:

$\mathrm{M}_0\mathrm{M}_2 : xx_2 + yy_2 = \rho^2$

Επειδή $\mathrm{M}_0\left(x_0, y_0\right) \in \mathrm{M}_0\mathrm{M}_2$ *οι συντεταγμένες του ικανοποιούν την εξίσωση της ευθείας* $\mathrm{M}_0\mathrm{M}_2$. *Οπότε θα έχω*:

$\boxed{x_0x_2 + y_0y_2 = \rho^2}\,(2)$

Θεωρώ την ευθεία $(\varepsilon): x_0x + y_0y = \rho^2$

Απο την σχέση (1) *προκύπτει οτι οι συντεταγμένες του σημείου* $\mathrm{M}_1(x_1, y_1)$ *ικανοποιούν την εξίσωση της ευθείας* (ε). *Οπότε το σημείο* $\mathrm{M}_1(x_1, y_1)$ *ανήκει στην ευθεία* (ε) *γιατί οι συντεταγμένες του ικανοποιούν την εξίσωση της ευθείας* (ε).

Απο την σχέση (2) *προκύπτει οτι οι συντεταγμένες του σημείου* $\mathrm{M}_2(x_2, y_2)$ *ικανοποιούν την εξίσωση της ευθείας* (ε). *Οπότε το σημείο* $\mathrm{M}_2(x_2, y_2)$ *ανήκει στην ευθεία* (ε) *γιατί οι συντεταγμένες του ικανοποιούν την εξίσωση της ευθείας* (ε).

Γνωρίζω οτι δυο διαφορετικά σημεία ορίζουν την θέση μιας και μόνο ευθείας. Επειδή τα σημεία $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2$ *είναι διαφορετικά μεταξύ τους και ανήκουν στην ευθεία* (ε) *προκύπτει ότι η ευθεία* (ε) *ταυτίζεται με την* $\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2$!!!. *Οπότε θα έχω:*

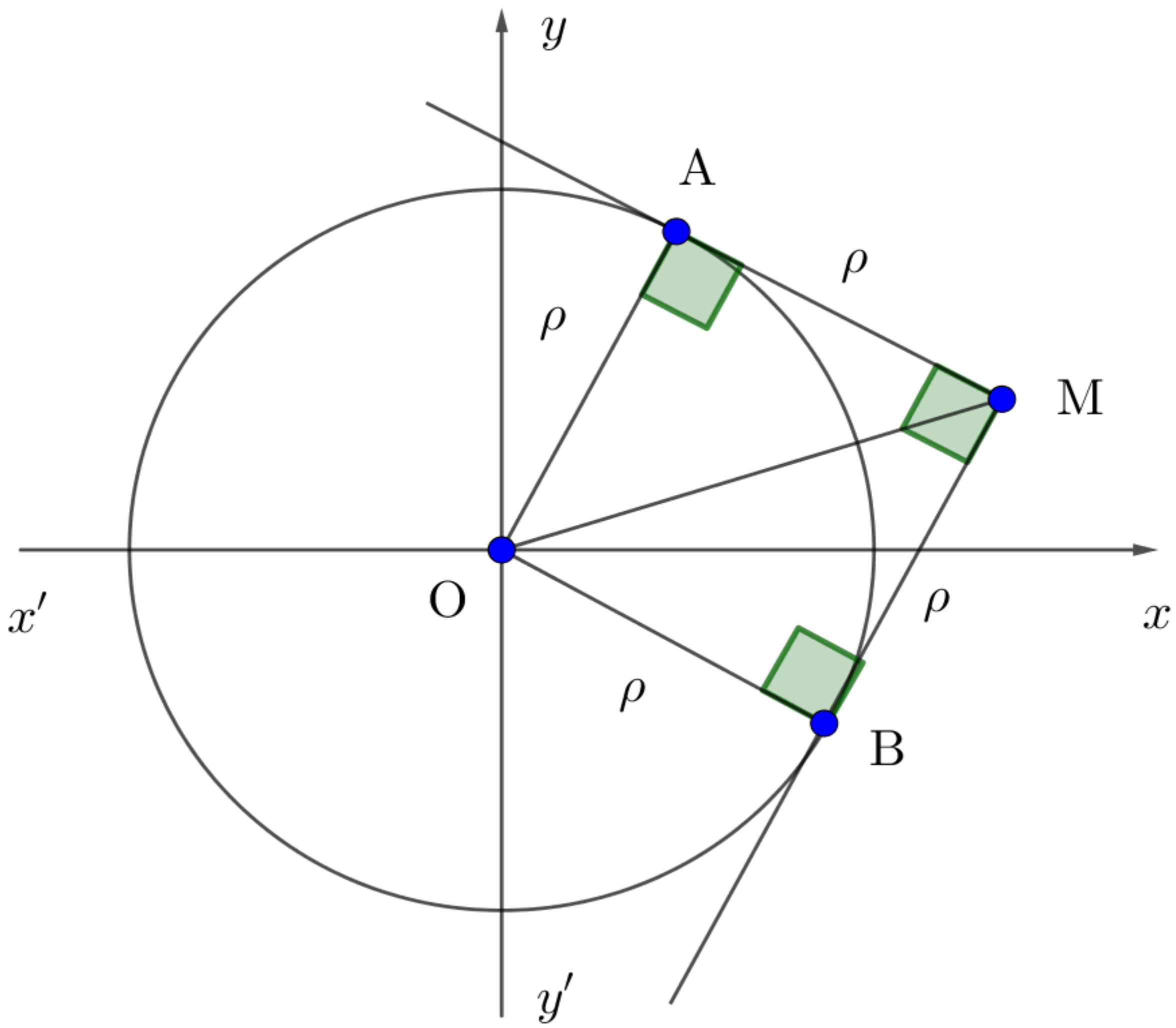
$\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2 : x_0x + y_0y = \rho^2$

15.

Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M, *για τα οποία οι εφαπτόμενες προς τον κύκλο* $(c): x^2 + y^2 = \rho^2$ *είναι κάθετες.*

Έστω σημείο M *του γεωμετρικού τόπου. Φέρνω* MA, MB *εφαπτόμενες στον κύκλο* $(c): x^2 + y^2 = \rho^2$ *στα σημεία επαφής* A *και* B *αντίστοιχα. Τότε θα έχω* $\mathrm{MA} \perp \mathrm{MB}$.

Γνωρίζω οτι η εφαπτομένη σε κύκλο είναι κάθετη στην ακτίνα επαφής



Επειδή MA *εφαπτομένη του κύκλου* $(c): x^2 + y^2 = \rho^2$

στο σημείο επαφής A *θα είναι κάθετη στην ακτίνα επαφής.*

Οπότε *θα έχω*: $MA \perp OA$

Επειδή MB *εφαπτομένη του κύκλου* $(c): x^2 + y^2 = \rho^2$

στο σημείο επαφής B *θα είναι κάθετη στην ακτίνα επαφής.*

Οπότε *θα έχω*: $MB \perp OB$.

<u>Το *άθροισμα των γωνιών κυρτού τετραπλεύρου είναι ίσο*</u>

<u>*με* 360^0</u>. Οπότε *θα έχω*:

$$O\hat{A}M + A\hat{M}B + M\hat{B}O + B\hat{O}A = 360^0 \Leftrightarrow$$

$$90^0 + 90^0 + 90^0 + B\hat{O}A = 360^0 \Leftrightarrow 270^0 + B\hat{O}A = 360^0 \Leftrightarrow$$

$\hat{BOA} = 360^0 - 270^0 \Leftrightarrow \hat{BOA} = 90^0$

$Οπότε: \hat{OAM} = \hat{AMB} = \hat{MBO} = \hat{BOA} = 90^0$

Συνεπώς το τετράπλευρο OAMB *είναι ορθογώνιο γιατί όλες οι γωνίες του είναι ορθές.*

Έχω: $OA = OB$ (*Ως ακτίνες του ίδιου κύκλου*)

Οπότε το OAMB *είναι ορθογώνιο και έχει τουλάχιστον δυο διαδοχικές πλευρές ίσες. Συνεπώς το* OAMB *είναι τετράγωνο ως <u>ορθογώνιο και έχει τουλάχιστον δυο διαδοχικές πλευρές ίσες</u>. Άρα όλες οι πλευρές του* OAMB *θα είναι ίσες με* ρ!!!

Το τρίγωνο OAM *είναι ορθογώνιο στο* A $\left(\hat{OAM} = 90^0\right)$

Οπότε απο το Πυθαγόρειο θεώρημα θα έχω:

$$OM^2 = OA^2 + AM^2 \overset{OA=AM=\rho}{\Longleftrightarrow} OM^2 = \rho^2 + \rho^2 \Leftrightarrow OM^2 = 2\rho^2$$

$$\overset{x^2=\theta \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\theta},\theta\geq 0}{\Longleftrightarrow} OM = \sqrt{2\rho^2} \overset{\sqrt{\alpha\beta}=\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta},\alpha,\beta\geq 0}{\Longleftrightarrow} OM = \sqrt{2}\sqrt{\rho^2} \overset{\sqrt{x^2}=|x|}{\Longleftrightarrow}$$

$$OM = \sqrt{2}|\rho| \overset{Αν\ \theta\geq 0\ τότε\ θα\ έχω\ |\theta|=\theta}{\Longleftrightarrow} OM = \sqrt{2}\rho$$

Οπότε το σημείο M *είναι σημείο του γεωμετρικού τόπου αν και μόνο αν η απόσταση του* M *απο το σταθερό σημείο* $O(0,0)$ *είναι ίση με το σταθερό αριθμό* $\sqrt{2}\rho$. *Άρα το σημείο* M *είναι σημείο του κύκλου με κέντρο* $O(0,0)$ *και ακτίνα* $\sqrt{2}\rho$. *Άρα η εξίσωση του γεωμετρικού τόπου είναι*:

$$x^2 + y^2 = \left(\sqrt{2}\rho\right)^2 \overset{(\alpha\beta)^\nu=\alpha^\nu\beta^\nu}{\Longleftrightarrow} x^2 + y^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 \rho^2 \overset{\left(\sqrt{\alpha}\right)^2=\alpha,\alpha\geq 0}{\Longleftrightarrow}$$

$$x^2 + y^2 = 2\rho^2$$

16.

$$\text{Να αποδείξετε ότι το σημείο τομής των ευθειών}$$
$$(\varepsilon_1): x\sigma\upsilon\nu\theta + y\eta\mu\theta = \alpha$$
$$(\varepsilon_2): x\eta\mu\theta - y\sigma\upsilon\nu\theta = \beta$$
$$\text{ανήκει στο κύκλο } (c): x^2 + y^2 = \alpha^2 + \beta^2$$
$$\text{για όλες τις τιμές του } \theta \in [0, 2\pi) \text{ και } |\alpha| + |\beta| > 0$$

Αν $\mathrm{M}(x, y)$ το κοινό σημείο των ευθειών (ε_1) και (ε_2):

$$\left.\begin{cases} \mathrm{M}(x,y) \in (\varepsilon_1) \\ \mathrm{M}(x,y) \in (\varepsilon_2) \end{cases}\right\} \Rightarrow \left.\begin{cases} x\sigma\upsilon\nu\theta + y\eta\mu\theta = \alpha \\ x\eta\mu\theta - y\sigma\upsilon\nu\theta = \beta \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{cases} (x\sigma\upsilon\nu\theta + y\eta\mu\theta)^2 = \alpha^2 \\ (x\eta\mu\theta - y\sigma\upsilon\nu\theta)^2 = \beta^2 \end{cases}\right\} \overset{\substack{(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 \\ (\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2}}{\Longrightarrow}$$

$$\left.\begin{cases} (x\sigma\upsilon\nu\theta)^2 + 2x\sigma\upsilon\nu\theta y\eta\mu\theta + (y\eta\mu\theta)^2 = \alpha^2 \\ (x\eta\mu\theta)^2 - 2x\eta\mu\theta y\sigma\upsilon\nu\theta + (y\sigma\upsilon\nu\theta)^2 = \beta^2 \end{cases}\right\} \overset{(\alpha\beta)^\nu=\alpha^\nu\beta^\nu}{\Longrightarrow}$$

$$\left.\begin{cases} x^2\sigma\upsilon\nu^2\theta + 2xy\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta + y^2\eta\mu^2\theta = \alpha^2 \\ x^2\eta\mu^2\theta - 2xy\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta + y^2\sigma\upsilon\nu^2\theta = \beta^2 \end{cases}\right\} \overset{(+)}{\Longrightarrow}$$

$$x^2\sigma\upsilon\nu^2\theta + \cancel{2xy\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta} + y^2\eta\mu^2\theta + x^2\eta\mu^2\theta - \cancel{2xy\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta} + y^2\sigma\upsilon\nu^2\theta$$
$$= \alpha^2 + \beta^2 \Rightarrow$$

$$x^2\sigma\upsilon\nu^2\theta + x^2\eta\mu^2\theta + y^2\eta\mu^2\theta + y^2\sigma\upsilon\nu^2\theta = \alpha^2 + \beta^2 \Rightarrow$$

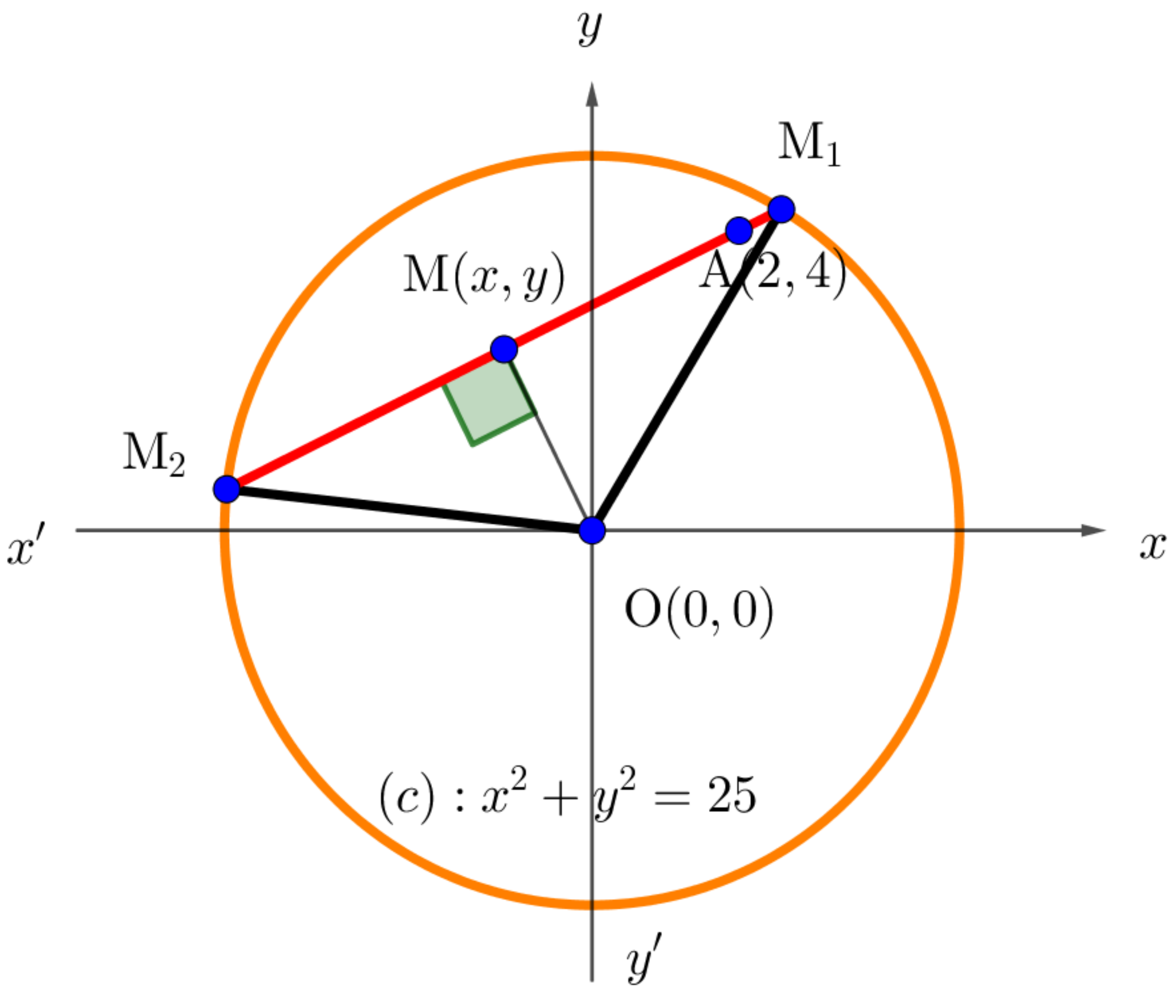
$$x^2\left(\sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta\right) + y^2\left(\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta\right) = \alpha^2 + \beta^2 \overset{\sigma\upsilon\nu^2\theta+\eta\mu^2\theta=1}{\Longrightarrow}$$

$$x^2 \bullet 1 + y^2 \bullet 1 = \alpha^2 + \beta^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = \alpha^2 + \beta^2 \Rightarrow \mathrm{M}(x,y) \in (c)$$

$$\boxed{\sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta = 1}$$

17.

$$\text{Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των μέσων των χορδών}$$
$$\text{του κύκλου } x^2 + y^2 = 25, \text{ που διέρχονται απο το σημείο}$$
$$\mathrm{A}(2,4).$$



Έστω $\mathrm{M_1M_2}$ *χορδή του κύκου* $(c): x^2 + y^2 = 25$ *που διέρχεται απο το σημείο* $\mathrm{A}(2,4)$. *Αν* Κ *είναι το μέσο της χορδής* $\mathrm{M_1M_2}$

Στο ισοσκελές τρίγωνο $\mathrm{OM_1M_2}$ $(\mathrm{OM_1} = \mathrm{OM_2})$ *το ευθύγραμμο τμήμα* ΟΜ *είναι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην βάση του* $\mathrm{M_1M_2}$. *Οπότε*:

$$\mathrm{OM} \perp \mathrm{M_1M_2} \left(\begin{array}{l} \text{Ως διάμεσος ισοσκελούς τριγώνου που} \\ \text{αντιστοιχεί στην βάση του} \end{array} \right)$$

$$\mathrm{OM} \perp \mathrm{M_1M_2} \Leftrightarrow \mathrm{OK} \perp \mathrm{AM} \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OM}}\,\overrightarrow{\mathrm{AM}} = 0$$

$$\boxed{\text{Αν } \mathrm{A}(x_{\mathrm{A}},y_{\mathrm{A}}),\mathrm{B}(x_{\mathrm{B}},y_{\mathrm{B}}) \text{ τότε } \overrightarrow{\mathrm{AB}}=(x_{\mathrm{B}}-x_{\mathrm{A}},y_{\mathrm{B}}-y_{\mathrm{A}})}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} \underset{\mathrm{O}(0,0)}{\overset{\mathrm{M}(x,y)}{=}} (x-0,y-0)=(x,y)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} \underset{\mathrm{A}(2,4)}{\overset{\mathrm{M}(x,y)}{=}} (x-2,y-4)$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\vec{\beta}=0\\ \text{Αν } \vec{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2),\vec{\beta}=(\beta_1,\beta_2) \text{ τότε } \vec{\alpha}\vec{\beta}=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2\end{array}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\,\overrightarrow{\mathrm{AM}}=0 \underset{\overrightarrow{\mathrm{AM}}=(x-2,y-4)}{\overset{\overrightarrow{\mathrm{OM}}=(x,y)}{\Longleftrightarrow}} x(x-2)+y(y-4)=0\Leftrightarrow$$

$$x^2+y^2-2x-4y=0(1)$$

$$\text{Έχω}: \mathrm{A}=-2,\mathrm{B}=-4,\Gamma=0$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Η εξίσωση } x^2+y^2+\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0 \text{ εκφράζει κύκλο όταν}\\ \mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma>0. \text{ Τότε έχω τον κύκλο με κέντρο } \mathrm{K}\left(-\dfrac{\mathrm{A}}{2},-\dfrac{\mathrm{B}}{2}\right)\\ \text{και ακτίνα } \rho=\dfrac{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma}}{2}\end{array}}$$

$$\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma=(-2)^2+(-4)^2=4+16=20>0$$

$$\text{Επειδή } \mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma>0 \text{ η εξίσωση } (1) \text{ παριστάνει κύκλο}$$

$$\text{Έχω}: -\frac{\mathrm{A}}{2}=-\frac{-2}{2}=1, -\frac{\mathrm{B}}{2}=-\frac{-4}{2}=2$$

$$\text{Οπότε ο κύκλος έχει κένρο } \mathrm{K}(1,2)$$

$$\text{Η ακτίνα του κύκλου είναι}:$$

$$\rho=\frac{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma}}{2}=\frac{\sqrt{20}}{2}\overset{20=4\bullet 5}{=}\frac{\sqrt{4\bullet 5}}{2}\overset{\sqrt{\alpha\beta}=\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta},\alpha,\beta\geq 0}{=}$$

$$\frac{\sqrt{4}\sqrt{5}}{2}=\frac{2\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}$$

18.

Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ, *των οποίων ο λόγος των αποστάσεων από τα σημεία* $\mathrm{A}(-3,0)$ *και* $\mathrm{B}(3,0)$ *είναι σταθερός και ίσος με* 2.

Έστω $\mathrm{M}(x,y)$ *σημείο του γεωμετρικού τόπου. Τότε θα έχω*:

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}}=2\\ \mathrm{MB}\neq 0\end{array}\right\}\overset{\substack{\mathrm{M}(x,y)\\ \mathrm{A}(-3,0)\\ \mathrm{B}(3,0)}}{\Longleftrightarrow}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\sqrt{(x+3)^2+(y-0)^2}}{\sqrt{(x-3)^2+(y-0)^2}}=2\\ (x,y)\neq(3,0)\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\sqrt{(x+3)^2+y^2}}{\sqrt{(x-3)^2+y^2}}=2\\ (x,y)\neq(3,0)\end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\sqrt{(x+3)^2+y^2}=2\sqrt{(x-3)^2+y^2}\\ (x,y)\neq(3,0)\end{array}\right\}\overset{\substack{\text{Αν } \alpha,\beta\geq 0 \text{ τότε ισχύει η}\\ \text{ισοδυναμία:}\\ \alpha=\beta\Leftrightarrow\alpha^2=\beta^2}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\left(\sqrt{(x+3)^2+y^2}\right)^2=\left(2\sqrt{(x-3)^2+y^2}\right)^2\\ (x,y)\neq(3,0)\end{array}\right\}\overset{\substack{(\alpha\beta)^\nu=\alpha^\nu\beta^\nu\\ (\sqrt{\theta})^2=\theta,\theta\geq 0}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left\{\begin{array}{l}(x+3)^2+y^2=4\left(\sqrt{(x-3)^2+y^2}\right)^2\\ (x,y)\neq(3,0)\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}(x+3)^2+y^2=4\left[(x-3)^2+y^2\right]\\ (x,y)\neq(3,0)\end{array}\right\}$$

$$\overset{\substack{(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2\\ (\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2}}{\Longleftrightarrow}\left\{\begin{array}{l}x^2+2\bullet x\bullet 3+3^2+y^2=4\left(x^2-2\bullet x\bullet 3+3^2+y^2\right)\\ (x,y)\neq(3,0)\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}x^2+6x+9+y^2=4\left(x^2-6x+9+y^2\right)\\ (x,y)\neq(3,0)\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}x^2+6x+9+y^2=4x^2-24x+36+4y^2\\ (x,y)\neq(3,0)\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}x^2+6x+9+y^2-4x^2+24x-36-4y^2=0\\ (x,y)\neq(3,0)\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -3x^2-3y^2+30x-27=0 \\ (x,y)\neq(3,0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3\left(x^2+y^2-10x+9\right)=0 \\ (x,y)\neq(3,0) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2+y^2-10x+9=0 \\ (x,y)\neq(3,0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2\bullet x\bullet 5+y^2=-9 \\ (x,y)\neq(3,0) \end{cases}$$

Προσθέτω και στα δυο μέλη το 5^2 για να εμφανιστεί η ταυτότητα $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha-\beta)^2$ με $\alpha=x$ και $\beta=5$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2\bullet x\bullet 5+5^2+y^2=5^2-9 \\ (x,y)\neq(3,0) \end{cases} \overset{\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha-\beta)^2}{\Leftrightarrow}$$

$$\begin{cases} (x-5)^2+y^2=25-9 \\ (x,y)\neq(3,0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-5)^2+y^2=4^2 \\ (x,y)\neq(3,0) \end{cases}$$

Η *σχέση* $(x-5)^2+y^2=4^2$ *μου δίνει κύκλο με κέντρο το σημείο* $\mathrm{K}(5,0)$ *και ακτίνα* $\rho=4$. Θ*α εξετάσω αν το σημείο* $\mathrm{B}(3,0)$ *σημείο του κύκλου* $(\mathrm{K}(5,0),4)$ *τότε ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος θα είναι ο κύκλος* $(\mathrm{K}(5,0),4)$ *χωρίς το σημείο* $\mathrm{B}(3,0)$ *ενώ αν το* $\mathrm{B}(3,0)$ *δεν είναι σημείο του κύκλου* $(\mathrm{K}(5,0),4)$ *τότε ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος θα είναι ο κύκλος* $(\mathrm{K}(5,0),4)$

$$\mathrm{BK} \underset{\mathrm{B}(3,0)}{\overset{\mathrm{K}(5,0)}{=}} \sqrt{(5-3)^2+(0-0)^2}=\sqrt{4}=2\neq 4=\rho$$

Σ*υνεπώς το* $\mathrm{B}(3,0)$ *δεν είναι σημείο του κύκλου* $(\mathrm{K}(5,0),4)$ *οπότε ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος θα είναι ο κύκλος* $(\mathrm{K}(5,0),4)$.

19.

Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M, των οποίων το τετράγωνο της απόστασης απο την αρχή των αξόνων είναι ίσο με το τετραπλάσιο της απόστασης απο την ευθεία $x=1$.

$(\varepsilon): 1x+0y-1=0$

Έστω $\mathrm{M}(x,y)$ *σημείο του γεωμετρικού τόπου. Τότε θα έχω:*

$$\mathrm{MO}^2=4d\left(\mathrm{M},(\varepsilon)\right)\underset{\mathrm{O}(0,0)}{\overset{\mathrm{M}(x,y)}{\Leftrightarrow}}\left(\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}\right)^2=4\frac{|x-1|}{\sqrt{1^2+0^2}}\overset{\left(\sqrt{a}\right)^2=a,\,a\geq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\boxed{\mathrm{AB}=\sqrt{\left(x_{\mathrm{B}}-x_{\mathrm{A}}\right)^2+\left(y_{\mathrm{B}}-y_{\mathrm{A}}\right)^2},\ \mathrm{A}\left(x_{\mathrm{A}},y_{\mathrm{A}}\right),\mathrm{B}\left(x_{\mathrm{B}},y_{\mathrm{B}}\right)}$$

Έστω ευθεία $(\varepsilon): \mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0$ *με* $\lvert\mathrm{A}\rvert+\lvert\mathrm{B}\rvert\neq 0$ *τότε η αποσταση του σημείου* $\mathrm{M}(x_0,y_0)$ *απο την ευθεία* (ε) *δίνεται απο την σχέση:*
$d(\mathrm{M},\varepsilon)=\dfrac{\lvert\mathrm{A}x_0+\mathrm{B}y_0+\Gamma\rvert}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}}$
$d(\mathrm{M},\varepsilon)$: Η *απόσταση του σημείου* Μ *απο την ευθεία* (ε)

$$x^2+y^2=4|x-1|$$

Διακρίνω τις περιπτώσεις: $\begin{Bmatrix}(\mathrm{I})\, x-1\geq 0\\ (\mathrm{II})\, x-1<0\end{Bmatrix}$

Π*ερίπτωση* (I):

$$\begin{Bmatrix}x^2+y^2=4|x-1|\\ x-1\geq 0\end{Bmatrix}\overset{\mathrm{A}\nu\ \theta\geq 0\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ |\theta|=\theta}{\Leftrightarrow}\begin{Bmatrix}x^2+y^2=4(x-1)\\ x\geq 1\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}x^2+y^2=4x-4\\ x\geq 1\end{Bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}x^2-4x+4+y^2=0\\ x\geq 1\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}x^2-2\bullet x\bullet 2+2^2+y^2=0\\ x\geq 1\end{Bmatrix}\overset{\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha-\beta)^2}{\Leftrightarrow}$$

$$\left\{\begin{array}{l}(x-2)^2+y^2=0\\ x\geq 1\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x-2=y=0\\ x\geq 1\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=2(\Delta\varepsilon\kappa\tau\acute{\eta})\, y=0\\ x\geq 1\end{array}\right\}$$

$$\boxed{x^2+y^2=0\Leftrightarrow x=y=0}$$

$$\Leftrightarrow (x,y)=(2,0)$$

$\Pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\pi\tau\omega\sigma\eta\ (\mathrm{II})$:

$$\left\{\begin{array}{l}x^2+y^2=4|x-1|\\ x-1<0\end{array}\right\}\overset{\mathrm{A}\nu\ \theta<0\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ |\theta|=-\theta}{\Longleftrightarrow}\left\{\begin{array}{l}x^2+y^2=4(-x+1)\\ x<1\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}x^2+y^2=-4x+4\\ x<1\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x^2+4x+y^2=4\\ x<1\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x^2+2\bullet x\bullet 2+y^2=4\\ x<1\end{array}\right\}$$

Προσθέτω και στα δυο μέλη το 2^2 *για να εμφανιστεί η ταυτότητα* $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2$ *με* $\alpha=x$ *και* $\beta=2$

$$\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x^2+2\bullet x\bullet 2+2^2+y^2=4+2^2\\ x<1\end{array}\right\}\overset{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left\{\begin{array}{l}(x+2)^2+y^2=8\\ x<1\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left[x-(-2)\right]^2+\left(y-0^2\right)=\left(\sqrt{8}\right)^2\\ x<1\end{array}\right\}\overset{8=2\bullet 4}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\left[x-(-2)\right]^2+\left(y-0^2\right)=\left(\sqrt{2\bullet 4}\right)^2\\ x<1\end{array}\right\}\overset{\sqrt{\alpha\beta}=\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta},\alpha,\beta\geq 0}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\left[x-(-2)\right]^2+\left(y-0^2\right)=\left(\sqrt{2}\sqrt{4}\right)^2\\ x<1\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left[x-(-2)\right]^2+\left(y-0^2\right)=\left(2\sqrt{2}\right)^2\\ x<1\end{array}\right\}\omega$$

Η *εξίσωση* $\left[x-(-2)\right]^2+\left(y-0^2\right)=\left(2\sqrt{2}\right)^2$ *που δίνει τον κύκλο με κέντρο το σημείο* $\mathrm{K}(-2,0)$ *και ακτίνα* $\rho=2\sqrt{2}$. Ο*πότε θα έχω τον κύκλο* $\left(\mathrm{K}(-2,0),2\sqrt{2}\right)$ *με* $x<1$.

20.

$\mathrm{N}\alpha\ \chi\alpha\rho\alpha\kappa\tau\eta\rho\acute{\iota}\sigma\varepsilon\tau\varepsilon\ \tau\iota\varsigma\ \pi\alpha\rho\alpha\kappa\acute{\alpha}\tau\omega\ \pi\rho o\tau\acute{\alpha}\sigma\varepsilon\iota\varsigma\ \mu\varepsilon\ (\Sigma)\ \acute{\eta}\ (\Lambda)$

$(\mathrm{I})\ \mathrm{A}\nu\ \mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma>0$ *η εξίσωση* $x^2+y^2+\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0$ *εκφράζει κύκλο*

(II) Η *εφαπτομένη του κύκλου* $(C): x^2+y^2=\rho^2, \rho>0$ *στο σημείο επαφής* $\mathrm{M}(x_1, y_1)$ *έχει εξίσωση* $xx_1-yy_1=\rho^2$

(III) Α*ν ο κύκλος* (C) *έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα* $\rho>0$ *θα έχει εξίσωση* $x^2+y^2=\rho^2$

(IV) Ο *κύκλος* (c) *με κέντρο το σημείο* $\mathrm{K}(\alpha,\beta)$ *και ακτίνα* $\rho>0$ *έχει εξίσωση* $(c): (x+\alpha)^2+(y+\beta)^2=\rho^2$

(V) Α*ν* $\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma=0$ *η εξίσωση* $x^2+y^2+\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0$ *παριστάνει μόνο ένα σημείο το* $\mathrm{K}\left(-\frac{\mathrm{A}}{2},-\frac{\mathrm{B}}{2}\right)$

$(\mathrm{I})\to(\Sigma),(\mathrm{II})\to(\Lambda),(\mathrm{III})\to(\Sigma),(IV)\to(\Lambda),(V)\to(\Sigma)$

ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ
Αν $\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma>0$ *η εξίσωση* $x^2+y^2+\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0$ *εκφράζει κύκλο με κέντρο* $\mathrm{K}\left(-\frac{\mathrm{A}}{2},-\frac{\mathrm{B}}{2}\right)$ *και ακτίνα* $\rho=\frac{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma}}{2}$
Αν $\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma=0$ *η εξίσωση* $x^2+y^2+\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0$ *παριστάνει μόνο ένα σημείο το* $\mathrm{K}\left(-\frac{\mathrm{A}}{2},-\frac{\mathrm{B}}{2}\right)$
Αν $\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma<0$ *η εξίσωση* $x^2+y^2+\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0$ *είναι αδύνατη.*
Αν *ο κύκλος* (C) *έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα* $\rho>0$ *θα έχει εξίσωση* $x^2+y^2=\rho^2$
Η *εφαπτομένη του κύκλου* $(C): x^2+y^2=\rho^2, \rho>0$ *στο σημείο επαφής* $\mathrm{M}(x_1,y_1)$ *έχει εξίσωση* $xx_1+yy_1=\rho^2$
Ο *κύκλος* (c) *με κέντρο το σημείο* $\mathrm{K}(\alpha,\beta)$ *και ακτίνα* $\rho>0$ *έχει εξίσωση* $(c):(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\rho^2$