ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1.

Αν α>β>0να αποδείξετε ότι :

$$e^{\alpha-\beta}>\frac{1+\alpha}{1+\beta}$$

$$e^{\alpha-\beta}>\frac{1+\alpha}{1+\beta}\Leftrightarrow\frac{e^{\alpha}}{e^{\beta}}>\frac{1+\alpha}{1+\beta}\Leftrightarrow e^{\alpha}(1+\beta)>e^{\beta}(1+\alpha)\Leftrightarrow$$

$$e^{\alpha}(1+\beta)>e^{\beta}(1+\alpha)\Leftrightarrow\frac{e^{\alpha}(1+\beta)}{(1+\alpha)(1+\beta)}>\frac{e^{\beta}(1+\alpha)}{(1+\alpha)(1+\beta)}\Leftrightarrow$$

$$\frac{e^{\alpha}}{1+\alpha}>\frac{e^{\beta}}{1+\beta}$$

Θεωρώ τη συνάρτηση $f(x)=\frac{e^{x}}{1+x}$,x>0

$$f'(x)=\left(\frac{e^{x}}{1+x}\right)'=\frac{(e^{x})'(1+x)-e^{x}(1+x)'}{(1+x)^{2}}=\frac{e^{x}(1+x)-e^{x}[(1)'+(x)']}{(1+x)^{2}}=$$

$$=\frac{e^{x}+x\,e^{x}-e^{x}}{(1+x)^{2}}=\frac{x\,e^{x}}{(1+x)^{2}}$$

Επειδή για κάθε $x\in(0,+\infty)$ισχύει $f'(x)>0$ η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.Οπότε επειδή α>β>0 θα έχω :

$$f(\alpha)>f(\beta)\Leftrightarrow\frac{e^{\alpha}}{1+\alpha}>\frac{e^{\beta}}{1+\beta}\Leftrightarrow e^{\alpha-\beta}>\frac{1+\alpha}{1+\beta}$$

2.

Ι)Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τη συνάρτηση

$$f(x)=\ln\left(\frac{\ln x}{x}\right),\ x\in(1,+\infty)$$

ΙΙ)Αν α>β>e να αποδείξετε ότι : $\alpha^{\beta}<\beta^{\alpha}$

$$f'(x) = \left[\ln\left(\frac{\ln x}{x}\right)\right]' = \frac{\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)'}{\dfrac{\ln x}{x}} = \frac{\dfrac{(\ln x)'\, x - \ln x\,(x)'}{x^2}}{\dfrac{\ln x}{x}} =$$

$$= \frac{\dfrac{\dfrac{1}{x}\, x - \ln x}{x^2}}{\dfrac{\ln x}{x}} = \frac{\dfrac{1-\ln x}{x^2}}{\dfrac{\ln x}{x}} =$$

$$= \frac{(1-\ln x)\, x}{x^2 \ln x} = \frac{1}{x\ln x}\,(1-\ln x)$$

Επειδή x>1 έχω :

$$\left.\begin{matrix} \ln x > \ln 1 \\ x>1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \ln x > 0 \\ x>0 \end{matrix}\right\} \overset{(\bullet)}{\Rightarrow} x \ln x > 0$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 1-\ln x=0 \\ x>1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \ln x=1 \\ x>1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x=e \\ x>1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow (x=e)$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 1-\ln x>0 \\ x>1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} -\ln x>-1 \\ x>1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{-\ln x}{-1} < \dfrac{-1}{-1} \\ x>1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \ln x < \ln e \\ x>1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x< e \\ x>1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow 1<x<e$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x>e$$

x	1		e		+∞
f ΄	‖	+	0	–	‖
f	‖	↗		↘	‖

Επειδη f΄(x) > 0 για κάθε x∈(0,e) η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα (0,e)
Επειδη f΄(x) < 0 για κάθε x∈(e,+∞) η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (e,+∞)
ΙΙ)Επειδή α>β>e και f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (e,+∞) θα έχω :

$$f(\alpha) < f(\beta) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{\ln\alpha}{\alpha}\right) < \ln\left(\frac{\ln\beta}{\beta}\right) \Leftrightarrow \frac{\ln\alpha}{\alpha} < \frac{\ln\beta}{\beta} \Leftrightarrow$$

$$\alpha\beta\frac{\ln\alpha}{\alpha} < \alpha\beta\frac{\ln\beta}{\beta} \text{(Έχω } \alpha,\beta>0 \Rightarrow \alpha\beta>0) \Leftrightarrow \beta\ln\alpha < \alpha\ln\beta \Leftrightarrow$$

$$\ln\alpha^{\beta} < \ln\beta^{\alpha} \Leftrightarrow \alpha^{\beta} < \beta^{\alpha}$$

3.

Να αποδείξετε ότι : $\eta\mu x \geq x - \dfrac{x^2}{2}$, x є[0,π/2]

Θεωρώ τη συνάρτηση : $f(x) = \eta\mu x - x + \dfrac{x^2}{2}$, x∈[0,π/2]

$$f'(x) = \left(\eta\mu x - x + \frac{1}{2}x^3\right)' = (\eta\mu x)' - (x)' + \left(\frac{1}{2}x^3\right)' =$$

$$\sigma\upsilon\nu x - 1 + \frac{1}{2}(x^2)' = \sigma\upsilon\nu x - 1 + \frac{1}{2}2x = \sigma\upsilon\nu x - 1 + x$$

$f''(x) = (\sigma\upsilon\nu x - 1 + x)' = (\sigma\upsilon\nu x)' - (1)' + (x)' = -\eta\mu x + 1$

Αν x∈(0,π/2) έχω: $\eta\mu x < 1 \Leftrightarrow 1 > \eta\mu x \Leftrightarrow 1 - \eta\mu x > 0 \Leftrightarrow f''(x) > 0$

$$\begin{cases} \text{I) } f' \text{ παραγωγίσιμη στο } [0,\pi/2] \\ \text{II) } f''(x)>0 \text{ για κάθε } x\in(0,\pi/2) \end{cases}$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο$[0,\pi/2]$

$$\xrightarrow[x>0]{f' \text{είναι γνησίως φθίνουσα στο } [0,\pi/2]}$$

$f'(x)> f'(0) \Longrightarrow f'(x)> συν0–1 +0 \Longrightarrow f'(x)> 0$

$$\begin{cases} \text{I) } f \text{ παραγωγίσιμη στο } [0,\pi/2] \\ \text{II) } f'(x)>0 \text{ για κάθε } x\in(0,\pi/2) \end{cases}$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο$[0,\pi/2]$

$$\xrightarrow[x\geq 0]{\text{Η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } [0,\pi/2]}$$

$$f(x) \geq f(0) \Longrightarrow f(x) \geq ημ0- 0 + \frac{0^2}{2} \Longrightarrow f(x) \geq 0 \Longrightarrow$$

$$ημx - x+ \frac{x^2}{2}\geq 0 \Longrightarrow ημx \geq x - \frac{x^2}{2}$$

4.

I)Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τη συνάρτηση $f(x) = \frac{ημx}{x}$ $,x\in(0,\pi/2]$
II)Αν α,βє$(0,\pi/2)$ με α<β να αποδείξετε ότι : $\frac{ημα}{ημβ} > \frac{α}{β}$

$$f'(x) =\left(\frac{ημx}{x}\right)'= \frac{(ημx)'x - ημx\,(x)'}{x^2} = \frac{xσυνx - ημx}{x^2}$$

Θεωρώ τη συνάρτηση : $g(x)= xσυνx – ημx$, $x\in[0,\pi/2]$

$g'(x)= (xσυνx – ημx)'= (xσυνx)' – (ημx)' = (x)'συνx+x (συνx)' – συνx= συνx+x (–ημx) – συνx = –x ημx$

Αν $x \in (0,\pi/2)$ θα έχω :

$$\left.\begin{array}{l} x>0 \\ \eta\mu x>0 \end{array}\right\} \Rightarrow x\eta\mu x>0 \Rightarrow -x\eta\mu x<0 \Rightarrow g'(x)<0$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{I) } g \text{ παραγωγίσιμη στο } [0,\pi/2] \\ \text{II) } g'(x)<0 \text{ για κάθε } x\in(0,\pi/2) \end{array}\right.$$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,\pi/2]$ Αν $x\in(0,\pi/2)$ θα έχω :

$$x>0 \xrightarrow{\text{Η g είναι γνησίως φθίνουσα στο } [0,\pi/2]}$$

$$g(x)<g(0) \Rightarrow x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x< 0\sigma\upsilon\nu 0 - \eta\mu 0 \Rightarrow x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x<0$$

Άρα για κάθε $x\in(0,\pi/2)$ έχω $x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x< 0$.Οπότε κάθε $x\in(0,\pi/2)$ έχω $\dfrac{x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{x^2}<0$.Συνεπώς $f'(x) <0$ για κάθε $x\in(0,\pi/2)$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{I) } f \text{ παραγωγίσιμη στο } (0,\pi/2] \\ \text{II) } f'(x)<0 \text{ για κάθε } x\in(0,\pi/2) \end{array}\right.$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο$(0,\pi/2]$

II)

$$0<\alpha<\beta<\pi/2 \xrightarrow{\text{f γνησίως φθίνουσα στο}(0,\pi/2]}$$

$$f(\alpha)>f(\beta) \Rightarrow \frac{\eta\mu\alpha}{\alpha}>\frac{\eta\mu\beta}{\beta} \Rightarrow \alpha\beta\frac{\eta\mu\alpha}{\alpha}>\alpha\beta\frac{\eta\mu\beta}{\beta} \Rightarrow$$

$$\beta\,\eta\mu\alpha>\alpha\,\eta\mu\beta \Rightarrow \frac{\beta\,\eta\mu\alpha}{\beta\eta\mu\beta}>\frac{\alpha\,\eta\mu\beta}{\beta\eta\mu\beta} \Rightarrow \frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu\beta}>\frac{\alpha}{\beta}$$

5.

Να δείξετε ότι αν x>1 τότε $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}$

Θεωρώ τη συνάρτηση $f(x) = 2\sqrt{x} - 3 + \frac{1}{x}$ με x$\in [1,+\infty)$

$$f(x) = 2\sqrt{x} - 3 + \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = (2x^{1/2} - 3 + x^{-1})' = (2x^{1/2})' - (3)' - (x^{-1})' = 2\frac{1}{2}x^{1/2-1} - 1x^{-1-1} =$$

$$= x^{-1/2} - x^{-1} = \frac{1}{x^{1/2}} - \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{1\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x}-1}{x}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (\frac{\sqrt{x}-1}{x} = 0, x \in [1,+\infty)) \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1 = 0, x \in [1,+\infty))$$

$$(\sqrt{x} - 1 = 0, x \in [1,+\infty)) \Leftrightarrow (\sqrt{x} = 1, x \in [1,+\infty)) \Leftrightarrow (x = 1, x \in [1,+\infty))$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow (\frac{\sqrt{x}-1}{x} > 0, x \in [1,+\infty)) \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1 > 0, x \in [1,+\infty))$$

$$(\sqrt{x} - 1 > 0, x \in [1,+\infty)) \Leftrightarrow (\sqrt{x} > 1, x \in [1,+\infty)) \Leftrightarrow [(\sqrt{x})^2 > 1^2, x \in [1,+\infty)]$$

$$\Leftrightarrow (x > 1, x \in [1,+\infty)) \Leftrightarrow x \in (1,+\infty)$$

I)f παραγωγίσιμη στο [1,+∞)

II) f΄(x) >0 για κάθε x$\in$(1,+∞)

Άρα f γνησίως αύξουσα στο [1,+∞)

Αν x>1 $\xrightarrow{\text{f γνησίως αύξουσα στο}[1,+\infty)}$

$$f(x)>f(1)\Rightarrow 2\sqrt{x}-3+\frac{1}{x}>2\sqrt{1}-3+\frac{1}{1}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x}-3+\frac{1}{x}>0\Rightarrow 2\sqrt{x}>3-\frac{1}{x}$$

6.

$$\boxed{\text{Να αποδείξετε οτι}: x+2+(x-2)e^x>0, x>0}$$

$$\text{Θεωρώ την συνάρτηση } f(x)=x+2+(x-2)e^x>0, x\in[0,+\infty)$$

$$f'(x)=\left[x+2+(x-2)e^x\right]' \overset{\left[F(x)+G(x)+H(x)\right]'=F'(x)+G'(x)+H'(x)}{=} (x)'+(2)'+\left[(x-2)e^x\right]'$$

$$\overset{\substack{\left[F(x)G(x)\right]'=F'(x)G(x)+F(x)G'(x)\\ (x)'=1\\ (c)'=0,c:\text{Σταθερά}\\ (e^x)'=e^x}}{=} 1+(x-2)'e^x+(x-2)(e^x)'=1+\underbrace{e^x+(x-2)e^x}_{\text{Βγάζω κοινό παράγοντα το } e^x}=$$

$$=1+(x-2+1)e^x=1+(x-1)e^x$$

$$f''(x)=\left(f'(x)\right)'=\left[1+(x-1)e^x\right]' \overset{\left[F(x)+G(x)\right]'=F'(x)+G'(x)}{=} (1)'+\left[(x-1)e^x\right]'$$

$$\overset{\substack{\left[F(x)G(x)\right]'=F'(x)G(x)+F(x)G'(x)\\ (x)'=1\\ (c)'=0,c:\text{Σταθερά}\\ (e^x)'=e^x}}{=} (x-1)'e^x+(x-1)(e^x)'=\underbrace{e^x+(x-1)e^x}_{\text{Βγάζω κοινό παράγοντα το } e^x}=$$

$$=(x-1+1)e^x=xe^x$$

$$\text{Έχω}:\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\text{Η } f' \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } [0,+\infty)\\ (\mathrm{II})\left(f'(x)\right)'>0 \text{ για κάθε } x\in(0,\infty)\end{array}\right\}$$

$$\text{Οπότε } f'\underset{\wedge}{\uparrow}\ [0,+\infty)$$

$$x>0 \overset{f'\underset{\wedge}{\uparrow}[0,+\infty)}{\Longrightarrow} f'(x)>f'(0) \overset{f'(0)=0}{\Longrightarrow} f'(x)>0$$

$$\text{Έχω}:\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\text{Η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } [0,+\infty)\\ (\mathrm{II})\ f'(x)>0 \text{ για κάθε } x\in(0,\infty)\end{array}\right\}$$

$\text{Οπότε } f \underset{\wedge}{\uparrow} [0,+\infty)$

$$x>0 \overset{f \underset{\wedge}{\uparrow} [0,+\infty)}{\Longrightarrow} f(x) > f(0) \overset{f'(0)=0}{\Longrightarrow} f(x) > 0 \Rightarrow x+2+(x-2)e^x > 0$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Αν α>lnβ,β>1να αποδείξετε ότι :

$$\frac{e^{\alpha}}{\beta} > \frac{1+\alpha}{1+\ln\beta}$$

2.

I)Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τη συνάρτηση

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+\ln x}{x}\right),\ x\in(1/e,+\infty)$$

II)Αν α>β>1 να αποδείξετε ότι : $(e\alpha)^{\beta}<(e\beta)^{\alpha}$

3.

Να αποδείξετε ότι : $ημ2x \geq 2x - 2x^2$, $x\in[0,\pi/4]$

4.

I)Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{ημx}{x},\ x\in[-\pi/2,0)$$

II)Αν $\alpha,\beta\in[-\pi/2,0)$ με α<β να αποδείξετε ότι :

$$\frac{ημ\alpha}{ημ\beta} < \frac{\alpha}{\beta}$$

5.

Να δείξετε ότι αν x>0 τότε $2\sqrt{x+1} > 3 - \dfrac{1}{x+1}$

6.

$\text{Να αποδείξετε οτι } ημx > x - \dfrac{1}{6}x^3, 0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

7.

$\text{Να αποδείξετε οτι}: x+1+(x-1)e^{2x} > 0, x > 0$